§3 HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

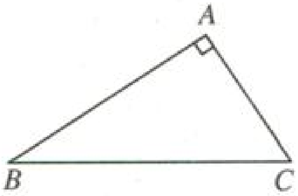
Ta biết rằng một tam giác hoàn toàn được xác định nếu biết ba cạnh, hoặc hai cạnh và góc xen giữa, hoặc một cạnh và hai góc kề ; nghĩa là số đo các cạnh, các góc còn lại của tam giác này hoàn toàn xác định. Như vậy, giữa các yếu tố của tam giác có những mối liên hệ nào đó, mà ta sẽ gọi chúng là các ***hệ thức lượng trong tam giác***. Trong mục này ta sẽ làm quen với một số hệ thức đó.

1. Định lí côsin trong tam giác

Nếu ABC là tam giác vuông tại A (h. 44) thì theo định lí Py-ta-go ta có

$$BC^2 = AC^2 + AB^2$$

hay $$\overrightarrow{BC}^2 = \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AB}^2. \qquad (*)$$



Hình 44

Có thể chứng minh ngắn gọn đẳng thức (*) như sau

$$\overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 = \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AB}^2 - 2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AB}^2.$$

?1 *Trong chứng minh trên, giả thiết góc A vuông được sử dụng như thế nào ?*

Bây giờ ta hãy xét một tam giác ABC tuỳ ý.

1
Hãy làm tương tự như chứng minh trên, rồi đặt $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, để đi đến công thức

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A.$$

Như vậy ta được định lí sau đây, gọi là ***định lí côsin*** trong tam giác.

ĐỊNH LÍ

Trong tam giác ABC, với BC = a, CA = b, AB = c, ta có

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A\ ;$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B\ ;$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$$

2 Từ định lí trên, hãy phát biểu bằng lời công thức tính một cạnh của tam giác theo hai cạnh còn lại và côsin của góc xen giữa hai cạnh đó.

?2 *Khi ABC là tam giác vuông, chẳng hạn $\widehat{A} = 90^{\circ}$, định lí côsin trở thành định lí quen thuộc nào ?*

3 Từ định lí côsin hãy viết công thức tính giá trị $\cos A$, $\cos B$, $\cos C$ theo a, b, c.

Từ hoạt động này ta có hệ quả sau đây trong tam giác *ABC*

HỆ QUẢ

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc};$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac};$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Ví dụ 1. *Hai chiếc tàu thuỷ cùng xuất phát từ một vị trí A, đi thẳng theo hai hướng tạo với nhau góc 60°. Tàu B chạy với tốc độ 20 hải lí một giờ. Tàu C chạy với tốc độ 15 hải lí một giờ. Sau 2 giờ, hai tàu cách nhau bao nhiêu hải lí ?* (1 hải lí ≈ 1,852 km).

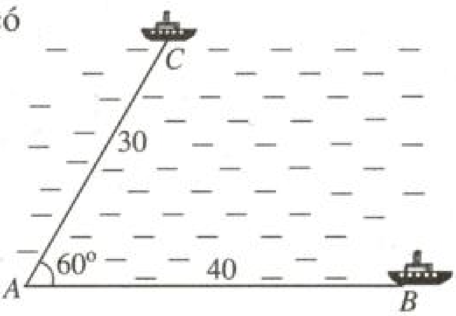
Giải. (h. 45) Sau 2 giờ tàu *B* đi được 40 hải lí, tàu *C* đi được 30 hải lí. Vậy tam giác *ABC* có $AB = 40$, $AC = 30$, $\widehat{A} = 60^{\circ}$.

Áp dụng định lí côsin vào tam giác *ABC*, ta có

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos A \\ &= 30^2 + 40^2 - 2.30.40.\cos 60^{\circ} \\ &= 900 + 1600 - 1200 = 1300. \end{aligned}$$

Vậy $BC = \sqrt{1300} \approx 36$ (hải lí).

Sau 2 giờ, hai tàu cách nhau khoảng 36 hải lí.



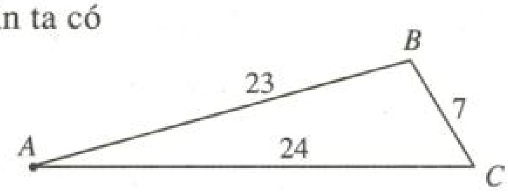
Hình 45

Ví dụ 2. *Các cạnh của tam giác ABC là $a = 7$, $b = 24$, $c = 23$. Tính góc A.*

Giải. (h. 46) Theo hệ quả của định lí côsin ta có

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$= \frac{24^2 + 23^2 - 7^2}{2.24.23} \approx 0,9565.$$



Hình 46

Từ đó ta được $\widehat{A} \approx 16^o58'$.

CHÚ Ý

Nếu sử dụng máy tính bỏ túi (MTBT) để tính góc A khi biết $\cos A = 0,9565$, ta có thể làm như sau

1) Đối với MTBT CASIO *fx*-220 hoặc *fx*-500A thì ấn

0.9565 $\boxed{SHIFT}$ $\boxed{\cos}$ $\boxed{SHIFT}$ $\boxed{\circ,,,}$. Kết quả : $\widehat{A} \approx 16^o58'$.

2) Đối với MTBT CASIO *fx*-500MS thì ấn

$\boxed{SHIFT}$ $\boxed{\cos}$ 0.9565 $\boxed{=}$ $\boxed{\circ,,,}$. Kết quả : $\widehat{A} \approx 16^o58'$.

Ngoài ra, có thể dùng một số loại MTBT khác để tính toán, như CANON, SHARP hoặc các MTBT có chức năng tương đương.

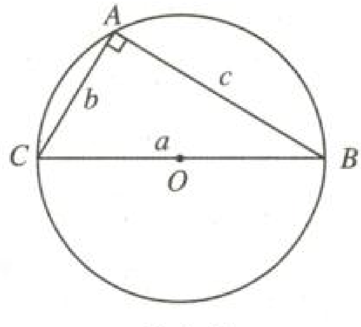
2. Định lí sin trong tam giác

Cho tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ nội tiếp đường tròn $(O ; R)$.

Nếu góc A vuông (h. 47) thì $a = 2R$ và dễ thấy

$$a = 2R\sin A,\ \ b = 2R\sin B,\ c = 2R\sin C. \quad (1)$$

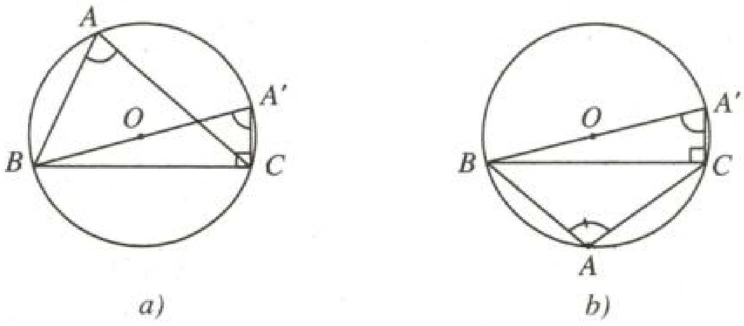
Bây giờ xét trường hợp góc A không vuông. Ta chứng minh các công thức (1) vẫn đúng.



Hình 47

4 *(Để chứng minh các công thức (1))*

Gọi $(O ; R)$ là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, vẽ đường kính BA' của đường tròn. Hãy chứng tỏ $\sin\widehat{BAC} = \sin\widehat{BA'C}$ trong cả hai trường hợp : Góc BAC là góc nhọn (h. 48a), là góc tù (h. 48b). Từ đó hãy kết thúc chứng minh.



Hình 48

Từ đó ta có định lí

> *Với mọi tam giác ABC, ta có*
>
> $$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R,$$
>
> *trong đó R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.*

Ví dụ 3. *Từ hai vị trí A và B của một toà nhà, người ta quan sát đỉnh C của ngọn núi (h. 49). Biết rằng độ cao AB bằng* 70 m, *phương nhìn AC tạo với phương nằm ngang góc* 30°, *phương nhìn BC tạo với phương nằm ngang góc* $15^{\circ}30'$. *Hỏi ngọn núi đó cao bao nhiêu mét so với mặt đất ?*

Giải. (h. 49) Từ giả thiết, ta suy ra tam giác ABC có

$$\widehat{CAB} = 60^{\circ},\ \widehat{ABC} = 105^{\circ}30',\ c = 70.$$

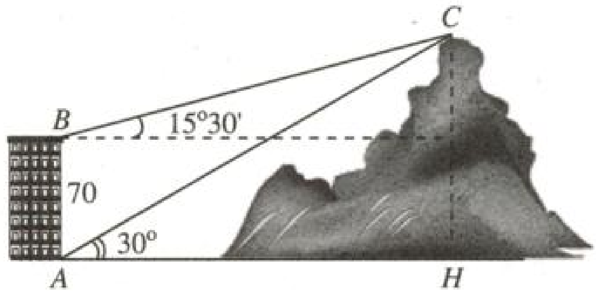
$$\widehat{C} = 180^{\circ} - (\widehat{A} + \widehat{B}) = 180^{\circ} - 165^{\circ}30' = 14^{\circ}30'.$$

Theo định lí sin ta có

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C},$$

hay

$$\frac{b}{\sin 105^{\circ}30'} = \frac{70}{\sin 14^{\circ}30'}.$$



Hình 49

Do đó $AC = b = \dfrac{70.\sin 105^{\circ}30'}{\sin 14^{\circ}30'} \approx 269{,}4$ (m).

Gọi CH là khoảng cách từ C đến mặt đất. Tam giác vuông ACH có cạnh CH đối diện với góc 30° nên

$$CH = \frac{AC}{2} \approx \frac{269,4}{2} = 134,7 \text{ (m)}.$$

Vậy ngọn núi cao khoảng 135 m.

CHÚ Ý

Nếu sử dụng MTBT để tính biểu thức $b = \dfrac{70.\sin 105^{o}30'}{\sin 14^{o}30'}$ thì ta có thể làm như sau

1) Đối với MTBT CASIO *fx*-220 hoặc *fx*-500A thì ấn

70 $\boxed{\times}$ $\boxed{[(...}$ 105 $\boxed{o,,,}$ 30 $\boxed{o,,,}$ $\boxed{\sin}$ $\boxed{...)]}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{[(...}$ 14 $\boxed{o,,,}$ 30 $\boxed{o,,,}$ $\boxed{\sin}$ $\boxed{...)]}$ $\boxed{=}$. Kết quả : $b \approx 269,4$.

2) Đối với MTBT CASIO *fx*-500MS thì ấn

70 $\boxed{\times}$ $\boxed{\sin}$ 105 $\boxed{o,,,}$ 30 $\boxed{o,,,}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{\sin}$ 14 $\boxed{o,,,}$ 30 $\boxed{o,,,}$ $\boxed{=}$.

Kết quả : $b \approx 269,4$.

Ví dụ 4. *Cho tam giác ABC có $a = 4$, $b = 5$, $c = 6$. Chứng minh rằng*

$$\sin A - 2\sin B + \sin C = 0.$$

Giải. Gọi R là bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Từ định lí sin, ta có

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \quad \sin B = \frac{b}{2R}, \quad \sin C = \frac{c}{2R}.$$

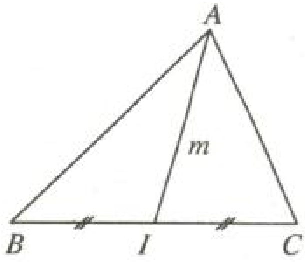
Vậy $\quad \sin A - 2\sin B + \sin C = \dfrac{1}{2R}(a - 2b + c) = \dfrac{1}{2R}(4 - 10 + 6) = 0.$

AL Kashi

Định lí côsin trong tam giác còn được gọi là định lí An Ka-si (AL Kashi) – tên của nhà thiên văn học và toán học Trung Á, một trong những nhà bác học lớn cuối cùng của trường phái Xa-mác-kan (Samarkand) đầu thế kỉ XV.

3. Tổng bình phương hai cạnh và độ dài đường trung tuyến của tam giác

Bài toán 1. Cho ba điểm A, B, C, trong đó $BC = a > 0$. Gọi I là trung điểm của BC, biết $AI = m$ (h. 50). Hãy tính $AB^2 + AC^2$ theo a và m.



Hình 50

?3 *Nếu $m = \dfrac{a}{2}$ thì có thể thấy ngay $AB^2 + AC^2$ bằng bao nhiêu hay không ?*

5 (Để giải Bài toán 1)

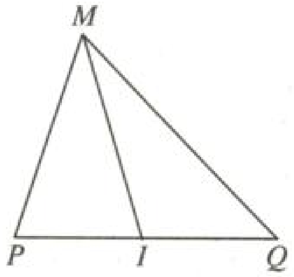
Hãy viết $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB}$, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC}$ rồi tính $\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2$ để đi đến kết quả

$$AB^2 + AC^2 = 2m^2 + \frac{a^2}{2}.$$

Bài toán 2. Cho hai điểm phân biệt P, Q. Tìm tập hợp các điểm M sao cho $MP^2 + MQ^2 = k^2$, trong đó k là số cho trước.

Hướng dẫn. (h. 51) Gọi I là trung điểm của PQ và đặt $PQ = a$. Theo Bài toán 1, ta có

$$MP^2 + MQ^2 = 2MI^2 + \frac{a^2}{2}.$$



Hình 51

Vậy $MP^2 + MQ^2 = k^2$ khi và chỉ khi $2MI^2 + \dfrac{a^2}{2} = k^2$ hay

$$MI^2 = \frac{k^2}{2} - \frac{a^2}{4}. \qquad (*)$$

6

Từ (*) hãy suy ra lời giải của Bài toán 2.

Bài toán 3. Cho tam giác ABC. Gọi m_a, m_b, m_c là độ dài các đường trung tuyến lần lượt ứng với các cạnh $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Chứng minh các công thức sau đây, gọi là ***công thức trung tuyến***

$$m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}\ ; \quad m_b^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4}\ ; \quad m_c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}.$$

Giải. Từ kết quả của Bài toán 1, ta suy ra ngay các công thức cần chứng minh.

4. Diện tích tam giác

Với tam giác ABC, ta kí hiệu h_a, h_b, h_c là độ dài các đường cao lần lượt ứng với các cạnh BC, CA, AB ; R, r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác ; $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ là nửa chu vi tam giác.

Ta có thể tính diện tích S của tam giác ABC bằng các công thức sau đây

$$S = \frac{1}{2}a h_a = \frac{1}{2}b h_b = \frac{1}{2}c h_c \; ; \qquad (1)$$

$$S = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}ac\sin B = \frac{1}{2}bc\sin A \; ; \qquad (2)$$

$$S = \frac{abc}{4R} \; ; \qquad (3)$$

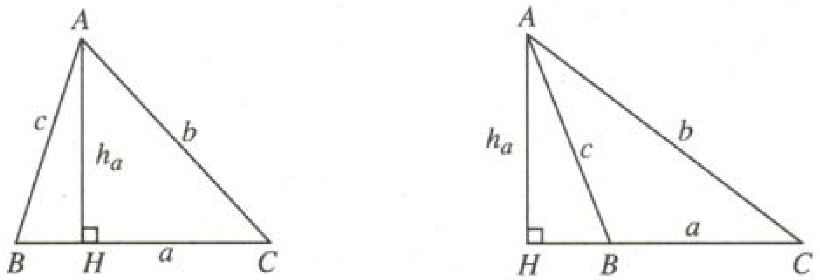
$$S = pr \; ; \qquad (4)$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\,. \qquad (5)$$

(Công thức (5) gọi là ***công thức Hê-rông***).

7 (h. 52)

Hãy tính h_a trong tam giác AHB theo cạnh c và góc B, rồi thay vào công thức $S = \frac{1}{2}ah_a$ để được công thức (2) (chú ý xét cả hai trường hợp H nằm trong, H nằm ngoài đoạn BC).



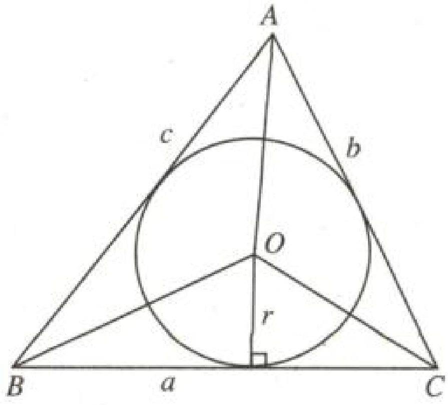
Hình 52

8

Từ công thức (2) và định lí sin, hãy suy ra công thức (3).

9 (h. 53)

Gọi $(O\ ;\ r)$ là đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Để ý rằng S là tổng diện tích các tam giác OBC, OCA, OAB. Hãy áp dụng công thức (1) để suy ra công thức (4).



Hình 53

• *Chứng minh công thức Hê-rông*

Ta có $S = \frac{1}{2}bc\sin A$, suy ra

$$S^2 = \frac{1}{4}b^2c^2(1 - \cos^2 A)$$

$$= \frac{1}{4}b^2c^2\left[1 - \frac{(b^2 + c^2 - a^2)^2}{4b^2c^2}\right]$$

$$= \frac{1}{16}(2bc + b^2 + c^2 - a^2)(2bc - b^2 - c^2 + a^2)$$

$$= \frac{1}{16}\left[(b + c)^2 - a^2)\right]\left[a^2 - (b - c)^2\right]$$

$$= \frac{b + c + a}{2}.\frac{b + c - a}{2}.\frac{a - b + c}{2}.\frac{a + b - c}{2}$$

$$= p(p - a)(p - b)(p - c).$$

Vậy $S = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}.$

• Người ta gọi tam giác có độ dài các cạnh là ba số nguyên liên tiếp và có diện tích bằng một số nguyên là ***tam giác Hê-rông***. Các tam giác có độ dài các cạnh như sau

3 ; 4 ; 5,

13 ; 14 ; 15,

51 ; 52 ; 53,

....

là những tam giác Hê-rông.

10

Hãy tính diện tích của ba tam giác Hê-rông ở trên.

5. Giải tam giác và ứng dụng thực tế

Giải tam giác là tính các cạnh và các góc của tam giác dựa trên một số điều kiện cho trước.

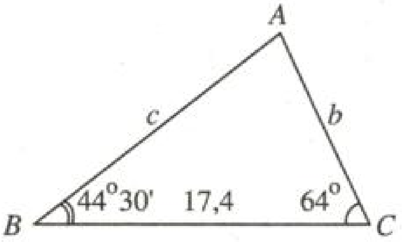
Ví dụ 5. *Cho tam giác ABC. Biết* $a = 17,4$; $\widehat{B} = 44^o30'$; $\widehat{C} = 64^o$. *Tính góc A và các cạnh b, c của tam giác đó.*

Giải. (h. 54)

Ta có

$$\widehat{A} = 180^o - (\widehat{B} + \widehat{C})$$

$$= 180^o - (44^o30' + 64^o) = 71^o30'.$$



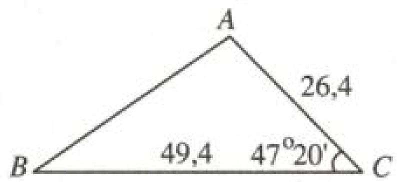
Hình 54

Theo định lí sin ta có

$$b = \frac{a.\sin B}{\sin A} = \frac{17,4.\sin 44^o30'}{\sin 71^o30'} \approx 12,9$$

$$c = \frac{a.\sin C}{\sin A} = \frac{17,4.\sin 64^o}{\sin 71^o30'} \approx 16,5.$$

Ví dụ 6. *Cho tam giác ABC. Biết* $a = 49,4$; $b = 26,4$; $\widehat{C} = 47^o20'$. *Tính hai góc A, B và cạnh c.*



Hình 55

Giải. (h. 55)

Theo định lí côsin ta có

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C = (49,4)^2 + (26,4)^2 - 2.49,4.26,4.\cos 47^o20'$$

$$\approx 1369,58.$$

Vậy $c \approx \sqrt{1369,58} \approx 37,0$.

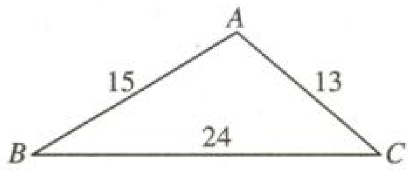
$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \approx \frac{696,96 + 1369,58 - 2440,36}{2.26,4.37} \approx -0,1913.$$

Dùng bảng số hoặc MTBT, tìm được $\widehat{A} \approx 101^o2'$. Từ đó

$$\widehat{B} \approx 180^o - (101^o2' + 47^o20') = 31^o38'.$$

Ví dụ 7. *Cho tam giác ABC. Biết $a = 24$; $b = 13$; $c = 15$. Tính các góc A, B, C.*

Giải. (h. 56)



Hình 56

Theo hệ quả của định lí côsin, ta có

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$= \frac{169 + 225 - 576}{2.13.15} = -\frac{7}{15} \approx -0,4667.$$

Vậy $\widehat{A} \approx 117^{\circ}49'$.

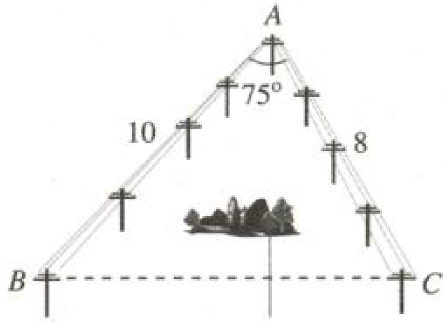
Vì $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B}$ nên

$$\sin B = \frac{b.\sin A}{a} \approx \frac{13.\sin 117^{\circ}49'}{24} = \frac{13.\sin 62^{\circ}11'}{24} \approx 0,4791.$$

Vì cạnh AC ngắn nhất nên góc B nhọn. Suy ra

$$\widehat{B} \approx 28^{\circ}38' ; \widehat{C} \approx 180^{\circ} - (117^{\circ}49' + 28^{\circ}38') = 33^{\circ}33'.$$

Ví dụ 8. *Đường dây cao thế nối thẳng từ vị trí A đến vị trí B dài 10 km, từ vị trí A đến vị trí C dài 8 km, góc tạo bởi hai đường dây trên bằng 75°. Tính khoảng cách từ vị trí B đến vị trí C (h. 57).*



Hình 57

Giải. Áp dụng định lí côsin vào tam giác ABC, ta có

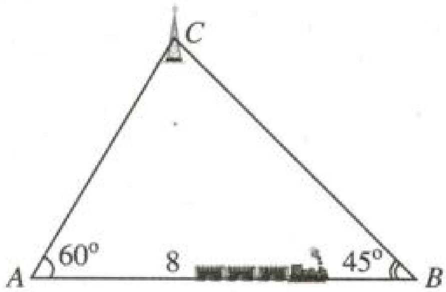
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$$

$$\approx 8^2 + 10^2 - 2.8.10.\cos 75^{\circ} \approx 123.$$

Suy ra $a \approx 11$ (km).

Vậy khoảng cách từ B đến C xấp xỉ 11 km.

Ví dụ 9. *(h. 58) Một người ngồi trên tàu hoả đi từ ga A đến ga B. Khi tàu đỗ ở ga A, qua ống nhòm người đó nhìn thấy một tháp C. Hướng nhìn từ người đó đến tháp tạo với hướng đi của tàu một góc* 60°. *Khi tàu đỗ ở ga B, người đó nhìn lại vẫn thấy tháp C, hướng nhìn từ người đó đến tháp tạo với hướng ngược với hướng đi của tàu một góc* 45°. *Biết rằng đoạn đường tàu nối thẳng ga A với ga B dài* 8 km. *Hỏi khoảng cách từ ga A đến tháp C là bao nhiêu ?*



Hình 58

Giải. Xét tam giác ABC. Ta có

$$\widehat{C} = 180^{\circ} - (60^{\circ} + 45^{\circ}) = 75^{\circ}.$$

Áp dụng định lí sin vào tam giác ABC, ta được $\dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$.

Suy ra $b = 8.\dfrac{\sin 45^{\circ}}{\sin 75^{\circ}} \approx 6$ (km).

Vậy khoảng cách từ ga A đến tháp C xấp xỉ 6 km.

Em có biết ?

GIẢI TAM GIÁC VÀ MÉT MẪU

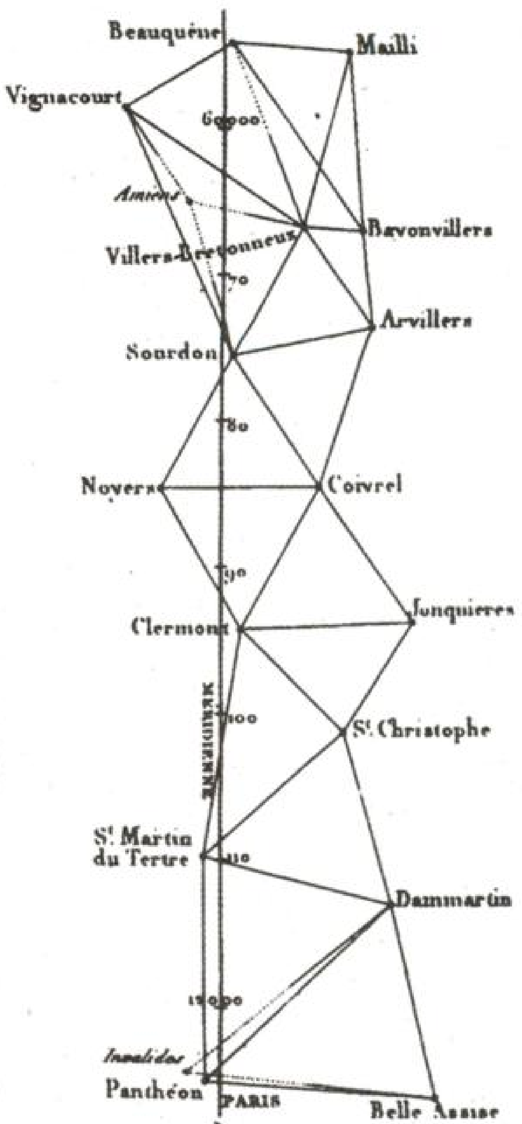
Ngay sau Cách mạng 1789 ở Pháp, người ta quyết định xây dựng một hệ đo lường phổ cập, trong đó có đo độ dài.

Về độ dài, người ta lấy độ dài vòng kinh tuyến của Trái Đất làm cơ sở ("dưới chân mỗi người đều có kinh tuyến"). Người ta coi vòng kinh tuyến Trái Đất dài 40000 km, tức 4×10^7 mét, vậy một mét là $\dfrac{1}{10^7}$ của một phần tư độ dài vòng kinh tuyến. Bằng cách nào có được một mét để làm mẫu ?

Các nhà thiên văn Pi-e Mê-sanh (Pierre Méchain) và Giăng Đờ-lam-brơ (Jean Delambre) được giao nhiệm vụ đo độ dài cung kinh tuyến nối hai thành phố Đơn-kec (Dunkerque ở Bắc Pháp) và Bác-xơ-lo-na (Barcelona, Tây Ban Nha). Các phương pháp thiên văn thời đó đã cho biết hai thành phố đó có cùng kinh độ và có vĩ độ khác nhau 10,8 độ.

Trên mặt đất, việc đo góc dễ hơn đo độ dài nên người ta xét dãy tam giác sắp xếp kề nhau dọc theo kinh tuyến đi qua hai thành phố nói trên (mỗi tam giác có đỉnh là các địa điểm dễ xác định vị trí như đỉnh lâu đài, nóc nhà thờ v.v...). Trong 7 năm lao động kiên nhẫn miệt mài, Mê-sanh, Đờ-lam-brơ dùng khoảng 500000 phép đo để giải hàng trăm tam giác sắp xếp như thế. Sau đó, qua nhiều tháng kiểm nghiệm đo đạc, tính toán bởi một hội đồng gồm nhiều nhà bác học tên tuổi (trong đó có các nhà toán học Pháp La-pla-xơ (Laplace), Lơ-giăng-đrơ (Legendre), La-grăng-giơ (Lagrange) v.v...), kết quả cuối cùng đã được công nhận vào năm 1799 và đã có mẫu một mét bằng bạch kim đặt tại Viện đo lường Pa-ri (Paris) (mẫu một mét "cho mọi thời đại", "cho mọi dân tộc").

Ngày nay, dùng các phương pháp của Vật lí hiện đại, ta có thể xác định đơn vị đo độ dài chính xác hơn nhiều.



Câu hỏi và bài tập

15. Tam giác ABC có $a = 12$, $b = 13$, $c = 15$. Tính $\cos A$ và góc A.

16. Cho tam giác ABC có $AB = 5$, $AC = 8$, $\widehat{A} = 60^{\circ}$. Kết quả nào trong các kết quả sau là độ dài cạnh BC ?

a) $\sqrt{129}$; b) 7 ;

c) 49 ; d) $\sqrt{69}$.

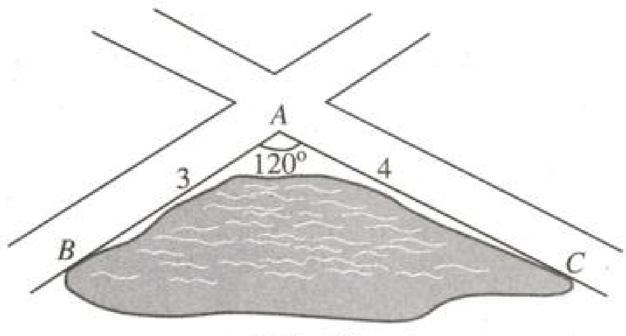
17. Hình 59 vẽ một hồ nước nằm ở góc tạo bởi hai con đường. Bốn bạn An, Cường, Trí, Đức dự đoán khoảng cách từ B đến C như sau

An : 5 km

Cường : 6 km

Trí : 7 km

Đức : 5,5 km.



Hình 59

Biết rằng khoảng cách từ A đến B là 3 km, khoảng cách từ A đến C là 4 km, góc BAC là 120°.

Hỏi dự đoán của bạn nào sát với thực tế nhất ?

18. Cho tam giác ABC. Chứng minh các khẳng định sau

a) Góc A nhọn khi và chỉ khi $a^2 < b^2 + c^2$;

b) Góc A tù khi và chỉ khi $a^2 > b^2 + c^2$;

c) Góc A vuông khi và chỉ khi $a^2 = b^2 + c^2$.

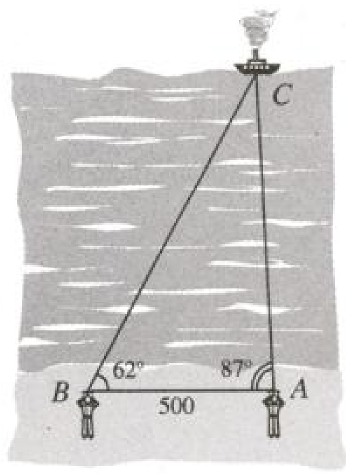
19. Tam giác ABC có $\widehat{A} = 60^{\circ}$, $\widehat{B} = 45^{\circ}$, $b = 4$. Tính hai cạnh a và c.

20. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 60^{\circ}$, $a = 6$. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác.

21. Chứng minh rằng nếu ba góc của tam giác ABC thoả mãn hệ thức $\sin A = 2\sin B.\cos C$ thì ABC là tam giác cân.

22. Hình 60 vẽ một chiếc tàu thuỷ đang neo đậu ở vị trí C trên biển và hai người ở các vị trí quan sát A và B cách nhau 500 m. Họ đo được góc CAB bằng 87° và góc CBA bằng 62°.

Tính các khoảng cách AC và BC.



Hình 60

23. Gọi H là trực tâm của tam giác không vuông ABC. Chứng minh rằng bán kính các đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC, HBC, HCA, HAB bằng nhau.

24. Tam giác ABC có $a = 7$, $b = 8$, $c = 6$. Tính m_a.

25. Tam giác ABC có $a = 5$, $b = 4$, $c = 3$. Lấy điểm D đối xứng với B qua C. Tính độ dài AD.

26. Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB = 4$, $BC = 5$, $BD = 7$. Tính AC.

27. Chứng minh rằng trong một hình bình hành, tổng bình phương các cạnh bằng tổng bình phương của hai đường chéo.

28. Chứng minh rằng tam giác ABC vuông ở A khi và chỉ khi $5m_a^2 = m_b^2 + m_c^2$.

29. Tam giác ABC có $b = 6{,}12$; $c = 5{,}35$; $\widehat{A} = 84^{\circ}$. Tính diện tích tam giác đó.

30. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC và BD. Chứng minh rằng

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4MN^2.$$

31. Gọi S là diện tích và R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng

$$S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C.$$

32. Chứng minh rằng diện tích của một tứ giác bằng nửa tích hai đường chéo và sin của góc hợp bởi hai đường chéo đó.

33. Giải tam giác ABC, biết

a) $c = 14$, $\widehat{A} = 60^{\circ}$, $\widehat{B} = 40^{\circ}$;

b) $b = 4{,}5$, $\widehat{A} = 30^{\circ}$, $\widehat{C} = 75^{\circ}$;

c) $c = 35$, $\widehat{A} = 40^{\circ}$, $\widehat{C} = 120^{\circ}$;

d) $a = 137{,}5$, $\widehat{B} = 83^{\circ}$, $\widehat{C} = 57^{\circ}$.

34. Giải tam giác ABC, biết

a) $a = 6{,}3$, $b = 6{,}3$, $\widehat{C} = 54^{\circ}$;

b) $b = 32$, $c = 45$, $\widehat{A} = 87^{\circ}$;

c) $a = 7$, $b = 23$, $\widehat{C} = 130^{\circ}$.

35. Giải tam giác ABC, biết

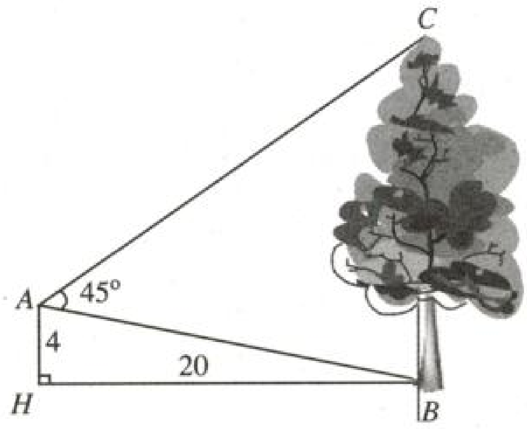
a) $a = 14$, $b = 18$, $c = 20$;

b) $a = 6$, $b = 7{,}3$, $c = 4{,}8$;

c) $a = 4$, $b = 5$, $c = 7$.

36. Biết hai lực cùng tác dụng vào một vật và tạo với nhau góc 40°. Cường độ của hai lực đó là 3N và 4N. Tính cường độ của lực tổng hợp.

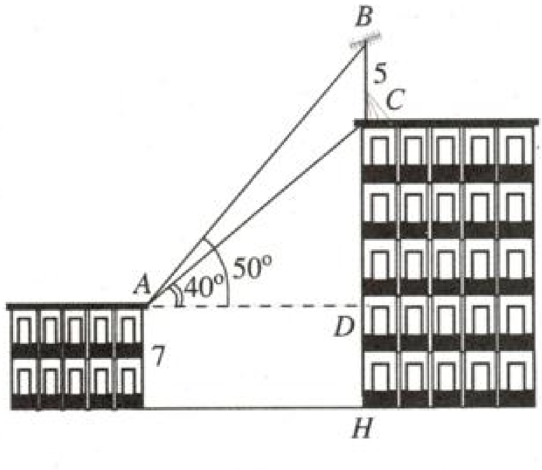
37. Từ vị trí A người ta quan sát một cây cao (h. 61).



Hình 61

Biết $AH = 4$ m, $HB = 20$ m, $\widehat{BAC} = 45^o$. Tính chiều cao của cây.

38. Trên nóc một toà nhà có một cột ăng-ten cao 5 m. Từ vị trí quan sát A cao 7 m so với mặt đất, có thể nhìn thấy đỉnh B và chân C của cột ăng-ten dưới góc 50^o và 40^o so với phương nằm ngang. Tính chiều cao của toà nhà (h. 62).



Hình 62