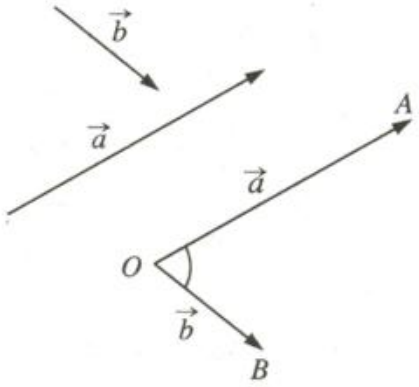
§2 TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ

1. Góc giữa hai vectơ

Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác vectơ $\vec{0}$.

Từ một điểm O nào đó, ta vẽ các vectơ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ và $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ (h. 35). Khi đó

> *Số đo của góc AOB được gọi là số đo của góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, hoặc đơn giản là* ***góc giữa hai vectơ*** *$\vec{a}$ và $\vec{b}$.*



Hình 35

Trong trường hợp có ít nhất một trong hai vectơ $\vec{a}$ hoặc $\vec{b}$ là vectơ $\vec{0}$ thì ta xem góc giữa hai vectơ đó là tuỳ ý (từ 0° đến 180°).

Rõ ràng cách xác định góc giữa hai vectơ không phụ thuộc vào việc chọn điểm O ; cho nên *góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được kí hiệu là $(\vec{a}, \vec{b})$.*

> *Nếu $(\vec{a}, \vec{b}) = 90^o$ thì ta nói rằng hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$* ***vuông góc với nhau****, kí hiệu là $\vec{a} \perp \vec{b}$.*

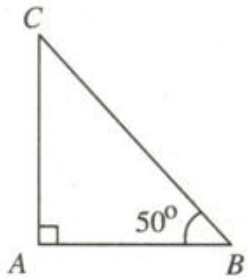
?1 *Khi nào góc giữa hai vectơ bằng 0° ? Bằng 180° ?*

1 Cho tam giác ABC vuông tại A và có $\widehat{B} = 50^o$ (h. 36). Tính các góc

$(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$; $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$;

$(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$; $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC})$;

$(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB})$; $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA})$.

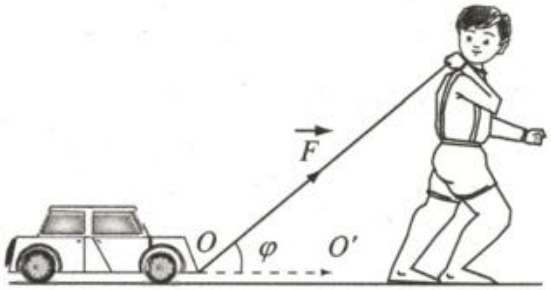


Hình 36

2. Định nghĩa tích vô hướng của hai vectơ

Trong Vật lí, ta có khái niệm "*công sinh bởi một lực*".

Giả sử một lực không đổi $\vec{F}$ tác dụng lên một vật làm cho vật đó di chuyển từ điểm O đến điểm O' (h. 37).



Hình 37

Khi đó lực $\vec{F}$ đã sinh ra một công A tính theo công thức

$$A = |\vec{F}|.|\overrightarrow{OO'}|\cos\varphi,$$

trong đó $|\vec{F}|$ là cường độ của lực $\vec{F}$ tính bằng Niutơn (kí hiệu là N), $|\overrightarrow{OO'}|$ là độ dài vectơ $\overrightarrow{OO'}$ tính bằng mét (kí hiệu là m), φ là góc giữa hai vectơ $\vec{F}$ và $\overrightarrow{OO'}$. Công A được tính bằng Jun (kí hiệu là J). Như vậy J = N. m.

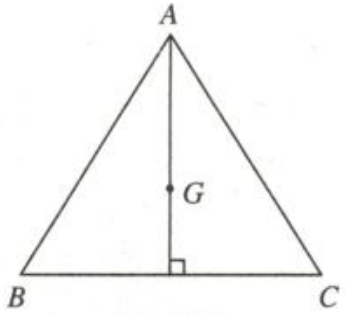
Trong Toán học, giá trị A trong biểu thức trên (không kể đơn vị đo) được gọi là *tích vô hướng* của hai vectơ $\vec{F}$ và $\overrightarrow{OO'}$.

> ***Tích vô hướng của hai vectơ*** *$\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số, kí hiệu là $\vec{a}.\vec{b}$, được xác định bởi*
>
> $$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|\cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right).$$

Ví dụ 1. *Cho tam giác đều ABC có cạnh a và trọng tâm G (h. 38). Tính các tích vô hướng sau đây*

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\ ;\quad \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}\ ;\quad \overrightarrow{AG}.\overrightarrow{AB}\ ;$$

$$\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC}\ ;\quad \overrightarrow{BG}.\overrightarrow{GA}\ ;\quad \overrightarrow{GA}.\overrightarrow{BC}.$$



Hình 38

Giải. Theo định nghĩa, ta có

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = a.a.\cos 60^{\circ} = \frac{1}{2}a^2\ ;$$

$$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB} = a.a.\cos 120^{\circ} = -\frac{1}{2}a^2\ ;$$

$$\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{AB} = a\frac{\sqrt{3}}{3}.a.\cos 30^{\circ} = a^2\frac{\sqrt{3}}{3}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}a^2\ ;$$

$$\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC} = a\frac{\sqrt{3}}{3}.a\frac{\sqrt{3}}{3}\cos 120^o = -\frac{a^2}{6};$$

$$\overrightarrow{BG}.\overrightarrow{GA} = a\frac{\sqrt{3}}{3}.a\frac{\sqrt{3}}{3}\cos 60^o = \frac{a^2}{6};$$

$$\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{BC} = a\frac{\sqrt{3}}{3}.a.\cos 90^o = 0.$$

?2 *Trong trường hợp nào thì tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng 0 ?*

Bình phương vô hướng

Với vectơ $\vec{a}$ tuỳ ý, tích vô hướng $\vec{a}.\vec{a}$ được kí hiệu là $(\vec{a})^2$ hay đơn giản hơn là $\vec{a}^2$ và gọi là ***bình phương vô hướng*** của vectơ $\vec{a}$.

Từ định nghĩa của tích vô hướng ta có

$$\vec{a}^2 = |\vec{a}|.|\vec{a}|.\cos 0^o = |\vec{a}|^2.$$

Vậy

Bình phương vô hướng của một vectơ bằng bình phương độ dài của vectơ đó.

Héc-man Grat-xơ-man (Hermann Grassmann 1808 - 1877), nhà toán học Đức, là cha đẻ của tích vô hướng của hai vectơ mà ông đã kí hiệu là $\vec{u} \frown \vec{v}$. Chính việc nghiên cứu thuỷ triều dẫn ông đến các khảo sát về vectơ.

3. Tính chất của tích vô hướng

?3 *Với hai số thực a và b, ta có ab = ba. Vậy với hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, ta có tính chất tương tự hay không ?*

ĐỊNH LÍ

Với ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ tuỳ ý và mọi số thực k, ta có

1) $\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}$ *(tính chất giao hoán) ;*

2) $\vec{a}.\vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$;

3) $(k\vec{a}).\vec{b} = \vec{a}.(k\vec{b}) = k(\vec{a}.\vec{b})$;

4) $\vec{a}.(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c}$ *(tính chất phân phối đối với phép cộng) ;*

$\vec{a}.(\vec{b} - \vec{c}) = \vec{a}.\vec{b} - \vec{a}.\vec{c}$ *(tính chất phân phối đối với phép trừ).*

Ta có thể dễ dàng chứng minh được các tính chất 1, 2, 3. Tính chất 4 được thừa nhận, không chứng minh.

Dùng các tính chất của tích vô hướng, ta có thể chứng minh các hệ thức sau

$$(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2\vec{a}.\vec{b} \; ; \qquad (1)$$

$$(\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2\vec{a}.\vec{b} \; ; \qquad (2)$$

$$(\vec{a} + \vec{b}).(\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2 = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 . \qquad (3)$$

Sau đây ta chứng minh hệ thức 3. Theo tính chất phân phối, ta có

$$(\vec{a} + \vec{b}).(\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}.(\vec{a} - \vec{b}) + \vec{b}.(\vec{a} - \vec{b})$$
$$= \vec{a}^2 - \vec{a}.\vec{b} + \vec{b}.\vec{a} - \vec{b}^2 = \vec{a}^2 - \vec{b}^2 = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 .$$

2
Hãy chứng minh các hệ thức (1) và (2).

?4 *Ta biết rằng với hai số thực bất kì a và b, luôn có* $(ab)^2 = a^2b^2$. *Vậy với hai vectơ bất kì* $\vec{a}$ *và* $\vec{b}$, *đẳng thức* $(\vec{a}.\vec{b})^2 = \vec{a}^2.\vec{b}^2$ *có đúng không ? Viết thế nào mới đúng ?*

Bài toán 1. *Cho tứ giác ABCD.*

a) Chứng minh rằng

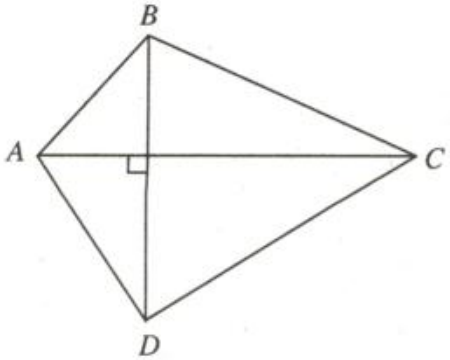
$$AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2 + 2\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BD}.$$

b) Từ câu a), hãy chứng minh rằng : Điều kiện cần và đủ để tứ giác có hai đường chéo vuông góc là tổng bình phương các cặp cạnh đối diện bằng nhau.

Giải. (h. 39)

a) Ta có

$$AB^2 + CD^2 - BC^2 - AD^2$$
$$= (\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA})^2 + CD^2 - CB^2 - (\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CA})^2$$
$$= -2\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CA}$$
$$= 2\overrightarrow{CA}.(\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB}) = 2\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BD}.$$



Hình 39

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

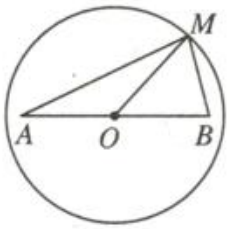
b) Từ a) ta có ngay :

$$CA \perp BD \Leftrightarrow \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BD} = 0 \Leftrightarrow AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2.$$

Bài toán 2. *Cho đoạn thẳng AB có độ dài 2a và số k^2. Tìm tập hợp các điểm M sao cho $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = k^2$.*

Giải. (h. 40) Gọi O là trung điểm đoạn thẳng AB, ta có

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}).(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB})$$
$$= (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}).(\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{OA})$$
$$= \overrightarrow{MO}^2 - \overrightarrow{OA}^2$$
$$= MO^2 - OA^2 = MO^2 - a^2.$$



Hình 40

Do đó

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = k^2 \Leftrightarrow MO^2 - a^2 = k^2 \Leftrightarrow MO^2 = k^2 + a^2.$$

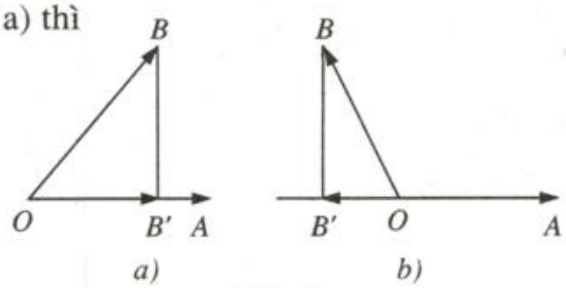
Vậy tập hợp các điểm M là đường tròn tâm O, bán kính $R = \sqrt{k^2 + a^2}$.

Bài toán 3. *Cho hai vectơ $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$. Gọi B' là hình chiếu của B trên đường thẳng OA. Chứng minh rằng*

$$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB'}.$$

Chứng minh. Nếu $\widehat{AOB} < 90^o$ (h. 41a) thì

$$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = OA.OB.\cos\widehat{AOB}$$
$$= OA.OB'$$
$$= OA.OB'.\cos 0^o$$
$$= \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB'}.$$



Hình 41

Còn nếu $\widehat{AOB} \geq 90^o$ (h. 41b) thì

$$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = OA.OB.\cos\widehat{AOB} = -OA.OB.\cos\widehat{B'OB}$$
$$= -OA.OB' = OA.OB'.\cos 180^o = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB'}.$$

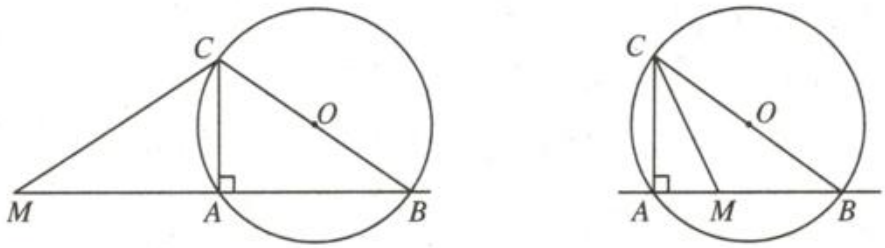
> *Vectơ $\overrightarrow{OB'}$ gọi là **hình chiếu** của vectơ $\overrightarrow{OB}$ trên đường thẳng OA.*
>
> *Công thức $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB'}$ gọi là **công thức hình chiếu**.*

3
Hãy phát biểu bằng lời kết luận của Bài toán 3.

Bài toán 4. *Cho đường tròn (O ; R) và điểm M cố định. Một đường thẳng Δ thay đổi, luôn đi qua M, cắt đường tròn đó tại hai điểm A và B. Chứng minh rằng*

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MO^2 - R^2.$$

Chứng minh. (h. 42) Vẽ đường kính *BC* của đường tròn (*O* ; *R*). Ta có $\overrightarrow{MA}$ là hình chiếu của $\overrightarrow{MC}$ trên đường thẳng *MB*. Theo công thức hình chiếu, ta có



Hình 42

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC}).(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB})$$
$$= (\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{OB}).(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB}) = \overrightarrow{MO}^2 - \overrightarrow{OB}^2$$
$$= d^2 - R^2 \text{ (với } d = MO).$$

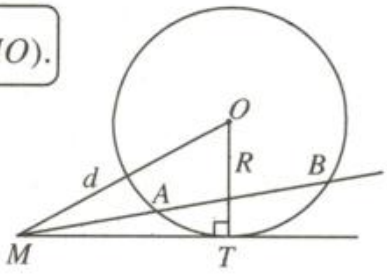
CHÚ Ý

1) Giá trị không đổi $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = d^2 - R^2$ nói trong Bài toán 4 gọi là ***phương tích*** của điểm M đối với đường tròn (O) và kí hiệu là $\mathscr{P}_{M/(O)}$

$$\boxed{\mathscr{P}_{M/(O)} = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = d^2 - R^2 \ (d = MO).}$$

2) (h. 43) Khi điểm M nằm ngoài đường tròn (O), MT là tiếp tuyến của đường tròn đó (T là tiếp điểm), thì

$$\mathscr{P}_{M/(O)} = \overrightarrow{MT}^2 = MT^2.$$



Hình 43

4. Biểu thức toạ độ của tích vô hướng

4

Trong hệ toạ độ $(O\,;\,\vec{i}, \vec{j})$, cho $\vec{a} = (x\,;\,y)$ và $\vec{b} = (x'\,;\,y')$. Tính

a) $\vec{i}^2$, $\vec{j}^2$, $\vec{i}.\vec{j}$; b) $\vec{a}.\vec{b}$; c) $\vec{a}^2$; d) $\cos(\vec{a}, \vec{b})$.

Các hệ thức quan trọng

Cho hai vectơ $\vec{a} = (x\,;\,y)$ và $\vec{b} = (x'\,;\,y')$. Khi đó

1) $\vec{a}.\vec{b} = xx' + yy'$;

2) $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$;

3) $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{xx' + yy'}{\sqrt{x^2 + y^2}\sqrt{x'^2 + y'^2}} \quad (\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0})$.

Đặc biệt : $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow xx' + yy' = 0$.

5

Cho hai vectơ $\vec{a} = (1\,;\,2)$ và $\vec{b} = (-1\,;\,m)$.

a) Tìm m để $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc với nhau.

b) Tìm độ dài của $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Tìm m để $|\vec{a}| = |\vec{b}|$.

HỆ QUẢ

Trong mặt phẳng toạ độ, khoảng cách giữa hai điểm $M(x_M ; y_M)$ và $N(x_N ; y_N)$ là

$$\boxed{MN = |\overrightarrow{MN}| = \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2}\,.}$$

Ví dụ 2. *Trong mặt phẳng toạ độ, cho hai điểm $M(-2 ; 2)$ và $N(4 ; 1)$.*

a) Tìm trên trục Ox điểm P cách đều hai điểm M, N.

b) Tính côsin của góc MON.

Giải

a) Vì P thuộc trục Ox nên P có toạ độ $(p ; 0)$. Khi đó

$$MP = NP \Leftrightarrow MP^2 = NP^2 \Leftrightarrow (p+2)^2 + 2^2 = (p-4)^2 + 1^2.$$

Từ đó ta được phương trình $12p = 9$, suy ra $p = \frac{3}{4}$. Vậy $P = \left(\frac{3}{4} ; 0\right)$.

b) Ta có $\overrightarrow{OM} = (-2 ; 2)$ và $\overrightarrow{ON} = (4 ; 1)$. Vậy

$$\cos\widehat{MON} = \cos(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}) = \frac{-2.4 + 2.1}{\sqrt{8}.\sqrt{17}} = -\frac{3}{\sqrt{34}}.$$

Câu hỏi và bài tập

4. Trong trường hợp nào tích vô hướng $\vec{a}.\vec{b}$ có giá trị dương, có giá trị âm, bằng 0 ?

5. Cho tam giác ABC. Tổng $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB})$ có thể nhận giá trị nào trong các giá trị sau : 90° ; 180° ; 270° ; 360° ?

6. Cho tam giác ABC vuông ở A và $\widehat{B} = 30^\circ$. Tính giá trị của các biểu thức sau

a) $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) + \sin(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) + \tan\frac{(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB})}{2}$;

b) $\sin(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + \cos(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) + \cos(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BA})$.

7. Cho bốn điểm bất kì A, B, C, D. Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{AB} = 0.$$

Từ đó suy ra một cách chứng minh định lí : "*Ba đường cao của một tam giác đồng quy*".

8. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để tam giác ABC vuông tại A là

$$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = AB^2.$$

9. Cho tam giác ABC với ba đường trung tuyến AD, BE, CF. Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CF} = 0.$$

10. Cho hai điểm M, N nằm trên đường tròn đường kính $AB = 2R$. Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng AM và BN.

a) Chứng minh rằng $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AI}$; $\overrightarrow{BN}.\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BI}$.

b) Tính $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BN}.\overrightarrow{BI}$ theo R.

11. Cho hai đường thẳng a và b cắt nhau tại M. Trên a có hai điểm A và B, trên b có hai điểm C và D đều khác M sao cho $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}$. Chứng minh rằng bốn điểm A, B, C, D cùng nằm trên một đường tròn.

12. Cho đoạn thẳng AB cố định, $AB = 2a$ và một số k^2. Tìm tập hợp các điểm M sao cho $MA^2 - MB^2 = k^2$.

13. Trong mặt phẳng toạ độ, cho $\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{i} - 5\vec{j}$ và $\vec{v} = k\vec{i} - 4\vec{j}$.

a) Tìm các giá trị của k để $\vec{u} \perp \vec{v}$;

b) Tìm các giá trị của k để $|\vec{u}| = |\vec{v}|$.

14. Trong mặt phẳng toạ độ, cho tam giác ABC có các đỉnh $A(-4 ; 1)$, $B(2 ; 4)$, $C(2 ; -2)$.

a) Tính chu vi và diện tích của tam giác đó.

b) Tìm toạ độ của trọng tâm G, trực tâm H và tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Từ đó hãy kiểm tra tính chất thẳng hàng của ba điểm I, G, H.