BÀI 11

ƯỚC CHUNG. ƯỚC CHUNG LỚN NHẤT

KHÁI NIỆM, THUẬT NGỮ

Ước chung
Ước chung lớn nhất
Hai số nguyên tố cùng nhau
Phân số tối giản

KIẾN THỨC, KĨ NĂNG

- Xác định ước chung, ước chung lớn nhất của hai hoặc ba số tự nhiên đã cho.
- Nhận biết phân số tối giản.

Một bác thợ mộc muốn làm kệ để đồ từ hai tấm gỗ dài 18 dm và 30 dm. Bác muốn cắt hai tấm gỗ này thành các thanh gỗ có cùng độ dài mà không để thừa mẩu gỗ nào. Em hãy giúp bác thợ mộc tìm độ dài lớn nhất có thể của mỗi thanh gỗ được cắt.

1. ƯỚC CHUNG VÀ ƯỚC CHUNG LỚN NHẤT

Ước chung và ước chung lớn nhất của hai hay nhiều số

HĐ1 Tìm các tập hợp Ư(24) và Ư(28).

HĐ2 Gọi ƯC(24, 28) là tập hợp các số vừa là ước của 24, vừa là ước của 28. Hãy viết tập hợp ƯC(24, 28).

HĐ3 Tìm số lớn nhất trong tập ƯC(24, 28).

> Ước chung của hai hay nhiều số là ước của tất cả các số đó.
> Ước chung lớn nhất của hai hay nhiều số là số lớn nhất trong tập hợp các ước chung của các số đó.

ƯC(a, b) là một tập hợp;
ƯCLN(a, b) là một số.

Ta kí hiệu: ƯC(a, b) là tập hợp các ước chung của a và b;
ƯCLN(a, b) là ước chung lớn nhất của a và b.

Chú ý. Ta chỉ xét ước chung của các số khác 0.

Ví dụ 1

Ta có Ư(18) = {1; 2; 3; 6; 9; 18},
Ư(30) = {1; 2; 3; 5; 6; 10; 15; 30}.

Các số 1, 2, 3, 6 đều là ước của hai số 18 và 30 nên

ƯC(18, 30) = {1; 2; 3; 6}.

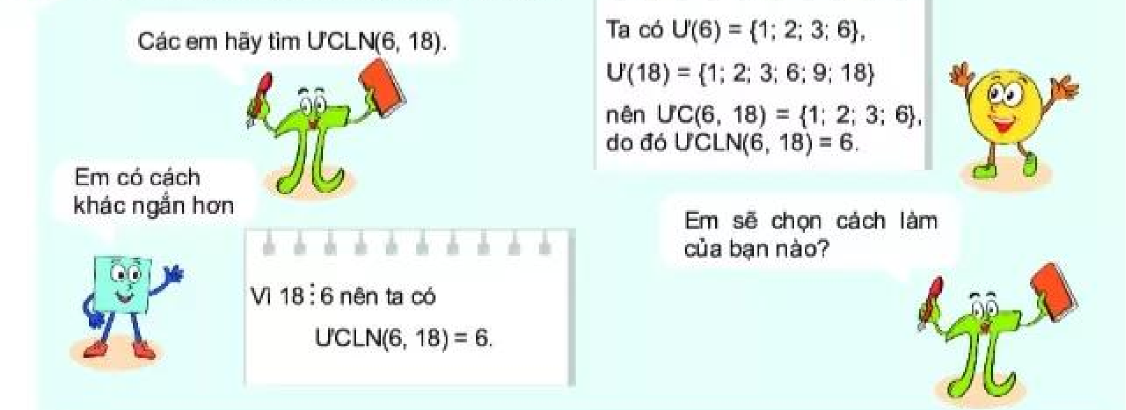
Vì 6 là số lớn nhất trong các ước chung nên ƯCLN(18, 30) = 6.

$x \in$ ƯC(a, b, c) nếu $a \vdots x$, $b \vdots x$ và $c \vdots x$.

Ví dụ 2

Trở lại bài toán mở đầu, độ dài lớn nhất (đơn vị dm) của mỗi thanh gỗ được cắt chính là ước chung lớn nhất của 18 và 30. Vậy, bác thợ mộc nên cắt các tấm gỗ thành các thanh gỗ dài 6 dm.

Tìm ƯCLN trong trường hợp đặc biệt



Nhận xét

- Trong các số đã cho, nếu số nhỏ nhất là ước của các số còn lại thì ƯCLN của các số đã cho chính là số nhỏ nhất ấy.

  Nếu $a \vdots b$ thì ƯCLN(a, b) = b.

- Số 1 chỉ có một ước là 1. Do đó với mọi số tự nhiên a và b, ta có

  ƯCLN(a, 1) = 1; ƯCLN(a, b, 1) = 1.

Tìm ƯCLN(90, 10).

Luyện tập 1

Bố có 12 quả bóng màu xanh và 15 quả bóng màu đỏ. Bố muốn chia số bóng cho ba anh em Việt, Hà và Nam đều như nhau gồm cả bóng màu xanh và bóng màu đỏ. Hỏi bố có thực hiện được điều đó hay không?

Vận dụng 1

Tuần này lớp 6A và 6B gồm 40 học sinh nữ và 36 học sinh nam được phân công đi thu gom rác làm sạch bờ biển ở địa phương. Nếu chia nhóm sao cho số học sinh nam và nữ trong các nhóm bằng nhau thì:

a) Có thể chia được thành bao nhiêu nhóm học sinh?

b) Có thể chia nhiều nhất bao nhiêu nhóm học sinh?

2. CÁCH TÌM ƯỚC CHUNG LỚN NHẤT

ƯCLN(a, b) là ước của a và b nên các thừa số nguyên tố của ƯCLN(a, b) là thừa số nguyên tố chung của a và b. Vì vậy, để tìm ƯCLN(a, b) ta cần phân tích a và b ra thừa số nguyên tố.

Tìm ước chung lớn nhất bằng cách phân tích các số ra thừa số nguyên tố

Để tìm ƯCLN(24, 60), ta làm như sau:

1. Phân tích các số 24 và 60 ra thừa số nguyên tố, ta được:

   $24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3$;

   $60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$.

2. Ta thấy 2 và 3 là các thừa số nguyên tố chung của 24 và 60.

3. Trong các phân tích ra thừa số nguyên tố của 24 và 60, *số mũ nhỏ nhất* của thừa số chung 2 là 2, *số mũ nhỏ nhất* của thừa số chung 3 là 1 nên ƯCLN(24, 60) = $2^2 . 3 = 12$.

Các bước tìm ƯCLN của hai hay nhiều số lớn hơn 1:

1. Phân tích mỗi số ra thừa số nguyên tố;
2. Chọn ra các thừa số nguyên tố chung;
3. Lập tích các thừa số đã chọn, mỗi thừa số lấy với số mũ nhỏ nhất. Tích đó là ƯCLN phải tìm.

? Tìm ƯCLN(45, 150), biết $45 = 3^2 \cdot 5$ và $150 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2$.

Ví dụ 3

Tìm ƯCLN(56, 140, 168) bằng cách phân tích ra thừa số nguyên tố.

Giải. Phân tích các số 56, 140 và 168 ra thừa số nguyên tố ta được:

$56 = 2^3 \cdot 7$; $140 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7$; $168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$.

Ta thấy 2 và 7 là các thừa số nguyên tố chung của 56, 140 và 168. Số mũ nhỏ nhất của 2 là 2 và số mũ nhỏ nhất của 7 là 1 nên

$$\text{ƯCLN}(56, 140, 168) = 2^2 \cdot 7 = 28.$$

Luyện tập 2

Tìm ƯCLN(36, 84).

Vận dụng 2

Một đại đội bộ binh có ba trung đội: trung đội I có 24 chiến sĩ, trung đội II có 28 chiến sĩ, trung đội III có 36 chiến sĩ. Trong cuộc diễu binh, cả ba trung đội phải xếp thành các hàng dọc đều nhau mà không có chiến sĩ nào trong mỗi trung đội bị lẻ hàng. Hỏi có thể xếp được nhiều nhất bao nhiêu hàng dọc?

Tìm ước chung từ ước chung lớn nhất

Ta đã biết ƯC(24, 28) = {1; 2; 4} và ƯCLN(24, 28) = 4.

Ta thấy 1, 2, 4 là tất cả ước của 4.

Để tìm ước chung của các số, ta có thể làm như sau:

1. Tìm ƯCLN của các số đó.
2. Tìm các ước của ƯCLN đó.

? Biết ƯCLN(75, 105) = 15, hãy tìm ƯC(75, 105).

Ví dụ 4

Tìm ƯC(75, 105, 120).

Giải. Phân tích các số 75, 105 và 120 ra thừa số nguyên tố:

$75 = 3 \cdot 5^2$; $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$; $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$.

Ta chọn ra các thừa số nguyên tố chung, đó là 3 và 5.

Số mũ nhỏ nhất của 3 là 1, số mũ nhỏ nhất của 5 là 1. Khi đó ƯCLN(75,105,120) = $3 \cdot 5 = 15$. Các ước của 15 là 1, 3, 5, 15.

Vậy ƯC(75, 105, 120) = {1; 3; 5; 15}.

Khi tìm ước chung của các số, người ta thường dựa vào ƯCLN của chúng.

Thử thách nhỏ

Vào ngày thứ Bảy, cô Lan tổ chức cho học sinh đi tham quan Bảo tàng Dân tộc học. Các học sinh đóng tiền mua vé, mỗi em một vé. Số tiền cô Lan thu được từng ngày được ghi lại ở bảng bên.

a) Hỏi số tiền để mua một vé (giá vé được tính theo đơn vị nghìn đồng) có thể là bao nhiêu, biết giá vé lớn hơn 2 000 đồng?

b) Có bao nhiêu học sinh tham gia chuyến đi, biết số học sinh trong lớp trong khoảng từ 20 đến 40 người?

Ngày	Số tiền đóng (đồng)
Thứ Hai	56 000
Thứ Ba	28 000
Thứ Tư	42 000
Thứ Năm	98 000

3. PHÂN SỐ TỐI GIẢN

Rút gọn về phân số tối giản

- Ta rút gọn phân số bằng cách chia cả tử và mẫu của phân số đó cho một ước chung khác 1 (nếu có).
- Phân số $\frac{a}{b}$ được gọi là phân số tối giản nếu a và b không có ước chung nào khác 1, nghĩa là ƯCLN(a, b) = 1.

  Chẳng hạn, rút gọn phân số $\frac{18}{30}$ bằng cách chia cả tử và mẫu cho 3, ta được $\frac{6}{10}$. Ta thấy $\frac{6}{10}$ chưa là phân số tối giản, ta rút gọn tiếp bằng cách chia cả tử và mẫu cho 2. Khi đó ta được phân số tối giản $\frac{3}{5}$.
- Để đưa một phân số chưa tối giản $\frac{a}{b}$ về phân số tối giản, ta chia cả tử và mẫu cho ƯCLN(a, b).

  Chẳng hạn, phân số $\frac{18}{30}$ chưa là phân số tối giản và ƯCLN(18, 30) = 6 nên

  $\frac{18}{30} = \frac{18:6}{30:6} = \frac{3}{5}$. Ta có $\frac{3}{5}$ là phân số tối giản.

? Phân số $\frac{16}{10}$ đã là phân số tối giản chưa? Nếu chưa, hãy rút gọn về phân số tối giản.

Ví dụ 5

Các phân số sau đã là phân số tối giản chưa? Nếu chưa, hãy rút gọn về phân số tối giản:

a) $\frac{8}{5}$; b) $\frac{36}{54}$.

Giải

a) Ta có ƯCLN(8, 5) = 1, nên $\frac{8}{5}$ là phân số tối giản.

b) ƯCLN(36, 54) = 18, nên $\frac{36}{54}$ không là phân số tối giản.

Ta có $\frac{36}{54} = \frac{36:18}{54:18} = \frac{2}{3}$. Ta được $\frac{2}{3}$ là phân số tối giản.

Nếu ƯCLN(a, b) = 1 thì hai số a, b được gọi là hai số *nguyên tố cùng nhau*.

Luyện tập 3

Rút gọn về phân số tối giản: a) $\frac{90}{27}$; b) $\frac{50}{125}$.

BÀI TẬP

2.30. Tìm tập hợp ước chung của:

a) 30 và 45; b) 42 và 70.

2.31. Tìm ƯCLN của hai số:

a) 40 và 70; b) 55 và 77.

2.32. Tìm ƯCLN của:

a) $2^2 \cdot 5$ và $2 \cdot 3 \cdot 5$;

b) $2^4 \cdot 3$; $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$ và $2^4 \cdot 11$.

2.33. Cho hai số $a = 72$ và $b = 96$.

a) Phân tích a và b ra thừa số nguyên tố;

b) Tìm ƯCLN(a, b), rồi tìm ƯC(a, b).

2.34. Các phân số sau đã là phân số tối giản chưa? Nếu chưa, hãy rút gọn về phân số tối giản:

a) $\frac{50}{85}$; b) $\frac{23}{81}$.

2.35. Hãy cho hai ví dụ về hai số có ƯCLN bằng 1 mà cả hai đều là hợp số.

EM CÓ BIẾT?

Tìm ước chung lớn nhất bằng nhận xét sau:

Nếu a, b là hai số tự nhiên với $a \geq b$ và $a = bq + r$, r là số dư của phép chia a cho b thì ƯCLN(a, b) = ƯCLN(b, r).

THUẬT TOÁN EUCLID (Ơ-CLÍT)

Bước 1. Thực hiện phép chia a cho b:

$a = bq + r$ với $r < b$ là số dư của phép chia này.

Nếu $r = 0$ thì $a \vdots b$, do đó ƯCLN(a, b) = b.

Nếu $r \neq 0$ thì ƯCLN(a, b) = ƯCLN(b, r).

Sau Bước 1, chúng ta đã chuyển việc tìm ƯCLN của hai số a và b về việc tìm ƯCLN của hai số nhỏ hơn là b và r.

Bước 2. Thực hiện các phép toán như Bước 1, tức là thực hiện phép chia b cho r:

$b = rs + t$ với $t < r$.

Nếu $t = 0$ thì $b \vdots r$, do đó ƯCLN(b, r) = r.

Nếu $t \neq 0$ thì ƯCLN(b, r) = ƯCLN(r, t).

Quá trình này tiếp tục đến khi phép chia không còn dư. Khi đó ƯCLN chính là số chia của phép chia không còn dư đó.

Ví dụ, để tìm ƯCLN(4 836, 234) người ta thực hiện các phép chia 4 836 cho 234 (dư 156); Thực hiện phép chia 234 cho 156, (dư 78). Vì 156 chia hết cho 78, suy ra ƯCLN(4 836, 234) = 78.

Thuật toán Euclid là thuật toán thông dụng được dùng để tìm ƯCLN. Thuật toán này được viết bởi Euclid - nhà toán học người Hi Lạp, sinh vào khoảng năm 325 trước Công nguyên.