

§12. ƯỚC CHUNG VÀ ƯỚC CHUNG LỚN NHẤT

Thầy giáo chuẩn bị 30 miếng dứa và 48 miếng dứa hâu để liên hoan lớp. Thầy giáo muốn chia số trái cây trên vào một số đĩa sao cho mỗi đĩa có số miếng mỗi loại quả như nhau.

Thầy giáo có thể chia như thế vào bao nhiêu đĩa?
Số đĩa nhiều nhất mà thầy giáo có thể dùng là bao nhiêu?



I. ƯỚC CHUNG VÀ ƯỚC CHUNG LỚN NHẤT



a) Nêu các ước của 30 và của 48 theo thứ tự tăng dần:

Các ước của 30	1	2	?	?	?	?	?	?		
Các ước của 48	1	2	?	?	?	?	?	?	?	?

b) Tìm các số vừa ở trong hàng thứ nhất vừa ở trong hàng thứ hai.

Các số vừa ở trong hàng thứ nhất vừa ở trong hàng thứ hai là 1, 2, 3, 6 được gọi là ước chung của 30 và 48.



c) Xác định số lớn nhất trong các ước chung của 30 và 48.

Số lớn nhất trong các ước chung của 30 và 48 là 6. Số đó được gọi là ước chung lớn nhất của 30 và 48.



Số tự nhiên n được gọi là ước chung của hai số a và b nếu n vừa là ước của a vừa là ước của b .

Số lớn nhất trong các ước chung của a và b được gọi là ước chung lớn nhất của a và b .

Quy ước: Viết tắt ước chung là ƯC và ước chung lớn nhất là ƯCLN.

Ta kí hiệu: Tập hợp các ước chung của a và b là $ƯC(a, b)$; ước chung lớn nhất của a và b là $ƯCLN(a, b)$.

$$ƯC(30, 48) = \{1; 2; 3; 6\}$$

$$ƯCLN(30, 48) = 6$$

Vi dụ 1

- a) Số 5 có phải là ước chung của 20 và 30 không? Vì sao?
 b) Số 6 có phải là ước chung của 12 và 26 không? Vì sao?

Giải

- a) Số 5 là ước chung của 20 và 30 vì 5 vừa là ước của 20 vừa là ước của 30.
 b) Số 6 không phải là ước chung của 12 và 26 vì 6 là ước của 12 nhưng không là ước của 26.

Chú ý: Số tự nhiên n được gọi là ước chung của ba số a, b, c nếu n là ước của cả ba số a, b, c .

Vi dụ 2

- a) Liệt kê các ước của 12 và của 20 theo thứ tự tăng dần.
 b) Viết tập hợp $ƯC(12, 20)$.
 c) Tìm $ƯCLN(12, 20)$.

Giải

- a) Ta có bảng sau:

Các ước của 12	1	2	3	4	6	12
Các ước của 20	1	2	4	5	10	20

- b) Các ước chung của 12 và 20 là 1, 2, 4.
 Vậy $ƯC(12, 20) = \{1; 2; 4\}$.
 c) $ƯCLN(12, 20) = 4$.

- 2** Quan sát bảng sau:

Các ước của 24	1	2	3	4	6	8	12	24	
Các ước của 36	1	2	3	4	6	9	12	18	36

- a) Viết tập hợp $ƯC(24, 36)$.
 b) Tìm $ƯCLN(24, 36)$.
 c) Thực hiện phép chia $ƯCLN(24, 36)$ cho các ước chung của hai số đó.

1

a) Số 8 có phải là ước chung của 24 và 56 không? Vì sao?

b) Số 8 có phải là ước chung của 14 và 48 không? Vì sao?

2

Số 7 có phải là ước chung của 14, 49, 63 không? Vì sao?



Ước chung của hai số là ước của ước chung lớn nhất của chúng.

Vi dụ 3 Biết $ƯCLN(a, b) = 60$. Tìm tất cả các số có hai chữ số là ước chung của a và b .

Giải

Vì ước chung của a và b đều là ước của $ƯCLN(a, b) = 60$ nên tất cả các số có hai chữ số là ước chung của a và b là: 10, 12, 15, 20, 30, 60.



3 Tìm tất cả các số có hai chữ số là ước chung của a và b , biết rằng $ƯCLN(a, b) = 80$.

II. TÌM ƯỚC CHUNG LỚN NHẤT BẰNG CÁCH PHÂN TÍCH CÁC SỐ RA THỪA SỐ NGUYÊN TỐ

3 Ta có thể tìm $ƯCLN(36, 48)$ theo các bước sau:

Bước 1. Phân tích 36 và 48 ra thừa số nguyên tố

$$36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3^2;$$

$$48 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^4 \cdot 3.$$

Bước 2. Chọn ra các thừa số nguyên tố chung của 36 và 48 là 2 và 3

Bước 3. Với mỗi thừa số nguyên tố chung 2 và 3, ta chọn lũy thừa với số mũ nhỏ nhất

- Số mũ nhỏ nhất của 2 là 2; ta chọn 2^2 .
- Số mũ nhỏ nhất của 3 là 1; ta chọn 3^1 .

Bước 4. Lấy tích của các lũy thừa đã chọn, ta nhận được ước chung lớn nhất cần tìm $ƯCLN(36, 48) = 2^2 \cdot 3^1 = 12$.



Tìm ước chung lớn nhất bằng cách phân tích các số ra thừa số nguyên tố

Bước 1. Phân tích mỗi số ra thừa số nguyên tố

Bước 2. Chọn ra các thừa số nguyên tố chung

Bước 3. Với mỗi thừa số nguyên tố chung, ta chọn lũy thừa với số mũ nhỏ nhất

Bước 4. Lấy tích của các lũy thừa đã chọn, ta nhận được ước chung lớn nhất cần tìm.

Vi dụ 4 Tìm $ƯCLN(168, 180)$.

Giải

Ta có: $168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$;

$$180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5.$$

Chọn ra các thừa số nguyên tố chung của 168 và 180 là 2 và 3.

Số mũ nhỏ nhất của 2 là 2; Số mũ nhỏ nhất của 3 là 1.

Vậy $ƯCLN(168, 180) = 2^2 \cdot 3^1 = 4 \cdot 3 = 12$.

Chú ý: • Nếu hai số đã cho không có thừa số nguyên tố chung thì $ƯCLN$ của chúng bằng 1.

• Nếu $a : b$ thì $ƯCLN(a, b) = b$. Chẳng hạn $ƯCLN(48, 16) = 16$.

4 Tìm $ƯCLN$ của 126 và 162.

III. HAI SỐ NGUYÊN TỐ CÙNG NHAU

4 Tìm $ƯCLN(8, 27)$.



Hai số nguyên tố cùng nhau là hai số có ước chung lớn nhất bằng 1.

Vi dụ 5

a) Hai số 14 và 33 có nguyên tố cùng nhau không? Vì sao?

b) Hãy chỉ ra một số nguyên tố cùng nhau với 6.

Giải

a) Hai số 14 và 33 nguyên tố cùng nhau vì $ƯCLN(14, 33) = 1$.

b) Do $ƯCLN(5, 6) = 1$ nên 5 và 6 là hai số nguyên tố cùng nhau.

5 Hai số 24 và 35 có nguyên tố cùng nhau không? Vì sao?

5

a) Tìm $ƯCLN(4, 9)$.

b) Có thể rút gọn phân số $\frac{4}{9}$ được nữa hay không?



Phân số tối giản là phân số có tử và mẫu là hai số nguyên tố cùng nhau.

Vi dụ 6

a) Rút gọn phân số $\frac{16}{20}$ về phân số tối giản.

b) Tìm một phân số bằng phân số $\frac{3}{7}$ và có tử số bằng 18.

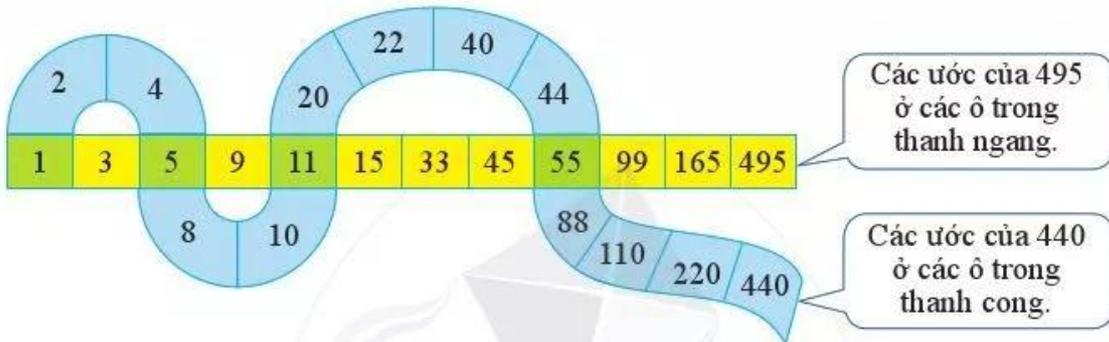
Giải

a) $ƯCLN(16, 20) = 4$. Vậy $\frac{16}{20} = \frac{16 : 4}{20 : 4} = \frac{4}{5}$.

b) Ta có: $18 : 3 = 6$; $\frac{3}{7} = \frac{3 \cdot 6}{7 \cdot 6} = \frac{18}{42}$. Vậy phân số cần tìm là $\frac{18}{42}$.

BÀI TẬP

- Số 1 có phải là ước chung của hai số tự nhiên bất kì không? Vì sao?
- Quan sát hai thanh sau:



- Viết tập hợp ƯC(440, 495).
 - Tìm ƯCLN(440, 495).
- Tìm ước chung lớn nhất của từng cặp số trong ba số sau đây:
 - 31, 22, 34;
 - 105, 128, 135.
 - Tìm ƯCLN(126, 150). Từ đó hãy tìm tất cả các ước chung của 126 và 150.
 - Rút gọn các phân số sau về phân số tối giản: $\frac{60}{72}$, $\frac{70}{95}$, $\frac{150}{360}$.
 - Phân số $\frac{4}{9}$ bằng các phân số nào trong các phân số sau: $\frac{48}{108}$, $\frac{80}{180}$, $\frac{60}{130}$, $\frac{135}{270}$?
 - Một nhóm gồm 24 bạn nữ và 30 bạn nam tham gia một số trò chơi. Có thể chia các bạn thành nhiều nhất bao nhiêu đội chơi sao cho số bạn nam cũng như số bạn nữ được chia đều vào các đội?
 - Một khu đất có dạng hình chữ nhật với chiều dài 48 m, chiều rộng 42 m. Người ta muốn chia khu đất ấy thành những mảnh hình vuông bằng nhau (với độ dài cạnh đo theo đơn vị mét là số tự nhiên) để trồng các loại rau. Có thể chia được bằng bao nhiêu cách? Với cách chia nào thì cạnh của mảnh đất hình vuông là lớn nhất và bằng bao nhiêu?



Tìm ước chung lớn nhất bằng thuật toán Ô-clit (Euclid)

Ta có thể tìm ƯCLN(450, 198) theo các bước sau:

$$\begin{array}{r}
 450 \quad | \quad 198 \\
 \underline{198} \quad | \quad 54 \\
 262 \quad | \quad 54 \\
 \underline{108} \quad | \quad 36 \\
 154 \quad | \quad 36 \\
 \underline{72} \quad | \quad 18 \\
 82 \quad | \quad 18 \\
 \underline{36} \quad | \quad 18 \\
 46 \quad | \quad 18 \\
 \underline{18} \quad | \quad 0 \\
 28 \quad | \quad 0 \\
 \underline{0} \quad | \quad 0 \\
 28 \quad | \quad 0
 \end{array}$$

Bước 1. Chia số lớn cho số nhỏ

$$450 : 198 = 2 \text{ (dư 54)} \quad (1)$$

Bước 2. • Phép chia (1) còn dư nên lấy số chia đem chia cho số dư

$$198 : 54 = 3 \text{ (dư 36)} \quad (2)$$

• Phép chia (2) vẫn còn dư nên tiếp tục lấy số chia đem chia cho số dư

$$54 : 36 = 1 \text{ (dư 18)} \quad (3)$$

• Phép chia (3) vẫn còn dư nên tiếp tục lấy số chia đem chia cho số dư

$$36 : 18 = 2 \text{ (dư 0)} \quad (4)$$

• Phép chia (4) có số dư bằng 0, ta dừng lại

Bước 3. Số chia cuối cùng là ƯCLN phải tìm

$$\text{ƯCLN}(450, 198) = 18.$$

Để tìm ước chung lớn nhất bằng thuật toán Ô-clit, ta làm như sau:

Bước 1. Chia số lớn cho số nhỏ

Bước 2. Nếu phép chia còn dư thì ta lấy số chia đem chia cho số dư;

Ta cứ làm như vậy cho đến khi nhận được số dư bằng 0 thì dừng lại

Bước 3. Số chia cuối cùng là ước chung lớn nhất phải tìm.

Nhận xét: Người ta thường dùng thuật toán Ô-clit để tìm ƯCLN của cặp số lớn.

Chẳng hạn, để tìm ƯCLN(336, 480), ta thực hiện các phép chia:

$$\begin{array}{r}
 480 \quad | \quad 336 \\
 \underline{336} \quad | \quad 144 \\
 144 \quad | \quad 48 \\
 \underline{96} \quad | \quad 24 \\
 48 \quad | \quad 24 \\
 \underline{24} \quad | \quad 0 \\
 24 \quad | \quad 0
 \end{array}$$

Vậy $\text{ƯCLN}(336, 480) = 48$.

Áp dụng thuật toán Ô-clit để tìm ƯCLN của:

a) 126 và 162;

b) 2 268 và 1 260.