

§9. BIẾN ĐỔI CÁC BIỂU THỨC HỮU TỈ. GIÁ TRỊ CỦA PHÂN THỨC

A. MỤC TIÊU

- HS có khái niệm về biểu thức hữu tỉ, biết rằng mỗi phân thức và mỗi đa thức đều là những biểu thức hữu tỉ.
- HS biết cách biểu diễn một biểu thức hữu tỉ dưới dạng một dãy những phép toán trên những phân thức và hiểu rằng biến đổi một biểu thức hữu tỉ là thực hiện các phép toán trong biểu thức để biến nó thành một phân thức đại số.
- HS có kỹ năng thực hiện thành thạo các phép toán trên các phân thức đại số.
- HS biết cách tìm điều kiện của biến để giá trị của phân thức được xác định.

B. NHỮNG ĐIỀM CẦN LƯU Ý

1. Trong SGK cũ có dùng thuật ngữ “biến đổi đồng nhất các biểu thức hữu tỉ” vì ở đó ta coi hai biểu thức là bằng nhau nếu giá trị của chúng bằng nhau

khi thay mỗi biến bởi một giá trị tuỳ ý mà giá trị của cả hai biểu thức đều được xác định, và hai biểu thức bằng nhau như thế được gọi là *đồng nhất* trên tập xác định chung của chúng.

Sở dĩ có từ “đồng nhất” là vì trong toán học ta đã dùng dấu “=” biểu thị mối liên hệ giữa hai biểu thức theo nhiều ý nghĩa khác nhau. Chẳng hạn,

$$2 + 1 = 3 \quad (1)$$

$$(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1 \quad (2)$$

$$2x = x - 3 \quad (3)$$

$$x^2 + x + 1 = x. \quad (4)$$

Đẳng thức (2) đúng với mọi giá trị của x ; như vậy, hai biểu thức ở hai vế *đồng nhất* trên tập xác định chung của chúng. Đẳng thức (3) là một phương trình, chỉ với $x = -3$ giá trị của hai biểu thức mới bằng nhau. Như vậy hai biểu thức $2x$ và $x - 3$ *không đồng nhất* trên tập xác định chung là tập số thực \mathbf{R} (nếu ta chỉ xét tập số thực). Đẳng thức (4) là một phương trình vô nghiệm trên tập số thực \mathbf{R} , hai vế của nó cũng không đồng nhất trên tập xác định chung.

Trong SGK này ta đã định nghĩa hai phân thức bằng nhau theo cách khác, không liên quan đến giá trị của biến. Việc biến đổi biểu thức hữu tỉ ở đây được thực hiện theo định nghĩa của hai phân thức bằng nhau và các quy tắc của các phép toán. Vì thế không có thuật ngữ “đồng nhất”.

2. Phân giá trị của phân thức rất quan trọng và rất tế nhị.

- Nó quan trọng ở chỗ : Giá trị của phân thức chỉ được xác định khi giá trị của mẫu thức khác 0. Muốn tính giá trị của phân thức trước hết cần tìm các giá trị của biến để giá trị của mẫu thức khác 0. Đó chính là việc mà trước đây ta gọi là tìm tập xác định của phân thức. Để HS dễ hiểu, SGK này không dùng thuật ngữ đó. Thay cho nó ta dùng thuật ngữ *điều kiện của biến để giá trị của phân thức được xác định* (hoặc nói gọn là điều kiện xác định) và chỉ cần nêu rõ các giá trị của biến mà các giá trị tương ứng của mẫu thức khác 0. Chẳng hạn,

giá trị của phân thức $\frac{1}{x^2 - 1}$ được xác định với điều kiện : $x \neq \pm 1$.

- Nó tế nhị ở chỗ hai phân thức bằng nhau nhưng điều kiện đối với chúng có thể khác nhau. Chẳng hạn, $\frac{x - 1}{x^2 - 1} = \frac{1}{x + 1}$, nhưng điều kiện để giá trị của

$\frac{x-1}{x^2-1}$ xác định là $x \neq \pm 1$, còn điều kiện để giá trị của $\frac{1}{x+1}$ được xác định chỉ

là $x \neq -1$. Do đó nếu tính giá trị của phân thức đã cho bằng cách tính giá trị của phân thức thu gọn khi $x = x_0$ thì phải xét xem x_0 có thoả mãn điều kiện của biến ở phân thức đã cho hay không. Chẳng hạn, giải bài toán sau :

Cho phân thức $\frac{x-1}{x^2-1}$.

- a) Rút gọn phân thức.
- b) Tính giá trị của phân thức tại $x = 1$.

$$Giải. a) \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{1}{x+1}.$$

b) ĐKXĐ : $x \neq \pm 1$. Vì thế với $x = 1$, giá trị của phân thức đã cho không xác định.

Nếu HS dùng phân thức rút gọn để tính giá trị của phân thức đã cho thì có thể có HS quên điều kiện đối với phân thức đã cho mà thay $x = 1$ vào phân thức $\frac{1}{x+1}$ để được kết quả sai lầm là $\frac{1}{2}$. Nhận cơ hội này GV nhấn mạnh tầm quan trọng của điều kiện của biến.

3. Nếu giá trị của phân thức $\frac{A(x)}{B(x)}$ được xác định tại x_0 thì có thể tính giá trị ấy bằng cách tính giá trị của phân thức rút gọn tại x_0 . Thật vậy, vì phân thức rút gọn được nên có thể giả thiết rằng tử và mẫu của nó có nhân tử chung $P(x)$. Khi đó

$$\frac{A(x)}{B(x)} = \frac{C(x).P(x)}{D(x).P(x)} = \frac{C(x)}{D(x)}.$$

Theo giả thiết, tại x_0 , phân thức đã cho có giá trị là

$$\frac{A(x_0)}{B(x_0)} = \frac{C(x_0).P(x_0)}{D(x_0).P(x_0)}$$

và $B(x_0) \neq 0$. Do đó $D(x_0) \neq 0$ và $P(x_0) \neq 0$.

Vì $\frac{A(x_0)}{B(x_0)}$ là một phân số, tử và mẫu có ước chung là số $P(x_0) \neq 0$. Do đó có thể chia cả tử và mẫu của phân số cho ước chung. Vậy

$$\frac{A(x_0)}{B(x_0)} = \frac{C(x_0)}{D(x_0)}.$$

C. GỢI Ý DẠY HỌC

1. Biểu thức hữu tỉ

GV giới thiệu khái niệm biểu thức hữu tỉ, cho vài ví dụ minh họa, rồi cho HS thực hành những phép biến đổi.

2. Biến đổi một biểu thức hữu tỉ thành một phân thức

Điều quan trọng trong việc biến đổi là HS biết cách biểu diễn mỗi biểu thức hữu tỉ dưới dạng một dãy phép toán trên những phân thức.

GV có thể trình bày ví dụ trong SGK để làm mẫu, nhưng nếu trình độ HS khá hơn có thể dành cho HS như một bài tập.

3. Giá trị của phân thức

Cho HS biết cách tìm điều kiện của biến để giá trị của một phân thức được xác định qua ví dụ. Vì vậy sau khi cho HS biết : *điều kiện của biến để giá trị của một phân thức được xác định là biến chỉ nhận các giá trị sao cho giá trị tương ứng của mẫu thức khác 0*, cân trình bày tỉ mỉ ví dụ. Câu a) của ví dụ 2 cho HS cách lập luận để tìm điều kiện của biến, đồng thời cho cách trình bày bài giải. Câu b) của ví dụ 2 nhằm mục đích lưu ý HS rằng mỗi khi giải bài toán có liên quan đến giá trị của phân thức đều phải lưu ý đến điều kiện của biến để giá trị tương ứng của mẫu thức khác 0.

D. HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP SGK

46. a) GV tự làm.

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad & \frac{1 - \frac{2}{x+1}}{1 - \frac{x^2 - 2}{x^2 - 1}} = \left(1 - \frac{2}{x+1}\right) : \left(1 - \frac{x^2 - 2}{x^2 - 1}\right) = \frac{x+1-2}{x+1} : \frac{x^2-1-(x^2-2)}{x^2-1} = \\ & = \frac{x-1}{x+1} : \frac{x^2-1-x^2+2}{(x-1)(x+1)} = \frac{x-1}{x+1} : \frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{x-1}{x+1} \cdot \frac{(x-1)(x+1)}{1} = (x-1)^2. \end{aligned}$$

47. a) GV tự làm.

b) $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1) \neq 0$ khi $x \neq \pm 1$. Vậy điều kiện phải tìm là $x \neq \pm 1$.

48. a) $x \neq -2$; b) $\frac{x^2 + 4x + 4}{x+2} = \frac{(x+2)^2}{x+2} = x+2$.

c) Nếu giá trị của phân thức đã cho bằng 1 thì $x + 2 = 1$. Do đó $x = -1$. Giá trị này thoả mãn điều kiện của x.

d) Nếu giá trị của phân thức đã cho bằng 0 thì $x + 2 = 0$. Vì giá trị của $x + 2$ khác 0 nên không có giá trị nào của x để phân thức đã cho có giá trị bằng 0.

49. Các ước của 2 là $\pm 1, \pm 2$. $(x+1)(x-1)(x+2)(x-2) \neq 0$ khi $x \neq \pm 1, x \neq \pm 2$.

Vậy có thể chọn phân thức $\frac{1}{(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)}$.

50. a) $\left(\frac{x}{x+1} + 1\right) : \left(1 - \frac{3x^2}{1-x^2}\right) = \frac{x+x+1}{x+1} : \frac{1-x^2-3x^2}{1-x^2} = \frac{2x+1}{x+1} : \frac{1-4x^2}{1-x^2} =$

$$= \frac{2x+1}{x+1} \cdot \frac{1-x^2}{1-4x^2} = \frac{2x+1}{x+1} \cdot \frac{(1-x)(1+x)}{(1-2x)(1+2x)} = \frac{1-x}{1-2x}.$$

b) $(x^2 - 1) \cdot \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} - 1\right) = (x^2 - 1) \cdot \left[\frac{x+1 - (x-1) - (x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)} \right] =$

$$= (x^2 - 1) \cdot \frac{x+1 - x + 1 - x^2 + 1}{(x-1)(x+1)} = \frac{(x-1)(x+1)(3-x^2)}{(x-1)(x+1)} = 3-x^2.$$

51. a) $\left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y}{x}\right) : \left(\frac{x}{y^2} - \frac{1}{y} + \frac{1}{x}\right) = \frac{x^2 \cdot x + y \cdot y^2}{xy^2} : \frac{x \cdot x - xy + y^2}{xy^2} =$

$$= \frac{x^3 + y^3}{xy^2} \cdot \frac{xy^2}{x^2 - xy + y^2} = \frac{(x+y)(x^2 - xy + y^2)xy^2}{xy^2(x^2 - xy + y^2)} = x+y.$$

$$\begin{aligned}
& \text{b)} \left(\frac{1}{x^2 + 4x + 4} - \frac{1}{x^2 - 4x + 4} \right) : \left(\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-2} \right) = \\
& = \left[\frac{1}{(x+2)^2} - \frac{1}{(x-2)^2} \right] : \frac{x-2+x+2}{(x+2)(x-2)} = \frac{(x-2)^2 - (x+2)^2}{(x+2)^2(x-2)^2} \cdot \frac{(x+2)(x-2)}{2x} = \\
& = \frac{(x^2 - 4x + 4 - x^2 - 4x - 4)(x-2)(x+2)}{2x(x+2)^2(x-2)^2} = \\
& = \frac{-8x}{2x(x+2)(x-2)} = -\frac{4}{(x+2)(x-2)}.
\end{aligned}$$

52. Điều kiện của biến để giá trị của biểu thức được xác định là $x \neq 0$, $x \neq \pm a$.

$$\begin{aligned}
& \left(a - \frac{x^2 + a^2}{x+a} \right) \cdot \left(\frac{2a}{x} - \frac{4a}{x-a} \right) = \frac{ax + a^2 - x^2 - a^2}{x+a} \cdot \frac{2ax - 2a^2 - 4ax}{x(x-a)} \\
& = \frac{x(a-x)2a(-a-x)}{x(x+a)(x-a)} = 2a \text{ là số chẵn (do } a \text{ nguyên).}
\end{aligned}$$

53. a) • $1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x}$;

• Dùng kết quả trên ta có :

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{\frac{x+1}{x}} = 1 + \frac{x}{x+1} = \frac{x+1+x}{x+1} = \frac{2x+1}{x+1} ;$$

• Dùng kết quả trên ta có :

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}} = 1 + \frac{1}{\frac{2x+1}{x+1}} = 1 + \frac{x+1}{2x+1} = \frac{2x+1+x+1}{2x+1} = \frac{3x+2}{2x+1} ;$$

b) Biểu thức đã cho có dạng tương tự như các biểu thức ở mục a), có thể dự đoán như sau :

Qua các kết quả của câu a), ta thấy kết quả tiếp theo là một phân thức mà tử bằng tổng của tử và mẫu, còn mẫu là tử thức của kết quả kề trước nó.

E. TÀI LIỆU BỔ SUNG

Có thể cho thêm bài tập trong số các bài tập 44, 47, 53, 62 trong SBT Toán 8 tập một, Ch.II.

Như vậy có thể dự đoán rằng nếu biểu thức có bốn gạch phân số thì kết quả là $\frac{5x+3}{3x+2}$ và trong trường hợp có năm gạch phân số, kết quả sẽ là $\frac{8x+5}{5x+3}$.

- 54.** a) $2x^2 - 6x = 2x(x - 3) \neq 0$ khi $2x \neq 0$ và $x - 3 \neq 0$. Vậy $x \neq 0$ và $x \neq 3$.
 b) Vì $3 = (\sqrt{3})^2$ nên $x^2 - 3 = (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) \neq 0$ khi $x - \sqrt{3} \neq 0$ và $x + \sqrt{3} \neq 0$, hay $x \neq \sqrt{3}$ và $x \neq -\sqrt{3}$. Vậy $x \neq -\sqrt{3}, x \neq \sqrt{3}$.

- 55.** a) Điều kiện của x là : $x \neq -1, x \neq 1$.
 c) Với $x = 2$ giá trị của phân thức đã cho được xác định, do đó phân thức đã cho có giá trị bằng 3.

Với $x = -1$ giá trị của phân thức đã cho không xác định.

Chỉ có thể tính giá trị của phân thức đã cho nhờ phân thức rút gọn với những giá trị của biến thoả mãn điều kiện xác định đối với phân thức đã cho.

- 56.** a) $x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$.

Vì $x^2 + 2x + 4 = x^2 + 2x + 1 + 3 = (x + 1)^2 + 3 \geq 3$ với mọi giá trị của x nên $x^3 - 8 \neq 0$ khi $x - 2 \neq 0$ hay $x \neq 2$. Vậy điều kiện của biến là : $x \neq 2$.

b)
$$\frac{3x^2 + 6x + 12}{x^3 - 8} = \frac{3(x^2 + 2x + 4)}{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)} = \frac{3}{x - 2}.$$

- c) Vì $x = \frac{4001}{2000}$ thoả mãn điều kiện của x nên khi đó giá trị của biểu thức đã cho bằng

$$\frac{\frac{3}{4001} - 2}{\frac{2000}{4001}} = \frac{\frac{3.2000}{4001} - 2}{\frac{2000}{4001}} = \frac{3.2000 - 2.4001}{4001} = 6000.$$