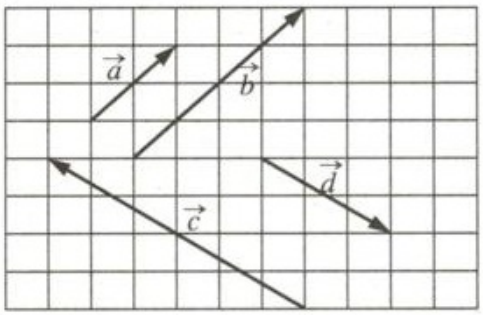
§4 TÍCH CỦA MỘT VECTƠ VỚI MỘT SỐ

Ta đã biết thế nào là tổng của hai vectơ. Bây giờ nếu ta lấy vectơ $\vec{a}$ cộng với chính nó thì ta có thể nói kết quả là hai lần vectơ $\vec{a}$, viết là $2\vec{a}$, và gọi là tích của số 2 với vectơ $\vec{a}$, hay là tích của $\vec{a}$ với 2.

Trong mục này ta sẽ nói đến tích của một vectơ với một số thực bất kì.

1. Định nghĩa tích của một vectơ với một số

Xét các vectơ trên hình 20. Ta hãy chú ý đến hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Hai vectơ đó có cùng hướng, và độ dài vectơ $\vec{b}$ bằng hai lần độ dài vectơ $\vec{a}$, tức là $|\vec{b}| = 2|\vec{a}|$. Trong trường hợp đó ta viết $\vec{b} = 2\vec{a}$ và nói rằng : *Vectơ $\vec{b}$ bằng 2 nhân với vectơ $\vec{a}$ (hoặc bằng vectơ $\vec{a}$ nhân với 2), hoặc vectơ $\vec{b}$ là tích của vectơ $\vec{a}$ với số 2.*



Hình 20

Lại chú ý đến hai vectơ $\vec{c}$ và $\vec{d}$. Hai vectơ này ngược hướng, và $|\vec{c}| = 2|\vec{d}|$. Khi đó ta viết $\vec{c} = (-2)\vec{d}$ và nói rằng : *Vectơ $\vec{c}$ bằng -2 nhân với vectơ $\vec{d}$ (hoặc bằng vectơ $\vec{d}$ nhân với -2), hoặc vectơ $\vec{c}$ là tích của vectơ $\vec{d}$ với -2.*

1

Vẽ hình bình hành $ABCD$.

a) Xác định điểm E sao cho $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{BC}$.

b) Xác định điểm F sao cho $\overrightarrow{AF} = \left(-\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{CA}$.

ĐỊNH NGHĨA

Tích của vectơ $\vec{a}$ với số thực k là một vectơ, kí hiệu là $k\vec{a}$, được xác định như sau

1) Nếu $k \geq 0$ thì vectơ $k\vec{a}$ cùng hướng với vectơ $\vec{a}$;

Nếu $k < 0$ thì vectơ $k\vec{a}$ ngược hướng với vectơ $\vec{a}$;

2) Độ dài vectơ $k\vec{a}$ bằng $|k|.|\vec{a}|$.

Phép lấy tích của một vectơ với một số gọi là ***phép nhân vectơ với số*** *(hoặc phép nhân số với vectơ).*

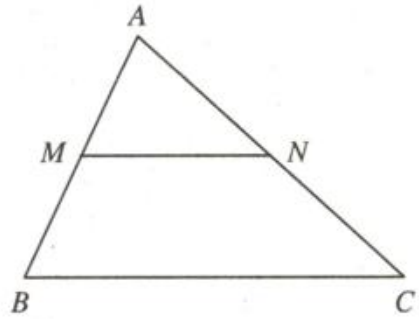
Nhận xét. Từ định nghĩa ta thấy ngay $1\vec{a} = \vec{a}$, $(-1)\vec{a}$ là vectơ đối của $\vec{a}$, tức là $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$.

Ví dụ. Trên hình 21, ta có tam giác ABC với M và N lần lượt là trung điểm hai cạnh AB và AC. Khi đó ta có

a) $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{MN}$; $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$;

b) $\overrightarrow{BC} = (-2)\overrightarrow{NM}$; $\overrightarrow{MN} = \left(-\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{CB}$;

c) $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{MB}$; $\overrightarrow{AN} = \left(-\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{CA}$.



Hình 21

2. Các tính chất của phép nhân vectơ với số

Dựa vào định nghĩa phép nhân vectơ với số ta có thể chứng minh các tính chất sau đây

Với hai vectơ bất kì $\vec{a}$, $\vec{b}$ và mọi số thực k, l, ta có

1) $k(l\vec{a}) = (kl)\vec{a}$;

2) $(k + l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}$;

3) $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$; $k(\vec{a} - \vec{b}) = k\vec{a} - k\vec{b}$;

4) $k\vec{a} = \vec{0}$ khi và chỉ khi $k = 0$ hoặc $\vec{a} = \vec{0}$.

2 *(Để kiểm chứng tính chất 3 với $k = 3$)*

a) Vẽ tam giác ABC với giả thiết $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ và $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$.

b) Xác định điểm A' sao cho $\overrightarrow{A'B} = 3\vec{a}$ và điểm C' sao cho $\overrightarrow{BC'} = 3\vec{b}$.

c) Có nhận xét gì về hai vectơ $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{A'C'}$?

d) Hãy kết thúc việc chứng minh tính chất 3 bằng cách dùng quy tắc ba điểm.

CHÚ Ý

1) Do tính chất 1, ta có $(-k)\vec{a} = (-1.k)\vec{a} = (-1)(k\vec{a}) = -(k\vec{a})$. Bởi vậy cả hai vectơ $(-k)\vec{a}$ và $-(k\vec{a})$ đều có thể viết đơn giản là $-k\vec{a}$.

2) Vectơ $\frac{m}{n}\vec{a}$ có thể viết là $\frac{m\vec{a}}{n}$. Chẳng hạn $\frac{1}{3}\vec{a}$ có thể viết là $\frac{\vec{a}}{3}$.

Bài toán 1. *Chứng minh rằng điểm I là trung điểm của đoạn thẳng AB khi và chỉ khi với điểm M bất kì, ta có* $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$.

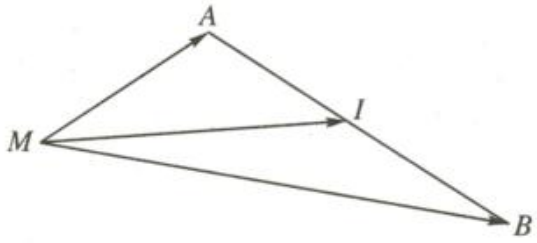
Giải. (h. 22) Với điểm M bất kì, ta có

$$\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA},$$

$$\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}.$$

Như vậy

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}.$$



Hình 22

Ta biết rằng I là trung điểm của AB khi và chỉ khi $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

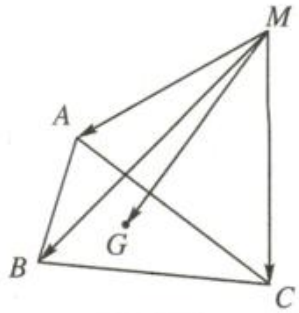
Bài toán 2. *Cho tam giác ABC với trọng tâm G. Chứng minh rằng với điểm M bất kì, ta có*

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}.$$

3 *(Để giải Bài toán 2)* (h. 23)

a) Tương tự Bài toán 1, hãy biểu thị các vectơ $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$ và $\overrightarrow{MC}$ qua vectơ $\overrightarrow{MG}$ và từng vectơ $\overrightarrow{GA}$, $\overrightarrow{GB}$, $\overrightarrow{GC}$.

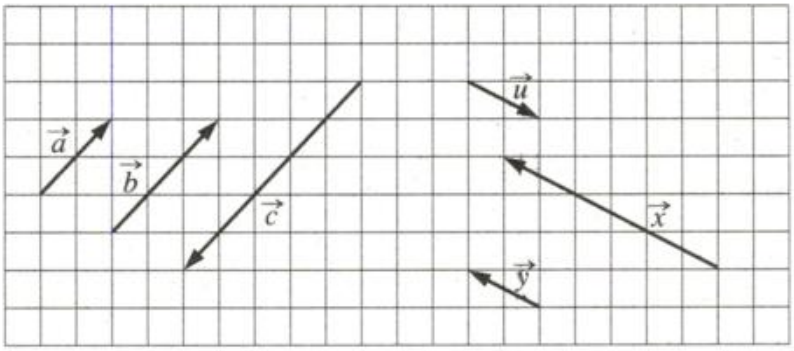
b) Tính tổng $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$. Với chú ý rằng G là trọng tâm tam giác ABC, hãy suy ra điều phải chứng minh.



Hình 23

3. Điều kiện để hai vectơ cùng phương

Ta đã biết rằng nếu $\vec{b} = k\vec{a}$ thì hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương. Điều ngược lại có đúng hay không ?



Hình 24

?1 *Xem hình 24. Hãy tìm các số k, m, n, p, q sao cho* $\vec{b} = k\vec{a}$; $\vec{c} = m\vec{a}$; $\vec{b} = n\vec{c}$; $\vec{x} = p\vec{u}$; $\vec{y} = q\vec{u}$.

Một cách tổng quát ta có

> *Vectơ $\vec{b}$ cùng phương với vectơ $\vec{a}$ ($\vec{a} \neq \vec{0}$) khi và chỉ khi có số k sao cho $\vec{b} = k\vec{a}$.*

?2 *Trong phát biểu ở trên, tại sao phải có điều kiện $\vec{a} \neq \vec{0}$?*

Điều kiện để ba điểm thẳng hàng

> *Điều kiện cần và đủ để ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng là có số k sao cho $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.*

Chứng minh. Ba điểm A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng phương. Bởi vậy theo trên ta phải có $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.

Bài toán 3. *Cho tam giác ABC có trực tâm H, trọng tâm G và tâm đường tròn ngoại tiếp O.*

a) Gọi I là trung điểm của BC. Chứng minh $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OI}$.

b) Chứng minh $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

c) Chứng minh ba điểm O, G, H thẳng hàng.

Giải (h. 25)

a) Dễ thấy $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OI}$ nếu tam giác ABC vuông.

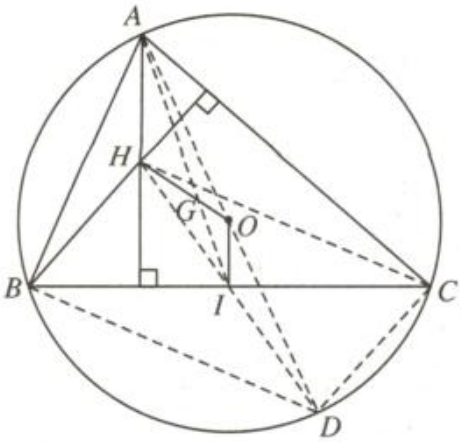
Nếu tam giác ABC không vuông, gọi D là điểm đối xứng của A qua O. Khi đó

$BH \parallel DC$ (vì cùng vuông góc với AC),

$BD \parallel CH$ (vì cùng vuông góc với AB).

Suy ra $BDCH$ là hình bình hành, do đó I là trung điểm của HD. Từ đó

$$\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OI}.$$



Hình 25

b) Ta có

$$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{AH}$$

nên

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OH}.$$

c) Ta đã biết $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}$. Vậy $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$.

Suy ra ba điểm O, G, H thẳng hàng.

Đường thẳng đi qua ba điểm này gọi là ***đường thẳng Ơ-le*** của tam giác ABC.

4. Biểu thị một vectơ qua hai vectơ không cùng phương

Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Nếu vectơ $\vec{c}$ có thể viết dưới dạng $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$, với m và n là hai số thực nào đó, thì ta nói rằng : ***Vectơ $\vec{c}$ biểu thị được qua hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.***

Một câu hỏi đặt ra là : *Nếu đã cho hai vectơ không cùng phương $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thì phải chăng mọi vectơ đều có thể biểu thị được qua hai vectơ đó ?*

Ta có định lí sau đây .

ĐỊNH LÍ

Cho hai vectơ không cùng phương $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Khi đó mọi vectơ $\vec{x}$ đều có thể biểu thị được một cách duy nhất qua hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, nghĩa là có duy nhất cặp số m và n sao cho $\vec{x} = m\vec{a} + n\vec{b}$.

Chứng minh

Từ một điểm O nào đó, ta vẽ các vectơ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OX} = \vec{x}$ (h. 26).

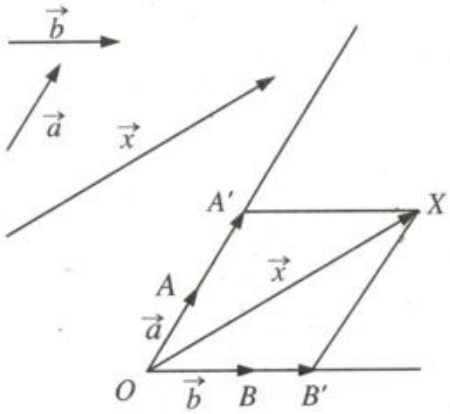
Nếu điểm X nằm trên đường thẳng OA thì ta có số m sao cho $\overrightarrow{OX} = m\overrightarrow{OA}$.

Vậy ta có

$$\vec{x} = m\vec{a} + 0\vec{b} \text{ (lúc này } n = 0).$$

Tương tự, nếu điểm X nằm trên đường thẳng OB thì ta có

$$\vec{x} = 0\vec{a} + n\vec{b} \text{ (lúc này } m = 0).$$



Hình 26

Nếu điểm X không nằm trên OA và OB thì ta có thể lấy điểm A' trên OA và điểm B' trên OB sao cho $OA'XB'$ là hình bình hành. Khi đó ta có $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'}$, và do đó có các số m, n sao cho $\overrightarrow{OX} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB}$, hay

$$\vec{x} = m\vec{a} + n\vec{b}.$$

Bây giờ nếu còn có hai số m' và n' sao cho $\vec{x} = m\vec{a} + n\vec{b} = m'\vec{a} + n'\vec{b}$, thì $(m - m')\vec{a} = (n' - n)\vec{b}$.

Khi đó, nếu $m \neq m'$ thì $\vec{a} = \dfrac{n' - n}{m - m'}\vec{b}$, tức là hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương, trái với giả thiết, vậy $m = m'$. Chứng minh tương tự ta cũng có $n = n'$.

Câu hỏi và bài tập

21. Cho tam giác vuông cân OAB với $OA = OB = a$. Hãy dựng các vectơ sau đây và tính độ dài của chúng

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}; \qquad \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}; \qquad 3\overrightarrow{OA} + 4\overrightarrow{OB};$$

$$\frac{21}{4}\overrightarrow{OA} + 2{,}5\overrightarrow{OB}; \qquad \frac{11}{4}\overrightarrow{OA} - \frac{3}{7}\overrightarrow{OB}.$$

22. Cho tam giác OAB. Gọi M, N lần lượt là trung điểm hai cạnh OA và OB. Hãy tìm các số m và n thích hợp trong mỗi đẳng thức sau đây

$$\overrightarrow{OM} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB}; \qquad \overrightarrow{MN} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB};$$

$$\overrightarrow{AN} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB}; \qquad \overrightarrow{MB} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB}.$$

23. Gọi M và N lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng AB và CD. Chứng minh rằng

$$2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}.$$

24. Cho tam giác ABC và điểm G. Chứng minh rằng

a) Nếu $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ thì G là trọng tâm tam giác ABC ;

b) Nếu có điểm O sao cho $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$ thì G là trọng tâm tam giác ABC.

25. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Đặt $\vec{a} = \overrightarrow{GA}$ và $\vec{b} = \overrightarrow{GB}$. Hãy biểu thị mỗi vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{GC}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ qua các vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

26. Chứng minh rằng nếu G và G' lần lượt là trọng tâm tam giác ABC và tam giác $A'B'C'$ thì

$$3\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'}.$$

Từ đó hãy suy ra điều kiện cần và đủ để hai tam giác ABC và $A'B'C'$ có trọng tâm trùng nhau.

27. Cho lục giác $ABCDEF$. Gọi P, Q, R, S, T, U lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CD, DE, EF, FA. Chứng minh rằng hai tam giác PRT và QSU có trọng tâm trùng nhau.

28. Cho tứ giác $ABCD$. Chứng minh rằng

a) Có một điểm G duy nhất sao cho $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$. Điểm G như thế gọi là *trọng tâm của bốn điểm A, B, C, D*. Tuy nhiên, người ta vẫn quen gọi G là *trọng tâm của tứ giác ABCD*.

b) Trọng tâm G là trung điểm của mỗi đoạn thẳng nối các trung điểm hai cạnh đối của tứ giác, nó cũng là trung điểm của đoạn thẳng nối trung điểm hai đường chéo của tứ giác.

c) Trọng tâm G nằm trên các đoạn thẳng nối một đỉnh của tứ giác và trọng tâm của tam giác tạo bởi ba đỉnh còn lại.