

§5. Phương trình chứa ẩn ở mẫu

Giá trị tìm được của ẩn có là nghiệm của phương trình đã cho hay không ?

Ở những bài trước chúng ta mới chỉ xét các phương trình mà hai vế của nó đều là các biểu thức hữu tỉ của ẩn và không chứa ẩn ở mẫu. Trong bài này, ta sẽ nghiên cứu cách giải các phương trình có biểu thức *chứa ẩn ở mẫu*.

1. Ví dụ mở đầu

Ta thử giải phương trình $x + \frac{1}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}$ bằng phương pháp quen thuộc như sau :

Chuyển các biểu thức chứa ẩn sang một vế :

$$x + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-1} = 1.$$

Thu gọn vế trái, ta tìm được $x = 1$.



Giá trị $x = 1$ có phải là nghiệm của phương trình hay không ? Vì sao ?

Ví dụ này cho thấy : Khi biến đổi phương trình mà làm mất mẫu chứa ẩn của phương trình thì phương trình nhận được có thể *không tương đương với phương trình ban đầu*.

Bởi vậy, khi giải phương trình chứa ẩn ở mẫu, ta phải chú ý đến một yếu tố đặc biệt, đó là *điều kiện xác định của phương trình*.

2. Tìm điều kiện xác định của một phương trình

Đối với phương trình chứa ẩn ở mẫu, các giá trị của ẩn mà tại đó ít nhất một mẫu thức trong phương trình nhận giá trị bằng 0, chắc chắn không thể là nghiệm của phương trình. Để ghi nhớ điều đó, người ta thường đặt điều kiện

cho ẩn để tất cả các mẫu trong phương trình đều khác 0 và gọi đó là *điều kiện xác định* (viết tắt là ĐKXĐ) của phương trình.

Ví dụ 1. Tìm điều kiện xác định của mỗi phương trình sau :

a) $\frac{2x+1}{x-2} = 1$;

b) $\frac{2}{x-1} = 1 + \frac{1}{x+2}$.

Giải :

a) Vì $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ nên ĐKXĐ của phương trình $\frac{2x+1}{x-2} = 1$ là $x \neq 2$.

b) Ta thấy $x - 1 \neq 0$ khi $x \neq 1$ và $x + 2 \neq 0$ khi $x \neq -2$. Vậy ĐKXĐ của phương trình $\frac{2}{x-1} = 1 + \frac{1}{x+2}$ là $x \neq 1$ và $x \neq -2$.

? Tìm điều kiện xác định của mỗi phương trình sau :

a) $\frac{x}{x-1} = \frac{x+4}{x+1}$;

b) $\frac{3}{x-2} = \frac{2x-1}{x-2} - x$.

3. Giải phương trình chứa ẩn ở mẫu

Ví dụ 2. Giải phương trình $\frac{x+2}{x} = \frac{2x+3}{2(x-2)}$. (1)

Phương pháp giải :

– ĐKXĐ của phương trình là $x \neq 0$ và $x \neq 2$.

– Quy đồng mẫu hai vế của phương trình :

$$\frac{2(x+2)(x-2)}{2x(x-2)} = \frac{x(2x+3)}{2x(x-2)}$$

Từ đó suy ra

$$2(x+2)(x-2) = x(2x+3). \quad (1a)$$

Như vậy, ta đã *khử mẫu* trong phương trình (1).

– Giải phương trình (1a) :

$$(1a) \Leftrightarrow 2(x^2 - 4) = x(2x + 3)$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 8 = 2x^2 + 3x$$

$$\Leftrightarrow 3x = -8$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{8}{3}$$

– Do việc khử mẫu, phương trình (1a) có thể không tương đương với phương trình (1) đã cho. Vì thế, cần thử lại xem giá trị $x = -\frac{8}{3}$ có đúng là nghiệm của phương trình (1) hay không. Muốn vậy, ta chỉ cần kiểm tra xem nó có thoả mãn ĐKXD hay không.

Ta thấy $x = -\frac{8}{3}$ thoả mãn ĐKXD nên nó là nghiệm của (1). Vậy tập nghiệm của phương trình (1) là $S = \left\{-\frac{8}{3}\right\}$.

Cách giải phương trình chứa ẩn ở mẫu

Bước 1. Tìm điều kiện xác định của phương trình.

Bước 2. Quy đồng mẫu hai vế của phương trình rồi khử mẫu.

Bước 3. Giải phương trình vừa nhận được.

Bước 4 (Kết luận). Trong các giá trị của ẩn tìm được ở bước 3, các giá trị thoả mãn điều kiện xác định chính là các nghiệm của phương trình đã cho.

4. Áp dụng

Ví dụ 3. Giải phương trình $\frac{x}{2(x-3)} + \frac{x}{2x+2} = \frac{2x}{(x+1)(x-3)}$. (2)

Giải :

– ĐKXD : $x \neq -1$ và $x \neq 3$.

– Quy đồng mẫu hai vế và khử mẫu :

$$\frac{x(x+1) + x(x-3)}{2(x+1)(x-3)} = \frac{4x}{2(x+1)(x-3)}$$

Suy ra $x(x+1) + x(x-3) = 4x$. (2a)

– Giải phương trình (2a) :

$$(2a) \Leftrightarrow x^2 + x + x^2 - 3x - 4x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 6x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x(x-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x = 0 \text{ hoặc } x - 3 = 0.$$

1) $x = 0$ (thỏa mãn ĐKXĐ) ;

2) $x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ (loại vì không thỏa mãn ĐKXĐ).

- *Kết luận* : Tập nghiệm của phương trình (2) là $S = \{0\}$.

23 Giải các phương trình trong **22**.

BÀI TẬP

27. Giải các phương trình :

a) $\frac{2x - 5}{x + 5} = 3$;

b) $\frac{x^2 - 6}{x} = x + \frac{3}{2}$;

c) $\frac{(x^2 + 2x) - (3x + 6)}{x - 3} = 0$;

d) $\frac{5}{3x + 2} = 2x - 1$.

28. Giải các phương trình :

a) $\frac{2x - 1}{x - 1} + 1 = \frac{1}{x - 1}$;

b) $\frac{5x}{2x + 2} + 1 = -\frac{6}{x + 1}$;

c) $x + \frac{1}{x} = x^2 + \frac{1}{x^2}$;

d) $\frac{x + 3}{x + 1} + \frac{x - 2}{x} = 2$.

LUYỆN TẬP

29. Bạn Sơn giải phương trình $\frac{x^2 - 5x}{x - 5} = 5$ (1) như sau :

$$(1) \Leftrightarrow x^2 - 5x = 5(x - 5)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x = 5x - 25$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 10x + 25 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 5)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 5.$$

Bạn Hà cho rằng Sơn giải sai vì đã nhân hai vế với biểu thức $x - 5$ có chứa ẩn. Hà giải bằng cách rút gọn vế trái như sau :

$$(1) \Leftrightarrow \frac{x(x-5)}{x-5} = 5 \Leftrightarrow x = 5.$$

Hãy cho biết ý kiến của em về hai lời giải trên.

30. Giải các phương trình :

a) $\frac{1}{x-2} + 3 = \frac{x-3}{2-x}$;

b) $2x - \frac{2x^2}{x+3} = \frac{4x}{x+3} + \frac{2}{7}$;

c) $\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} = \frac{4}{x^2-1}$;

d) $\frac{3x-2}{x+7} = \frac{6x+1}{2x-3}$.

31. Giải các phương trình :

a) $\frac{1}{x-1} - \frac{3x^2}{x^3-1} = \frac{2x}{x^2+x+1}$;

b) $\frac{3}{(x-1)(x-2)} + \frac{2}{(x-3)(x-1)} = \frac{1}{(x-2)(x-3)}$;

c) $1 + \frac{1}{x+2} = \frac{12}{8+x^3}$;

d) $\frac{13}{(x-3)(2x+7)} + \frac{1}{2x+7} = \frac{6}{(x-3)(x+3)}$.

32. Giải các phương trình :

a) $\frac{1}{x} + 2 = \left(\frac{1}{x} + 2\right)(x^2 + 1)$;

b) $\left(x + 1 + \frac{1}{x}\right)^2 = \left(x - 1 - \frac{1}{x}\right)^2$.

33. Tìm các giá trị của a sao cho mỗi biểu thức sau có giá trị bằng 2 :

a) $\frac{3a-1}{3a+1} + \frac{a-3}{a+3}$;

b) $\frac{10}{3} - \frac{3a-1}{4a+12} - \frac{7a+2}{6a+18}$.