Chương II

PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

I – GIỚI THIỆU CHƯƠNG

A. MỤC TIÊU CỦA CHƯƠNG

Học xong chương này HS cần đạt được những yêu cầu sau :

– Nắm vững và vận dụng thành thạo các quy tắc của bốn phép tính : cộng, trừ, nhân, chia trên các phân thức đại số.

– Nắm vững điều kiện của biến để giá trị của một phân thức được xác định và biết tìm điều kiện này trong những trường hợp mẫu thức là một nhị thức bậc nhất hoặc một đa thức dễ phân tích được thành tích của những nhân tử bậc nhất. Đối với phân thức hai biến chỉ cần tìm được điều kiện của biến trong những trường hợp đơn giản. Những điều này nhằm phục vụ cho việc học chương phương trình và bất phương trình bậc nhất tiếp theo và hệ phương trình hai ẩn ở lớp 9.

B. NỘI DUNG CHỦ YẾU CỦA CHƯƠNG

Theo chương trình, thời gian dành cho chương này là 20 tiết. Tuy nhiên cần dành 3 tiết cho việc ôn tập, thi học kì và cuối năm nên còn lại 17 tiết, phân phối như sau :

§1. Phân thức đại số	(1 tiết)
§2. Tính chất cơ bản của phân thức	(1 tiết)
§3. Rút gọn phân thức	(1 tiết)
Luyện tập	(1 tiết)
§4. Quy đồng mẫu thức nhiều phân thức	(1 tiết)
Luyện tập	(1 tiết)
§5. Phép cộng các phân thức đại số	(1 tiết)
Luyện tập	(1 tiết)
§6. Phép trừ các phân thức đại số	(1 tiết)
Luyện tập	(1 tiết)

C. NHỮNG ĐIỂM CẦN LƯU Ý

1. Sự tương tự giữa tập Q các số hữu tỉ và tập các phân thức

Trên vành số nguyên **Z** có hai phép toán : cộng và nhân. Đối với phép cộng, **Z** là một nhóm aben. Do đó với phép trừ khi biết hai số nguyên a và b ta tìm được một số nguyên x sao cho b + x = a ; x được gọi là hiệu của a đối với b và kí hiệu x = a – b. Phép tìm hiệu được gọi là phép trừ. Trong khi đó, nếu biết hai số nguyên a và b, b ≠ 0, không phải bao giờ ta cũng tìm được một số nguyên x sao cho bx = a. Nói cách khác, trên vành số nguyên chưa có phép chia cho một số khác 0. Để tìm một tập số trong đó có thể chia cho một số khác 0 bất kì ta đã mở rộng vành số nguyên thành trường số hữu tỉ. Ở đó mỗi số nguyên a được đồng nhất với số hữu tỉ dạng $\frac{a}{1}$ và nếu a ≠ 0 thì có số hữu tỉ $\frac{1}{a}$, kí hiệu là a^{-1}, gọi là nghịch đảo của a, mà $a.a^{-1} = \frac{a}{1}.\frac{1}{a} = \frac{a}{a} = 1$. Nhờ khái niệm này, với hai số nguyên tuỳ ý a và b, b ≠ 0, ta có :

$$a : b = \frac{a}{1} : \frac{b}{1} = \frac{a}{1}\cdot\left(\frac{b}{1}\right)^{-1} = \frac{a}{1}\cdot\frac{1}{b} = \frac{a}{b}\cdot$$

Bây giờ với hai số nguyên a và b tuỳ ý, b ≠ 0, ta tìm được một số hữu tỉ x sao cho bx = a. Đó là

$$x = a.b^{-1} = \frac{a}{1}\cdot\left(\frac{b}{1}\right)^{-1} = \frac{a}{1}\cdot\frac{1}{b} = \frac{a}{b}\cdot$$

Đối với tập các đa thức trên trường số, tình hình cũng tương tự. Đối với phép cộng nó là một nhóm aben. Do đó cũng có phép trừ đa thức. Phép nhân các đa thức có tính chất giao hoán, kết hợp và phân phối đối với phép cộng. Vì vậy trên tập các đa thức trên trường số cũng có một cấu trúc vành. Song với hai đa thức tuỳ ý A và B, B $\neq$ 0, không phải bao giờ cũng tìm được một đa thức C để A = BC. Ta lại mở rộng vành này thành trường các phân thức hữu tỉ bằng một phương pháp tương tự như khi mở rộng vành số nguyên **Z** thành trường số hữu tỉ. Như vậy trong chương này ta cần :

– Định nghĩa khái niệm phân thức đại số và khái niệm hai phân thức đại số bằng nhau (tương tự như khi xây dựng số hữu tỉ) ;

– Định nghĩa phép cộng và phép nhân các phân thức, định nghĩa phân thức đối, phân thức nghịch đảo và từ đó định nghĩa phép trừ và phép chia các phân thức.

2. Vài điều thay đổi so với SGK cũ

Trong chương này có một vài điểm khác với sách giáo khoa cũ.

1) Về định nghĩa hai phân thức bằng nhau.

Trong sách giáo khoa xuất bản từ năm 1994 trở về trước, ta coi phân thức đại số như biểu thức đại số ; nghĩa là *biểu thức chứa "chữ thay số"*. Vì thế hai phân thức đại số được coi là bằng nhau nếu giá trị của chúng bằng nhau khi ta thay mỗi chữ bởi một số tuỳ ý mà cả hai biểu thức đều có nghĩa. Như vậy, khái niệm bằng nhau này gắn liền với các tập xác định của hai biểu thức ; hai biểu thức có thể bằng nhau trên tập hợp này nhưng không bằng nhau trên một tập khác. Chẳng hạn, hai biểu thức $\frac{x^2-1}{x-1}$ và x + 1 bằng nhau trên tập $\mathbf{R} \setminus \{1\}$ nhưng khác nhau trên **R** vì với x = 1 biểu thức thứ nhất không xác định, còn biểu thức thứ hai có giá trị bằng 2. Đó là cách nhìn nhận phân thức theo *quan điểm hàm số*. Với quan điểm này người ta coi mỗi phân thức đại số như một hàm số. Do đó mỗi phân thức đại số đều có một tập xác định. Khi phát biểu tính chất cơ bản của phân thức đại số hay các quy tắc tính trên các phân thức ta đều phải kèm theo tập xác định và khi thực hiện các phép tính thì ở mỗi bước biến đổi HS đều phải chỉ rõ điều kiện của biến để hai biểu thức bằng nhau. Đòi hỏi này gây nhiều khó khăn cho HS vì trong nhiều trường hợp khá đơn giản HS cũng chưa đủ khả năng để làm điều đó. Chẳng hạn, mọi HS đều dễ dàng nhận thấy đẳng thức $\frac{x^3+1}{x^3+5x+1}+\frac{5x}{x^3+5x+1}=1$, song họ không thể tìm được điều kiện của x để có đẳng thức này. Đòi hỏi như vậy làm lu mờ mục tiêu chính là HS phải nắm vững và vận dụng thành thạo các quy tắc của bốn phép tính trên các phân thức.

Để khắc phục khó khăn nói trên, ta nhìn nhận phân thức như một đối tượng của đại số và trên tập hợp các phân thức có các phép toán mà HS cần phải biết cách thực hiện các phép toán ấy. Do đó ta cần cho HS biết các quy tắc tính và phải vận dụng thành thạo các quy tắc này. Đó chính là quan điểm của ta trong chương này mà người ta gọi là *quan điểm đại số* về phân thức. Theo quan điểm này, một đa thức bậc n là một biểu thức có dạng :

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0,$$

nó là đa thức 0 khi và chỉ khi mọi $a_i = 0$, một phân thức đại số là một biểu thức có dạng $\frac{A}{B}$, trong đó A và B là hai đa thức, với B khác đa thức 0 ; hai phân thức $\frac{A}{B}$ và $\frac{C}{D}$ bằng nhau nếu AD = BC. Không nên lầm lẫn giữa hai khái niệm : đa thức 0 và giá trị của đa thức bằng 0. Chẳng hạn, giá trị của đa thức $x - 1$ bằng 0 khi ta cho x giá trị bằng 1, nhưng đa thức $x - 1$ là một đa thức khác 0. Vì thế, $\frac{x^2-1}{x-1}$ *là một phân thức đại số hoàn toàn xác định* mà không cần một điều kiện gì. Song *giá trị của phân thức lại chỉ được xác định khi x nhận giá trị khác 1*. Như vậy cũng không nên lẫn lộn giữa hai khái niệm : phân thức đại số và giá trị của nó.

Ta định nghĩa hai phân thức bằng nhau tương tự như hai phân số bằng nhau. Hai phân thức bằng nhau như thế được coi như hai cách biểu diễn khác nhau của cùng một "phân thức (hữu tỉ)" (cũng giống như hai phân số bằng nhau là hai cách biểu diễn của cùng một số hữu tỉ). Các quy tắc cộng, trừ, nhân, chia chính là các định nghĩa của các phép toán này. Vì thế khi thực hiện chúng không có gì liên quan đến khái niệm tập xác định.

2) Về tập xác định của phân thức.

Để giải phương trình và bất phương trình, ta phải xét giá trị của biểu thức ở hai vế. Ở lớp 8 và lớp 9, mỗi vế của một phương trình hay bất phương trình thường chỉ là một phân thức của một hoặc hai biến. Nếu cho mỗi biến một giá trị thì phân thức có thể có một giá trị tương ứng duy nhất. Như vậy, mỗi phân thức đại số (hay mỗi cách biểu diễn của phân thức hữu tỉ) trở thành một hàm số. Chẳng hạn, cho phân thức $\frac{A(x)}{B(x)}$, với mỗi giá trị $x = r \in \mathbf{R}$ của biến x, phân thức $\frac{A(x)}{B(x)}$ có một giá trị tương ứng duy nhất là $\frac{A(r)}{B(r)}$, nếu $B(r) \neq 0$. Như vậy, $\frac{A(x)}{B(x)}$ là một hàm số có tập xác định là $\mathcal{D} = \{r \in \mathbf{R} \mid B(r) \neq 0\}$.

Trước đây ta định nghĩa đó cũng là tập xác định của phân thức. Song để cho đơn giản và giảm bớt những khái niệm chưa cần thiết, trong sách giáo khoa này, ta không định nghĩa tập xác định của phân thức mà chỉ nêu lên *điều kiện của biến để giá trị của phân thức được xác định*. Đối với HS lớp 8, thuật ngữ này dễ hiểu hơn và quá trình tiếp nhận thông tin nhanh hơn thuật ngữ "tập xác định". Hơn nữa, trong trường hợp phân thức nhiều biến, ta không thể cho HS định nghĩa tập xác định, vì nếu phân thức có, chẳng hạn, hai biến thì tập xác định không phải là tập con của tập số thực **R** mà là một tập con của tích Đề-các $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$; mà điều này thì HS chưa thể hiểu. Dùng thuật ngữ "điều kiện của biến" sẽ tránh được khó khăn này. Để quán triệt quan điểm của chương này ta cần chú ý rằng *khi thực hiện các phép toán trên các phân thức không được đòi hỏi HS tìm điều kiện của biến*. Nhưng *khi giải các bài toán về phân thức có liên quan đến giá trị của phân thức thì không thể thiếu điều kiện của biến*. Ví dụ, khi tìm giá trị của x để giá trị của phân thức $\frac{x^2-1}{x-1}$ bằng 2 ta có thể rút gọn phân thức thành $x + 1$ rồi tìm giá trị của x để $x + 1 = 2$. Nếu không quan tâm đến điều kiện của biến thì HS có thể cho rằng giá trị phải tìm của x là $x = 1$. Song giá trị này không được chấp nhận vì với nó, giá trị của phân thức $\frac{x^2-1}{x-1}$ không xác định. Một ví dụ khác : Tìm giá trị của x để phân thức $\frac{x^2-1}{x-1}$ có giá trị dương. Cũng như trên, ta sẽ tìm các giá trị của x để đa thức $x + 1$ có giá trị dương. Nếu không quan tâm đến điều kiện của biến thì HS có thể kết luận rằng phân thức đã cho có giá trị dương với mọi $x > -1$. Song trong số các giá trị $x > -1$, giá trị $x = 1$ không được chấp nhận. Vì vậy, câu trả lời của bài toán trong ví dụ này phải là $x > -1$ và $x \neq 1$.

3) "Biến đổi *đồng nhất* các biểu thức hữu tỉ" nay đổi thành "biến đổi các biểu thức hữu tỉ". Sở dĩ có sự thay đổi này là vì khi nói *hai biểu thức đồng nhất với nhau* ta thường hiểu đó là *hai biểu thức mà khi ta gán cho mỗi biến trong hai biểu thức một giá trị tuỳ ý mà giá trị của cả hai biểu thức đều xác định thì giá trị tương ứng của hai biểu thức bằng nhau,* còn *phép biến đổi đồng nhất là phép biến đổi một biểu thức thành một biểu thức đồng nhất với nó.* Nhưng ở đây ta chỉ biến đổi các biểu thức hữu tỉ thành phân thức nhờ các quy tắc tính trên tập các phân thức chứ không quan tâm đến giá trị của biểu thức.