

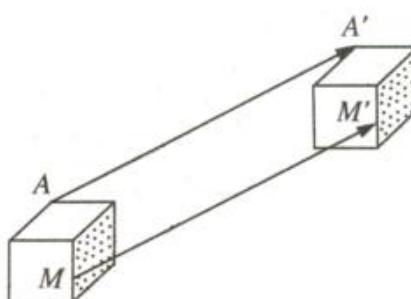
## §2

## TỔNG CỦA HAI VECTƠ

Chúng ta đã biết vectơ là gì và thế nào là hai vectơ bằng nhau. Tuy các vectơ không phải là những con số, nhưng ta cũng có thể cộng hai vectơ với nhau để được tổng của chúng, cũng có thể trừ đi nhau để được hiệu của chúng. Học sinh cần nắm vững cách xác định tổng và hiệu của hai vectơ cũng như các tính chất của phép cộng và phép trừ vectơ.

## 1. Định nghĩa tổng của hai vectơ

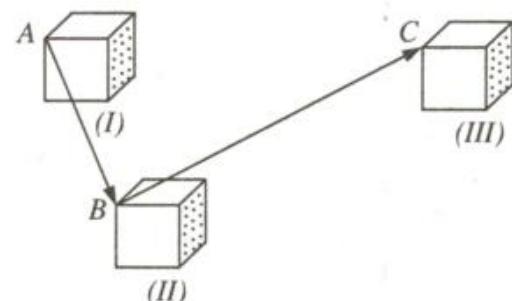
Hình 8 mô tả một vật được dời sang vị trí mới sao cho các điểm  $A, M, \dots$  của vật được dời đến các điểm  $A', M', \dots$  mà  $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{MM'} = \dots$ . Khi đó ta nói rằng : Vật được "tịnh tiến" theo vectơ  $\overrightarrow{AA'}$ .



Hình 8

- ?** Trên hình 9, chuyển động của một vật được mô tả như sau : Từ vị trí (I), nó được tịnh tiến theo vectơ  $\overrightarrow{AB}$  để đến vị trí (II). Sau đó nó lại được tịnh tiến một lần nữa theo vectơ  $\overrightarrow{BC}$  để đến vị trí (III).

Vật có thể được tịnh tiến chỉ một lần để từ vị trí (I) đến vị trí (III) hay không ? Nếu có, thì tịnh tiến theo vectơ nào ?



Hình 9

Như vậy có thể nói : Tịnh tiến theo vectơ  $\overrightarrow{AC}$  "bằng" tịnh tiến theo vectơ  $\overrightarrow{AB}$  rồi tịnh tiến theo vectơ  $\overrightarrow{BC}$ .

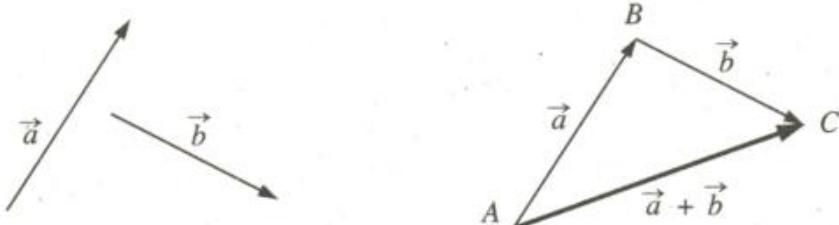
Trong Toán học, những điều trình bày trên đây được nói một cách ngắn gọn : Vectơ  $\overrightarrow{AC}$  là tổng của hai vectơ  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{BC}$ .

Ta đi đến định nghĩa (h. 10)

Cho hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ . Lấy một điểm  $A$  nào đó rồi xác định các điểm  $B$  và  $C$  sao cho  $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ . Khi đó vectơ  $\overrightarrow{AC}$  được gọi là **tổng** của hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ . Kí hiệu

$$\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}.$$

Phép lấy tổng của hai vectơ được gọi là **phép cộng vectơ**.



Hình 10



1

Hãy vẽ một tam giác  $ABC$ , rồi xác định các vectơ tổng sau đây

- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}$ ;
- $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$ .



2

Hãy vẽ hình bình hành  $ABCD$  với tâm  $O$  ( $O$  là giao điểm hai đường chéo). Hãy viết vectơ  $\overrightarrow{AB}$  dưới dạng tổng của hai vectơ mà các điểm mút của chúng được lấy trong năm điểm  $A, B, C, D, O$ .

## 2. Các tính chất của phép cộng vectơ



3

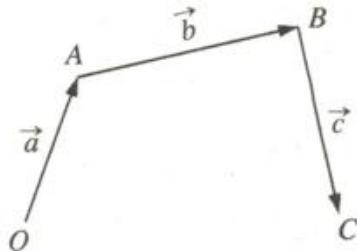
Chúng ta biết rằng phép cộng hai số có tính chất giao hoán. Đối với phép cộng hai vectơ, tính chất đó có đúng hay không? Hãy kiểm chứng bằng hình vẽ.



4

Hãy vẽ các vectơ  $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{BC} = \vec{c}$  như trên hình 11. Trên hình vẽ đó

- Hãy chỉ ra vectơ nào là vectơ  $\vec{a} + \vec{b}$ , và do đó, vectơ nào là vectơ  $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ .
- Hãy chỉ ra vectơ nào là vectơ  $\vec{b} + \vec{c}$  và do đó vectơ nào là vectơ  $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ .
- Từ đó có thể rút ra kết luận gì?



Hình 11

Từ các hoạt động trên, chúng ta suy ra các tính chất sau đây của phép cộng vectơ (cũng giống như các tính chất của phép cộng các số)

- 1) *Tính chất giao hoán* :  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ ;
- 2) *Tính chất kết hợp* :  $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ ;
- 3) *Tính chất của vectơ-không* :  $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ .



### CHÚ Ý

Do tính chất 2, các vectơ  $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$  và  $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$  bằng nhau, bởi vậy, từ nay chúng được viết một cách đơn giản là  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ , và gọi là *tổng của ba vectơ*  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ .

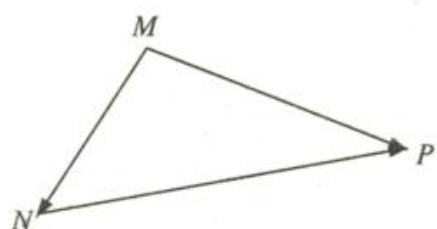
### 3. Các quy tắc cần nhớ

Từ định nghĩa tổng của hai vectơ ta suy ra hai quy tắc sau đây

#### QUY TẮC BA ĐIỂM (h.12)

Với ba điểm bất kì  $M, N, P$ ,  
ta có

$$\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP}.$$

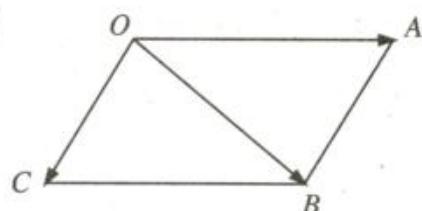


Hình 12

#### QUY TẮC HÌNH BÌNH HÀNH (h.13)

Nếu  $OABC$  là hình bình hành  
thì ta có

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB}.$$



Hình 13

**[?2]** a) Hãy giải thích tại sao ta có quy tắc hình bình hành.

b) Hãy giải thích tại sao ta có  $|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$ .

**Bài toán 1.** Chứng minh rằng với bốn điểm bất kì  $A, B, C, D$ , ta có

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}.$$

*Giải.* Dùng quy tắc ba điểm ta có thể viết  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$ . Bởi vậy

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC} \text{ (do tính chất giao hoán)} \\ &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} \text{ (quy tắc ba điểm đối với } B, D, C\text{).} \end{aligned}$$



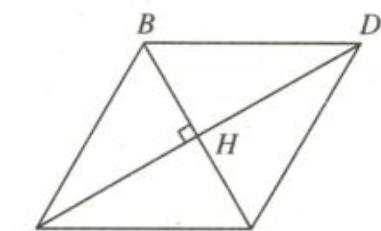
5

Dùng quy tắc ba điểm, ta cũng có thể viết  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ . Hãy tiếp tục để có một cách chứng minh khác của Bài toán 1.

**Bài toán 2.** Cho tam giác đều  $ABC$  có cạnh bằng  $a$ . Tính độ dài của vectơ tổng  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ .

*Giải.* Ta lấy điểm  $D$  sao cho  $ABDC$  là hình bình hành (h. 14). Theo quy tắc hình bình hành ta có

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}.$$



Hình 14

Vậy

$$|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AD}| = AD.$$

Vì  $ABC$  là tam giác đều nên  $ABDC$  là hình thoi và độ dài  $AD$  bằng hai lần đường cao  $AH$  của tam giác  $ABC$ , do đó  $AD = 2 \times \frac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$ .

Tóm lại,  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = a\sqrt{3}$ .

### Bài toán 3

a) Gọi  $M$  là trung điểm đoạn thẳng  $AB$ . Chứng minh rằng  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$ .

b) Gọi  $G$  là trọng tâm tam giác  $ABC$ . Chứng minh rằng  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ .

### Giải

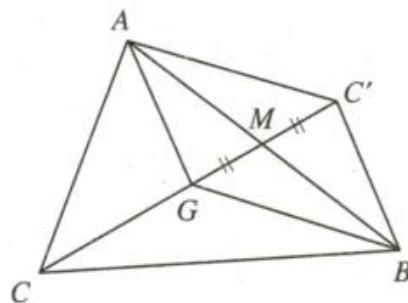
a) Theo quy tắc ba điểm, ta có  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MM} = \vec{0}$ . Mặt khác, vì  $M$  là trung điểm của  $AB$  nên  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$ . Vậy

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}.$$

b) (h. 15) Trọng tâm  $G$  nằm trên trung tuyến  $CM$  và  $GC = 2GM$ . Để tìm tổng  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB}$ , ta dựng hình bình hành  $AGBC'$ . Muốn vậy, ta chỉ cần lấy điểm  $C'$  sao cho  $M$  là trung điểm  $GC'$ .

Khi đó  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{GC'} = \overrightarrow{CG}$ . Bởi vậy

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{CC} = \vec{0}.$$



Hình 15

?

3 Trong lời giải của Bài toán 3, ta đã dùng đẳng thức  $\overrightarrow{GC'} = \overrightarrow{CG}$ . Hãy giải thích tại sao có đẳng thức đó.

### GHI NHỚ

Nếu  $M$  là trung điểm đoạn thẳng  $AB$  thì  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$ ;

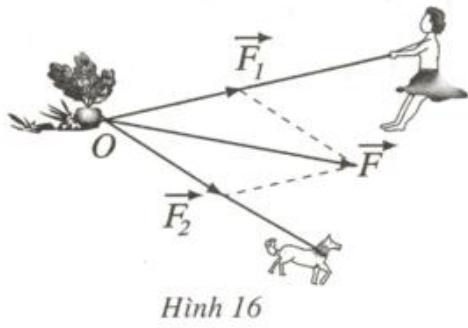
Nếu  $G$  là trọng tâm tam giác  $ABC$  thì  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ .



### CHÚ Ý

Quy tắc hình bình hành thường được áp dụng trong Vật lí để xác định hợp lực của hai lực cùng tác động lên một vật.

Trên hình 16, có hai lực  $\vec{F}_1$  và  $\vec{F}_2$  cùng tác dụng vào một vật tại điểm  $O$ . Khi đó có thể xem vật chịu tác dụng của lực  $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ , là hợp lực của hai lực  $\vec{F}_1$  và  $\vec{F}_2$ . Lực  $\vec{F}$  được xác định theo quy tắc hình bình hành.



Hình 16

### Câu hỏi và bài tập

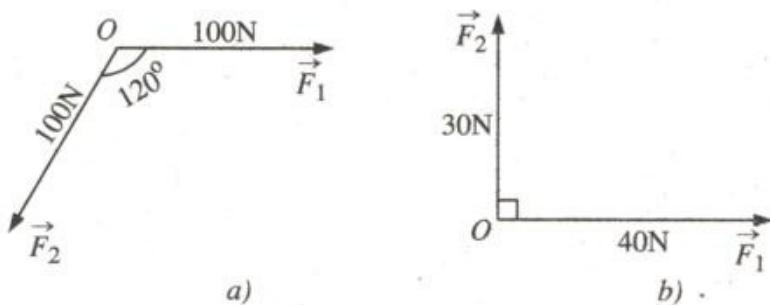
6. Chứng minh rằng nếu  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$  thì  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ .
7. Tứ giác  $ABCD$  là hình gì nếu  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$  và  $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$  ?
8. Cho bốn điểm bất kì  $M, N, P, Q$ . Chứng minh các đẳng thức sau
  - a)  $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MQ}$  ;
  - b)  $\overrightarrow{NP} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{MQ}$  ;
  - c)  $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{PN}$ .
9. Các hệ thức sau đây đúng hay sai (với mọi  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ ) ?
  - a)  $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$  ;
  - b)  $|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$ .
10. Cho hình bình hành  $ABCD$  với tâm  $O$ . Hãy điền vào chỗ trống (...) để được đẳng thức đúng
 

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \dots$	b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \dots$
c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OA} = \dots$	d) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \dots$
e) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \dots$	
11. Cho hình bình hành  $ABCD$  với tâm  $O$ . Mỗi khẳng định sau đây đúng hay sai ?
 

a) $ \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}  =  \overrightarrow{BD} $ ;	b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC}$ ;
c) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$ ;	d) $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$ .
12. Cho tam giác đều  $ABC$  nội tiếp đường tròn tâm  $O$ .
  - a) Hãy xác định các điểm  $M, N, P$  sao cho
 
$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} ; \quad \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} ; \quad \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA}.$$
  - b) Chứng minh rằng  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$ .

13. Cho hai lực  $\vec{F}_1$  và  $\vec{F}_2$  cùng có điểm đặt tại  $O$  (h.17). Tìm cường độ lực tổng hợp của chúng trong các trường hợp sau

- a)  $\vec{F}_1$  và  $\vec{F}_2$  đều có cường độ là 100N, góc hợp bởi  $\vec{F}_1$  và  $\vec{F}_2$  bằng  $120^\circ$  (h. 17a);
- b) Cường độ của  $\vec{F}_1$  là 40N, của  $\vec{F}_2$  là 30N và góc giữa  $\vec{F}_1$  và  $\vec{F}_2$  bằng  $90^\circ$  (h. 17b).



Hình 17