§3. QUAN HỆ GIỮA CÁC CẠNH CỦA MỘT TAM GIÁC. BẤT ĐẲNG THỨC TAM GIÁC

A - MỤC TIÊU

HS cần đạt được :

– Nắm vững quan hệ giữa độ dài các cạnh của một tam giác ; từ đó biết được ba đoạn thẳng có độ dài như thế nào thì không thể là ba cạnh của một tam giác (điều kiện cần để ba đoạn thẳng là ba cạnh của một tam giác).

– Có kĩ năng vận dụng tính chất về quan hệ giữa cạnh và góc trong tam giác, về đường vuông góc với đường xiên.

– Luyện cách chuyển từ phát biểu một định lí thành một bài toán và ngược lại.

– Biết vận dụng bất đẳng thức tam giác để giải toán.

B - NHỮNG ĐIỂM CẦN LƯU Ý

– Trong bài này, GV chỉ giới thiệu cho HS khái niệm bất đẳng thức tam giác, trong khi đó, HS chưa biết thế nào là bất đẳng thức. Đến lớp 8, HS mới được học về bất đẳng thức. Do vậy, nếu có HS nào hỏi về khái niệm bất đẳng thức, GV chỉ cần trả lời sơ lược : Hai số khác nhau được nối với nhau bởi một trong các dấu ">" hoặc "<" gọi là một bất đẳng thức. Bất đẳng thức xuất hiện trong việc so sánh số.

– Tính chất về quan hệ giữa độ dài ba cạnh của một tam giác chỉ là *điều kiện cần* để nhận biết ba đoạn thẳng cho trước có là ba cạnh của một tam giác hay không. Sách không giới thiệu cho HS điều kiện đủ. Chính vì vậy, loại bài tập nhận biết ba đoạn thẳng cho trước có là ba cạnh của một tam giác hay không phải cho bằng số cụ thể và chỉ yêu cầu HS loại trừ các bộ ba đoạn thẳng không thoả mãn bất đẳng thức tam giác và vẽ hình trong trường hợp thoả mãn.

– Vì độ dài các bộ ba đoạn thẳng đều được cho bằng số cụ thể nên chỉ cần so sánh số lớn nhất với tổng hai số còn lại, hoặc số nhỏ nhất với hiệu hai số còn lại. Trong trường hợp chúng không thoả mãn bất đẳng thức tam giác thì sẽ có ngay kết luận : ba đoạn thẳng đã cho không thể là ba cạnh của một tam giác. Trong trường hợp chúng thoả mãn bất đẳng thức tam giác thì yêu cầu HS vẽ tam giác với ba cạnh là ba đoạn thẳng đã cho để đi đến kết luận : có tam giác với ba cạnh là ba đoạn thẳng đã cho.

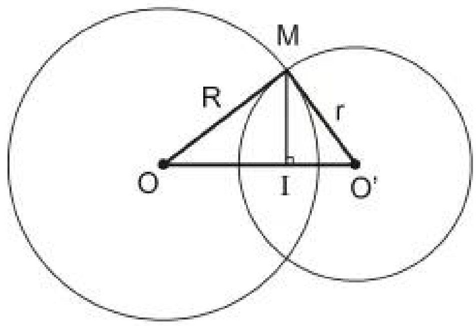
– Bây giờ, với ba số a, b, c thoả mãn điều kiện

$$a - b < c < a + b,$$

việc trả lời cho câu hỏi có hay không có một tam giác với ba cạnh có độ dài là a, b, c quy về việc xác định giao điểm của hai đường tròn bán kính a, b và có khoảng cách giữa hai tâm là c mà bài toán tổng quát của nó là chứng minh các hệ thức đặc trưng cho các vị trí tương đối giữa hai đường tròn. (Phần này chỉ dành cho GV).

Cho hai đường tròn (O ; R) và (O' ; r).

Nếu $O \equiv O'$ thì hai đường tròn không có điểm chung khi $R \neq r$ và hai đường tròn trùng nhau khi $R = r$.



Hình 13

Giả sử $O \neq O'$, $R \geq r$. Giao điểm M của hai đường tròn (O ; R) và (O' ; r) sẽ hoàn toàn xác định nếu xác định được chân I của đường vuông góc hạ từ M xuống đường thẳng OO' (h.13). Khi đó M là điểm thuộc đường vuông góc này sao cho OM = R và O'M = r. Vì $R \geq r$ nên $OM \geq O'M$, do đó $OI \geq O'I$, suy ra I thuộc tia OO'. Điểm I hoàn toàn được xác định bởi $OI = x \geq 0$. Đặt $y = O'I = |d - x| \geq 0$, với d là khoảng cách giữa hai tâm O và O'.

Giả sử hai đường tròn (O ; R) và (O' ; r) có điểm M chung. Khi đó OM = R và O'M = r. Theo định lí Py-ta-go, ta có :

$$IM^2 = R^2 - x^2 = r^2 - y^2 \geq 0. \qquad (*)$$

Đảo lại, giả sử có điểm I thuộc tia OO' sao cho $R^2 - OI^2 = r^2 - O'I^2 \geq 0$, tức là (*) được thoả mãn. Vì $R \geq x$ nên đường tròn (O ; R) có điểm chung M với đường thẳng qua I vuông góc với OO'. Vậy có M sao cho OM = R và $MI^2 = OM^2 - x^2 = O'M^2 - y^2$, từ đó

$$R^2 - x^2 = O'M^2 - y^2. \qquad (**)$$

Kết hợp (**) với giả thiết (*), ta có O'M = r. Tóm lại M là điểm chung của hai đường tròn (O ; R) và (O' ; r).

Theo cách đặt $y^2 = (d - x)^2$, ta có thể phát biểu kết quả của chứng minh trên như sau :

Có giao điểm M của hai đường tròn (O ; R), (O' ; r) tức là có điểm M sao cho OM = R, O'M = r khi và chỉ khi có $x \geq 0$ mà $R^2 - x^2 = r^2 - (d - x)^2 \geq 0$. Điều này tương đương với $x = \frac{1}{2d}(d^2 + R^2 - r^2)$ và $R - x = R - \frac{1}{2d}(d^2 + R^2 - r^2) \geq 0$ (rõ ràng $x \geq 0$ vì $R \geq r$). Điều kiện $R - \frac{1}{2d}(d^2 + R^2 - r^2) \geq 0$ được viết lại là

$$(d - R)^2 \leq r^2,$$

hay $-r \leq d - R \leq r$, tức là

$$R - r \leq d \leq R + r.$$

Kết luận. Hai đường tròn (O ; R) và (O' ; r) có điểm chung khi và chỉ khi

$$R - r \leq d \leq R + r.$$

Chúng có một điểm chung khi $d = R - r$ hoặc $d = R + r$. Chúng có hai điểm chung khi $R - r < d < R + r$.

Nếu $R - r > d$ hoặc $R + r < d$ thì chúng không có điểm chung nào.

Trở lại bài toán của ta : Giả sử ba đoạn thẳng AB, AC, BC lần lượt có độ dài c, b, a thoả mãn

$$b - c < a < b + c.$$

Khi đó, theo chứng minh trên, hai đường tròn (B ; b) ; (C ; c) sẽ có hai điểm chung A, A'. Do đó có tam giác ABC mà AB = c, AC = b, BC = a.

Vậy điều kiện $b - c < a < b + c$ là điều kiện cần và đủ để tồn tại một tam giác có độ dài ba cạnh lần lượt là a, b, c.

C - GỢI Ý DẠY HỌC

1. *Chuẩn bị của GV và HS*

• Ôn lại về quan hệ giữa cạnh và góc trong tam giác, quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên, quan hệ thứ tự trong tập số thực.

2. *Tình huống có vấn đề dẫn đến bài mới*

• Yêu cầu HS vẽ một tam giác với ba đoạn thẳng không thoả mãn bất đẳng thức tam giác. HS cho biết không vẽ được. Nguyên nhân của hiện tượng này là nội dung của bài mới.

3. *Các hoạt động*

Tiết 1 (lí thuyết). Chứng minh định lí, rút ra hệ quả.

a) Kiểm tra bài cũ : Đặt câu hỏi kiểm tra theo các vấn đề đã cho HS ôn lại trong phần chuẩn bị.

b) Tiến hành bài giảng theo trình tự SGK.

• Yêu cầu HS chuyển phát biểu định lí thành một bài toán cụ thể. Vẽ hình, viết giả thiết, kết luận.

• Trong chứng minh định lí, cần dẫn dắt cho HS thấy nhu cầu của việc lấy điểm D là để tạo ra một tam giác có một cạnh là BC, và một cạnh bằng AB + AC, từ đó so sánh chúng thông qua so sánh các góc đối diện.

Phần hệ quả của bất đẳng thức tam giác nên nói lướt, chủ yếu cho HS biết kết quả. Nếu có HS yêu cầu chứng minh thì hãy dừng lại và chứng minh dựa vào tính chất sau đây của quan hệ thứ tự trong tập số thực : Nếu $a > b$ thì $a + c > b + c$; $\forall a, b, c \in \mathbf{R}$.

Cho HS làm tại lớp bài tập 15, 16. Nếu còn thời gian thì cho làm tiếp bài 17.

Tiết 2. Chữa các bài tập trong phần luyện tập.

D - HƯỚNG DẪN GIẢI CÁC $\boxed{?}$ VÀ BÀI TẬP §3 SGK

$\boxed{?1}$ Không vẽ được.

$\boxed{?2}$

GT	ΔABC
KL	$AB + AC > BC$ $AB + BC > AC$ $AC + BC > AB$

?3 Không có tam giác với ba cạnh có độ dài 1cm, 2cm, 4cm vì bộ ba số 1, 2, 4 không thoả mãn bất đẳng thức tam giác.

Bài 15. a) Bộ ba này không thể là ba cạnh của một tam giác vì $2 + 3 < 6$.

b) Bộ ba này cũng không thể là ba cạnh của một tam giác vì $2 + 4 = 6$.

c) Bộ ba này có thể là ba cạnh của một tam giác (vẽ tam giác ABC với AB = 3cm, BC = 4cm, AC = 6cm).

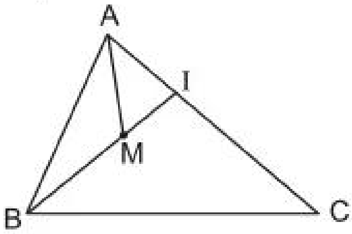
Bài 16. Theo tính chất các cạnh của một tam giác, ta có

$$AC - BC < AB < AC + BC. \qquad (*)$$

Thay số vào (*), ta có

$$7 - 1 < AB < 7 + 1$$

hay $6 < AB < 8$. Vì độ dài AB là một số nguyên nên AB = 7 cm. Tam giác ABC cân tại đỉnh A.



Hình 14

Bài 17. a) (h.14) Tam giác MAI có $MA < MI + IA$, cộng thêm MB vào hai vế của bất đẳng thức, ta được

$$MA + MB < MB + MI + IA$$

hay $$MA + MB < IB + IA. \qquad (1)$$

b) Tam giác IBC có $IB < IC + CB$, cộng thêm IA vào hai vế của bất đẳng thức này, ta được

$$IA + IB < IA + IC + CB \text{ hay } IA + IB < CA + CB \qquad (2)$$

c) Từ (1) và (2) suy ra $MA + MB < CA + CB$.

Bài 18. a) Vẽ được tam giác có độ dài ba cạnh là 2cm, 3cm, 4cm.

b) Không vẽ được tam giác có độ dài ba cạnh là 1cm ; 2cm ; 3,5cm vì $1 + 2 < 3{,}5$.

c) Không vẽ được tam giác vì $2{,}2 + 2 = 4{,}2$.

Bài 19. Gọi x là cạnh thứ ba của tam giác cân. Ta có

$$7{,}9 - 3{,}9 < x < 7{,}9 + 3{,}9$$

hay $4 < x < 11{,}8$. Từ đó x = 7,9 (cm) vì tam giác đã cho là tam giác cân. Vậy chu vi của tam giác là

$$7{,}9 + 7{,}9 + 3{,}9 = 19{,}7 \text{ (cm)}.$$

Bài 20. (h.15)

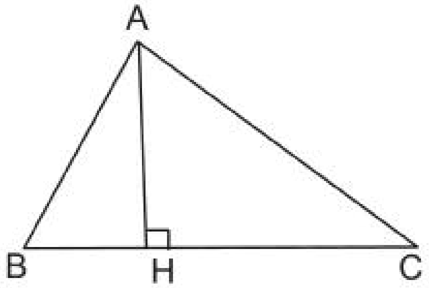
Tam giác ABH vuông tại H nên

AB > BH (1). Tương tự AC > CH (2) .

Từ (1) và (2) suy ra

AB + AC > BH + CH = BC.

Vậy AB + AC > BC.



Hình 15

b) Từ giả thiết BC là cạnh lớn nhất của tam giác ABC, ta có BC ≥ AB, BC ≥ AC. Suy ra BC + AC > AB và BC + AB > AC.

Bài 21. Địa điểm C phải tìm là giao của bờ sông gần khu dân cư và đường thẳng AB vì khi đó ta có AC + BC = AB ; còn trên bờ sông này , nếu dựng cột tại điểm D khác C thì theo bất đẳng thức tam giác, ta có : AD + BD > AB.

Bài 22. Tam giác ABC có 90 – 30 < BC < 90 + 30 hay 60 < BC < 120. Bởi vậy

a) Nếu đặt ở C máy phát sóng truyền thanh có bán kính hoạt động bằng 60 km thì thành phố B không nhận được tín hiệu.

b) Nếu đặt ở C máy phát sóng truyền thanh có bán kính hoạt động bằng 120 km thì thành phố B nhận được tín hiệu.

E - TÀI LIỆU BỔ SUNG

• Một số bài tập GV có thể tham khảo

1. Cho hai đoạn thẳng có độ dài a, b. Biết rằng với tam giác có độ dài ba cạnh là a + 5b, 5a + 6b và 3a + 2b. Hỏi rằng trong hai số a và b, số nào lớn hơn ?

Hướng dẫn : Theo bất đẳng thức tam giác, ta có :

$$(5a + 6b) < (a + 5b) + (3a + 2b)$$

hay $$5a + 6b < 4a + 7b.$$ Từ đó suy ra $a < b$.

2. Cho hai cạnh của một tam giác lần lượt có độ dài a, b. Hỏi chu vi của nó có thể lấy giá trị trong khoảng nào ?

Hướng dẫn : Gọi c là độ dài cạnh thứ ba của tam giác và giả sử a ≥ b. Khi đó, ta có :

$$a - b < c < a + b.$$

Suy ra $$a + b + a - b < a + b + c < a + b + a + b$$

hay $$2a < 2p < 2(a + b).$$

(p là nửa chu vi của tam giác)

GV có thể ra thêm cho HS các bài tập trong SBT Toán 7 tập hai. Riêng đối với HS khá, giỏi thì có thể ra các bài tập 26, 27, 28, 29, 30 (SBT Toán 7 tập hai, phần Hình học).

Lưu ý. Ở bài tập này có sử dụng điều kiện đủ nói trong mục B (không giới thiệu trong SGK). Vì thế, nếu ra cho HS bài tập này thì nên đổi câu hỏi : Hỏi chu vi của nó có giá trị trong khoảng nào ?

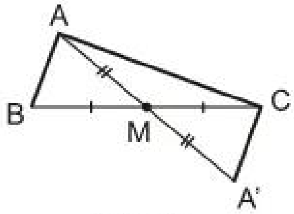
3. Chứng minh rằng độ dài đường trung tuyến AM của tam giác ABC thoả mãn :

$$AM < \frac{1}{2}(AB + AC).$$

Hướng dẫn (h. 16).

$$AM < \frac{1}{2}(AB + AC) \Leftrightarrow 2AM < AB + AC \qquad (*)$$

Để chứng minh (*), hãy tạo một tam giác mới có một cạnh bằng 2AM và hai cạnh kia lần lượt bằng AB và AC.



Hình 16

Chẳng hạn như hình 16, lấy điểm A' trên tia AM sao cho AM = A'M. Khi đó tam giác ACA' có AA' = 2AM, A'C = AB và AA' < AC + CA'. Suy ra :

$$2AM < AB + AC.$$

Ở bài tập này, không dùng điều kiện đủ nói trên.

4. Cho x, y, z là ba số dương tuỳ ý. Chứng minh rằng có tam giác mà các cạnh của nó có độ dài

$$a = x + y,\ b = y + z,\ c = z + x.$$

Hướng dẫn. Hãy chỉ ra

$$a - b < c < a + b.$$

Từ đó, theo điều kiện đủ đã chứng minh ở phần B, ta có đpcm.

5. Cho a, b, c là các độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng có các số dương x, y, z sao cho

$$a = x + y,\ b = y + z,\ c = z + x.$$

Hướng dẫn. Giải hệ ba phương trình để tìm x, y, z theo a, b, c. Sau đó sử dụng các bất đẳng thức tam giác để suy ra $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ (ở bài này, không dùng điều kiện đủ).

6. Nếu ba cạnh của một tam giác có độ dài là a, b, c và $a + b \geq 3c$ thì c là số bé nhất trong ba số a, b, c (ở bài này cũng không dùng điều kiện đủ).

Hướng dẫn. Giả sử $c > b$. Do $a < b + c$ nên $a + b < 2b + c$. Từ $c > b$ suy ra $a + b < 2b + c < 3c$!