

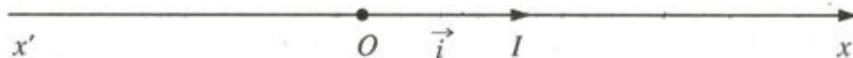
§5

TRỤC TOẠ ĐỘ VÀ HỆ TRỤC TOẠ ĐỘ

Ở lớp 7, chúng ta đã làm quen với trục và hệ trục toạ độ Đê-các vuông góc. Trong phần này, chúng ta sẽ nói kĩ hơn về các khái niệm đó.

1. Trục toạ độ

*Trục toạ độ (còn gọi là **trục**, hay **trục số**) là một đường thẳng trên đó đã xác định một điểm O và một vectơ \vec{i} có độ dài bằng 1.*



Hình 27

Điểm O gọi là **gốc toạ độ**, vectơ \vec{i} gọi là **vector đơn vị** của trục toạ độ.

Trục toạ độ như vậy được kí hiệu là $(O; \vec{i})$. Ta lấy điểm I sao cho $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$, tia OI còn được kí hiệu là Ox , tia đối của Ox là Ox' . Khi đó trục $(O; \vec{i})$ còn gọi là trục $x'ox$ hay trục Ox (h. 27).

Toạ độ của vectơ và của điểm trên trục

Cho vectơ \vec{u} nằm trên trục $(O; \vec{i})$. Khi đó có số a xác định để $\vec{u} = a\vec{i}$. Số a như thế gọi là **toạ độ của vectơ \vec{u} đối với trục $(O; \vec{i})$** .

Cho điểm M nằm trên trục $(O; \vec{i})$. Khi đó có số m xác định để $\overrightarrow{OM} = m\vec{i}$. Số m như thế gọi là **toạ độ của điểm M đối với trục $(O; \vec{i})$** (cũng là toạ độ của vectơ \overrightarrow{OM}).



1

Trên trục Ox cho hai điểm A và B lần lượt có toạ độ là a và b . Tìm toạ độ của vectơ \overrightarrow{AB} và vectơ \overrightarrow{BA} . Tìm toạ độ trung điểm của đoạn thẳng AB .

Độ dài đại số của vectơ trên trục

Nếu hai điểm A, B nằm trên trục Ox thì toạ độ của vectơ \overrightarrow{AB} được kí hiệu là \overline{AB} và gọi là **độ dài đại số** của vectơ \overrightarrow{AB} trên trục Ox .

Như vậy

$$\overrightarrow{AB} = \overline{AB} \vec{i}.$$

Từ định nghĩa trên ta suy ra các khẳng định sau đây : Trên trục số,

- 1) Hai vectơ \overrightarrow{AB} và \overrightarrow{CD} bằng nhau khi và chỉ khi $\overline{AB} = \overline{CD}$ (hiển nhiên) ;
- 2) Hệ thức $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ tương đương với hệ thức $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$ (hệ thức Sa-lơ).

Thật vậy, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overline{AB} \vec{i} + \overline{BC} \vec{i} = \overline{AC} \vec{i}$
 $\Leftrightarrow (\overline{AB} + \overline{BC})\vec{i} = \overline{AC} \vec{i} \Leftrightarrow \overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$.

2. Hệ trục tọa độ

Trên hình 28, ta có một hệ trục tọa độ vuông góc. Nó bao gồm hai trục tọa độ Ox và Oy vuông góc với nhau.

Vectơ đơn vị trên trục Ox là \vec{i} , vectơ đơn vị trên trục Oy là \vec{j} .

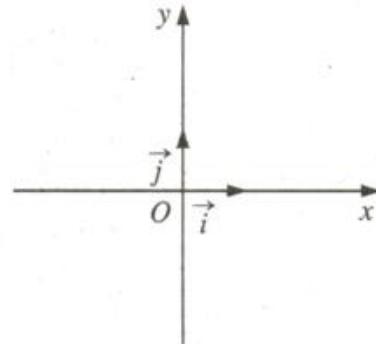
Điểm O gọi là **gốc tọa độ**. Trục Ox gọi là **trục hoành**, trục Oy gọi là **trục tung**.

Hệ trục tọa độ vuông góc như trên còn gọi đơn giản là **hệ trục tọa độ** và thường được kí hiệu là Oxy hay $(O; \vec{i}, \vec{j})$.



CHÚ Ý

Khi trong mặt phẳng đã cho (hay đã chọn) một hệ trục tọa độ, ta sẽ gọi mặt phẳng đó là **mặt phẳng tọa độ**.

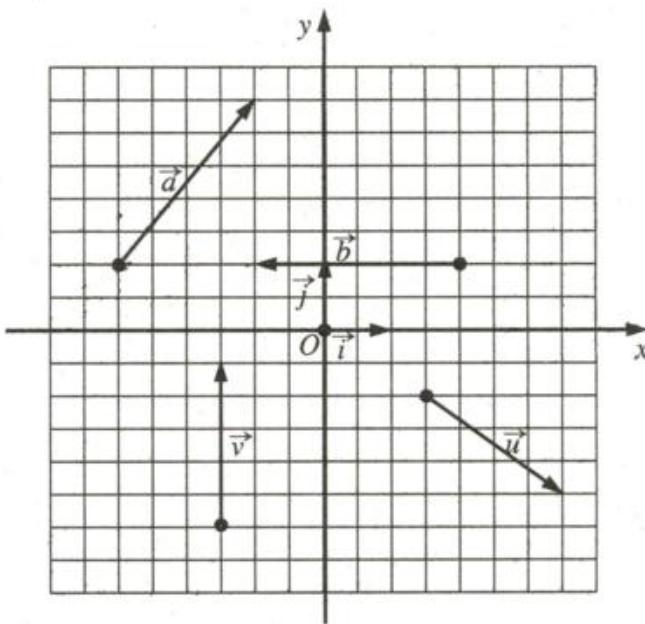


Hình 28

3. Toạ độ của vectơ đối với hệ trục tọa độ



Quan sát hình 29. Hãy biểu thị mỗi vectơ \vec{a} , \vec{b} , \vec{u} , \vec{v} qua hai vectơ \vec{i}, \vec{j} dưới dạng $x\vec{i} + y\vec{j}$ với x, y là hai số thực nào đó.



Hình 29

ĐỊNH NGHĨA

Đối với hệ trục tọa độ $(O; \vec{i}, \vec{j})$, nếu $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$ thì cặp số $(x; y)$ được gọi là **toạ độ của vectơ \vec{a}** , kí hiệu là $\vec{a} = (x; y)$ hay $\vec{a}(x; y)$. Số thứ nhất x gọi là **hoành độ**, số thứ hai y gọi là **tung độ** của vectơ \vec{a} .

- [?1]** a) Tìm toạ độ của các vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{u}, \vec{v}$ trên hình 29.
 b) Đối với hệ trục tọa độ $(O; \vec{i}, \vec{j})$, hãy chỉ ra toạ độ của các vectơ $\vec{0}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{i} + \vec{j}, 2\vec{j} - \vec{i}, \frac{1}{3}\vec{i} - 3\vec{j}, \sqrt{3}\vec{i} + 0,14\vec{j}$.

Nhận xét. Từ định nghĩa toạ độ của vectơ, ta thấy hai vectơ bằng nhau khi và chỉ khi chúng có cùng toạ độ, nghĩa là

$$\vec{a}(x; y) = \vec{b}(x'; y') \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y'. \end{cases}$$

4. Biểu thức toạ độ của các phép toán vectơ

Trong mục này ta nói về biểu thức toạ độ của các phép toán vectơ sau : phép cộng, phép trừ vectơ và phép nhân vectơ với số.



Cho hai vectơ $\vec{a} = (-3; 2)$ và $\vec{b} = (4; 5)$.

- Hãy biểu thị các vectơ \vec{a}, \vec{b} qua hai vectơ \vec{i}, \vec{j} .
- Tìm toạ độ của các vectơ $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$; $\vec{d} = 4\vec{a}$; $\vec{u} = 4\vec{a} - \vec{b}$.

Một cách tổng quát, ta có

Cho $\vec{a} = (x; y)$ và $\vec{b} = (x'; y')$. Khi đó

- $\vec{a} + \vec{b} = (x + x'; y + y')$; $\vec{a} - \vec{b} = (x - x'; y - y')$;
- $k\vec{a} = (kx; ky)$ với $k \in \mathbb{R}$;
- Vector \vec{b} cùng phương với vector $\vec{a} \neq \vec{0}$ khi và chỉ khi có số k sao cho $x' = kx$, $y' = ky$.

?? Mỗi cặp vectơ sau có cùng phương không ?

- $\vec{a} = (0; 5)$ và $\vec{b} = (-1; 7)$;
- $\vec{u} = (2003; 0)$ và $\vec{v} = (1; 0)$;
- $\vec{e} = (4; -8)$ và $\vec{f} = (-0,5; 1)$;
- $\vec{m} = (\sqrt{2}; 3)$ và $\vec{n} = (3; \sqrt{2})$.

5. Toạ độ của điểm

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy , mỗi điểm M được xác định hoàn toàn bởi vectơ \overrightarrow{OM} . Do vậy, nếu biết toạ độ của vectơ \overrightarrow{OM} thì điểm M sẽ được xác định. Vì lẽ đó người ta định nghĩa

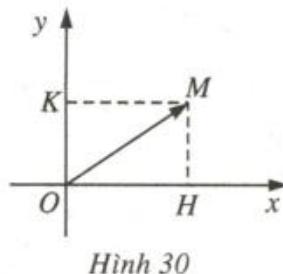
|| Trong mặt phẳng toạ độ Oxy , toạ độ của vectơ \overrightarrow{OM} được
gọi là **toạ độ của điểm M** .

Như vậy, cặp số $(x; y)$ là toạ độ của điểm M khi và chỉ khi $\overrightarrow{OM} = (x; y)$. Khi đó ta viết $M(x; y)$ hoặc $M = (x; y)$.

Số x gọi là **hoành độ** của điểm M , số y gọi là **tung độ** của điểm M .

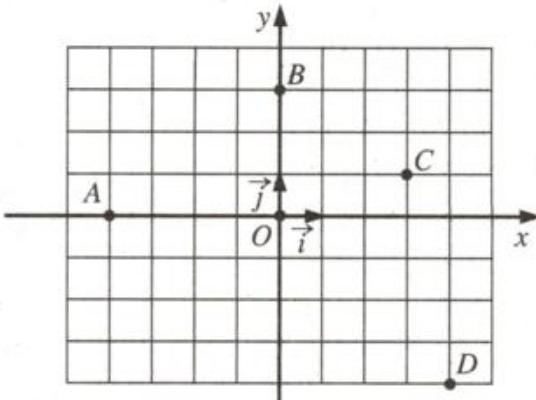
Nhận xét. (h. 30) Gọi H , K lần lượt là hình chiếu của M trên Ox và Oy . Khi đó, nếu $M = (x; y)$ thì $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OK}$. Suy ra

$$x\vec{i} = \overrightarrow{OH} \text{ hay } x = \overrightarrow{OH}; \\ y\vec{j} = \overrightarrow{OK} \text{ hay } y = \overrightarrow{OK}.$$



Trên hình 31

- Toạ độ của mỗi điểm O, A, B, C, D bằng bao nhiêu?
- Hãy tìm điểm E có toạ độ $(4; -4)$.
- Tìm toạ độ của vectơ \overrightarrow{AB} .



Tổng quát, ta có

Với hai điểm $M(x_M; y_M)$ và $N(x_N; y_N)$ thì

$$\overrightarrow{MN} = (x_N - x_M; y_N - y_M).$$

[?3] Hãy giải thích vì sao có kết quả trên.



CHÚ Ý

Để thuận tiện, ta thường dùng kí hiệu $(x_M; y_M)$ để chỉ toạ độ của điểm M .

6. Toạ độ trung điểm của đoạn thẳng và toạ độ của trọng tâm tam giác



5

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy , cho hai điểm $M(x_M; y_M)$, $N(x_N; y_N)$. Gọi P là trung điểm của đoạn thẳng MN .

- Hãy biểu thị vectơ \overrightarrow{OP} qua hai vectơ \overrightarrow{OM} và \overrightarrow{ON} .
- Từ đó hãy tìm toạ độ điểm P theo toạ độ của M và N .

Vậy ta có

Nếu P là trung điểm của đoạn thẳng MN thì

$$x_P = \frac{x_M + x_N}{2}; y_P = \frac{y_M + y_N}{2}.$$



6

Tìm toạ độ điểm M' đối xứng với điểm $M(7; -3)$ qua điểm $A(1; 1)$.



7

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy , cho tam giác ABC với trọng tâm G .

- Hãy viết hệ thức giữa các vectơ \overrightarrow{OA} , \overrightarrow{OB} , \overrightarrow{OC} và \overrightarrow{OG} .
- Từ đó suy ra toạ độ của G theo toạ độ của A, B, C .

Vậy ta có

Nếu G là trọng tâm của tam giác ABC thì

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}; y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}.$$

Ví dụ. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy , cho các điểm $A(2; 0)$, $B(0; 4)$, $C(1; 3)$.

- Chứng minh A, B, C là ba đỉnh của một tam giác.
- Tìm toạ độ của trọng tâm tam giác ABC .

Giải. a) Ta có $\overrightarrow{AB} = (-2; 4)$ và $\overrightarrow{AC} = (-1; 3)$. Do $\frac{-2}{-1} \neq \frac{4}{3}$ nên \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC}

không cùng phương, suy ra A, B, C không thẳng hàng và chúng là ba đỉnh của một tam giác.

b) Ta có $\frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{2 + 0 + 1}{3} = 1$ và $\frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{0 + 4 + 3}{3} = \frac{7}{3}$.

Vậy toạ độ của trọng tâm tam giác ABC là $\left(1; \frac{7}{3}\right)$.

Câu hỏi và bài tập

29. Trong mặt phẳng toạ độ, mỗi mệnh đề sau đúng hay sai ?
- Hai vectơ $\vec{a}(26; 9)$ và $\vec{b}(9; 26)$ bằng nhau.
 - Hai vectơ bằng nhau khi và chỉ khi chúng có hoành độ bằng nhau và tung độ bằng nhau.
 - Hai vectơ đối nhau thì chúng có hoành độ đối nhau.
 - Vectơ \vec{a} cùng phương với vectơ \vec{i} nếu \vec{a} có hoành độ bằng 0.
 - Vectơ \vec{a} có hoành độ bằng 0 thì nó cùng phương với vectơ \vec{j} .

30. Tìm toạ độ của các vectơ sau trong mặt phẳng toạ độ

$$\vec{a} = -\vec{i}; \quad \vec{b} = 5\vec{j}; \quad \vec{c} = 3\vec{i} - 4\vec{j};$$

$$\vec{d} = \frac{1}{2}(\vec{j} - \vec{i}); \quad \vec{e} = 0,15\vec{i} + 1,3\vec{j}; \quad \vec{f} = \pi\vec{i} - (\cos 24^\circ)\vec{j}.$$

31. Cho $\vec{a} = (2; 1)$, $\vec{b} = (3; 4)$, $\vec{c} = (7; 2)$.

a) Tìm toạ độ của vectơ $\vec{u} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$.

b) Tìm toạ độ của vectơ \vec{x} sao cho $\vec{x} + \vec{a} = \vec{b} - \vec{c}$.

c) Tìm các số k, l để $\vec{c} = k\vec{a} + l\vec{b}$.

32. Cho $\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{i} - 5\vec{j}$, $\vec{v} = k\vec{i} - 4\vec{j}$.

Tìm các giá trị của k để hai vectơ \vec{u}, \vec{v} cùng phương.

33. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

a) Toạ độ của điểm A bằng toạ độ của vectơ \overrightarrow{OA} , với O là gốc toạ độ.

b) Hoành độ của một điểm bằng 0 thì điểm đó nằm trên trục hoành.

c) Điểm A nằm trên trục tung thì A có hoành độ bằng 0.

d) P là trung điểm của đoạn thẳng AB khi và chỉ khi hoành độ điểm P bằng trung bình cộng các hoành độ của hai điểm A, B .

e) Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành khi và chỉ khi $x_A + x_C = x_B + x_D$ và $y_A + y_C = y_B + y_D$.

34. Trong mặt phẳng toạ độ, cho ba điểm $A(-3; 4)$, $B(1; 1)$, $C(9; -5)$.

a) Chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng.

b) Tìm toạ độ điểm D sao cho A là trung điểm của BD .

c) Tìm toạ độ điểm E trên trục Ox sao cho A, B, E thẳng hàng.

35. Cho điểm $M(x; y)$. Tìm toạ độ của các điểm

a) M_1 đối xứng với M qua trục Ox ;

b) M_2 đối xứng với M qua trục Oy ;

c) M_3 đối xứng với M qua gốc toạ độ O .

36. Trong mặt phẳng toạ độ, cho ba điểm $A(-4; 1)$, $B(2; 4)$, $C(2; -2)$.

a) Tìm toạ độ của trọng tâm tam giác ABC .

b) Tìm toạ độ điểm D sao cho C là trọng tâm tam giác ABD .

c) Tìm toạ độ điểm E sao cho $ABCE$ là hình bình hành.