§4. TÍNH CHẤT BA ĐƯỜNG TRUNG TUYẾN CỦA TAM GIÁC

A - MỤC TIÊU

HS cần đạt được :

– Nắm được khái niệm đường trung tuyến (xuất phát từ một đỉnh hoặc ứng với một cạnh) của tam giác và nhận thấy mỗi tam giác có ba đường trung tuyến.

– Luyện kĩ năng vẽ các đường trung tuyến của một tam giác.

– Thông qua thực hành cắt giấy và vẽ hình trên giấy kẻ ô vuông, HS phát hiện ra tính chất ba đường trung tuyến của tam giác (không yêu cầu HS chứng minh tính chất này), biết khái niệm trọng tâm của tam giác.

– Luyện kĩ năng sử dụng định lí về tính chất ba đường trung tuyến của tam giác để giải bài tập.

B - NHỮNG ĐIỂM CẦN LƯU Ý

– Không đặt vấn đề chứng minh định lí về tính chất đồng quy của ba đường trung tuyến của tam giác cho dù HS có yêu cầu, nếu không muốn đưa các kiến thức về các đoạn chắn giữa các cặp đường thẳng song song và đường trung bình của tam giác vào.

– Hình thành nội dung của định lí về tính chất ba đường trung tuyến của tam giác thông qua thực hành cắt giấy và vẽ hình trên giấy kẻ ô vuông. Cần yêu cầu HS vẽ theo đúng toạ độ SGK đã chọn để trọng tâm của tam giác là một điểm nguyên (tức là điểm có toạ độ nguyên). Từ đó HS mới lập được các tỉ số thông qua đếm ô. Nếu cần tiết kiệm thời gian thì có thể bỏ hoạt động thứ hai mà cho HS làm tiếp hoạt động thứ nhất bằng cách dùng compa để "đo" và hình thành tỉ số.

– Việc chứng minh các đoạn thẳng bằng nhau trên hình vẽ trong giấy kẻ ô vuông thường được thông qua việc chỉ ra các tam giác vuông có các cạnh góc vuông bằng nhau.

C - GỢI Ý DẠY HỌC

1. *Chuẩn bị của GV và HS*

Cho HS chuẩn bị trước mỗi em một tam giác bằng giấy và một mảnh giấy kẻ ô vuông mỗi chiều 10 ô.

Chuẩn bị cho HS về cách gấp giấy xác định trung điểm và vẽ trung điểm của một đoạn thẳng bằng thước chia khoảng.

2. *Nêu tình huống có vấn đề*

Tìm một điểm trong tam giác để từ đó nối với các đỉnh của tam giác ta được ba tam giác nhỏ có diện tích bằng nhau.

3. *Các hoạt động*

Tiết 1 (lí thuyết). Giới thiệu khái niệm đường trung tuyến của một tam giác ; đưa ra tính chất ba đường trung tuyến của tam giác.

Tiến hành bài giảng theo trình tự SGK.

• Trong khi làm việc với hình vẽ trên giấy kẻ ô vuông, có thể đưa ra những câu hỏi phụ, chẳng hạn : Tại sao E là trung điểm của cạnh AC và F là trung điểm của cạnh AB ? (Giải thích thông qua các tam giác vuông bằng nhau).

• Sau khi cho HS đếm dòng để nhận thấy AD là một đường trung tuyến của tam giác ABC và hình thành được các tỉ số

$$\frac{AG}{AD} = \frac{BG}{BE} = \frac{CG}{CF} = \frac{2}{3},$$

GV giới thiệu cho HS định lí về tính chất ba đường trung tuyến của tam giác.

• Giới thiệu khái niệm trọng tâm của tam giác.

• Cho HS làm nhanh hai bài tập 23, 24 bằng phiếu học tập do GV chuẩn bị trước. GV phát phiếu có in sẵn hai bài tập này và yêu cầu HS điền kết quả ngay vào phiếu.

Với phiếu học tập này, GV có thể đánh giá ngay được sự tiếp thu bài của HS.

• Các bài tập còn lại, cho HS về nhà chuẩn bị.

Tiết 2. Chữa các bài tập còn lại 25, 26, 27, 28, 29, 30.

• Để chữa được sáu bài tập trong một tiết, GV cần chuẩn bị kĩ (vẽ hình trước trên bìa và chỉ nên phát vấn HS tại chỗ ; nếu gọi HS lên bảng vẽ hình và trình bày lời giải, e rằng không có đủ thời gian).

• Liên quan tới bài tập 67 và tới vấn đề đặt ra ở đầu chương, ta xét vấn đề sau đây :

Trọng tâm G của tam giác ABC có phải là điểm duy nhất thoả mãn điều kiện sau không ?

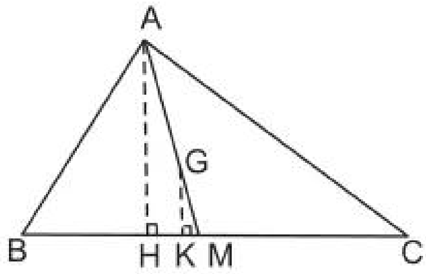
$$S_{\Delta ABG} = S_{\Delta BCG} = S_{\Delta CAG} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC}. \qquad (*)$$

(Tức là trọng tâm theo nghĩa diện tích có trùng với trọng tâm theo nghĩa là điểm chung của ba đường trung tuyến không ?).

Giả sử ta đã biết công thức tính diện tích tam giác. Khi đó, câu trả lời cho vấn đề trên là "đúng như thế".

Gọi G là điểm nằm trong tam giác ABC thoả mãn điều kiện (*) và M là giao điểm của tia AG và cạnh BC.

Từ (*) ta có AH = 3GK, suy ra $S_{\Delta ABM} = 3S_{\Delta GBM}$, nên $S_{\Delta ABG} = 2S_{\Delta GBM}$. Tương tự, $S_{\Delta ACG} = 2S_{\Delta GCM}$. Kết hợp với (*) ta có $S_{\Delta GBM} = S_{\Delta GCM}$, suy ra BM = CM hay M là trung điểm của BC. Do đó AM là một đường trung tuyến của tam giác ABC.



Hình 17

Hoàn toàn tương tự, ta cũng có BG (và CG) nằm trên đường trung tuyến của tam giác ABC. Vậy G là trọng tâm của tam giác ABC (h. 17).

Vấn đề này không trình bày cho HS, trừ khi có em thắc mắc.

D - HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP §4 SGK

Bài 23. Khẳng định đúng là $\frac{GH}{DH} = \frac{1}{3}$.

Bài 24. a) $MG = \frac{2}{3}MR$, $GR = \frac{1}{3}MR$, $GR = \frac{1}{2}MG$.

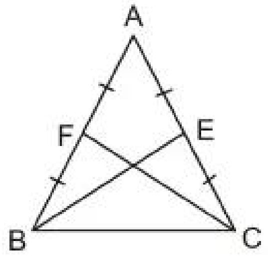
b) $NS = \frac{3}{2}NG$, NS = 3GS, NG = 2GS.

Bài 25. Tam giác vuông ABC có hai cạnh góc vuông AB = 3, AC = 4, do đó, theo định lí Py-ta-go, cạnh huyền BC = 5. Vậy độ dài đường trung tuyến AM xuất phát từ đỉnh góc vuông bằng 2,5.

Khoảng cách từ đỉnh A đến trọng tâm G của tam giác ABC bằng $\frac{2}{3}$ độ dài đường trung tuyến AM, do đó khoảng cách đó là $\frac{5}{3}$.

Bài 26. (h.18)

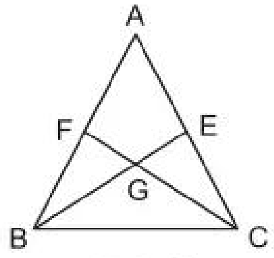
GT	ΔABC : AB = AC BE, CF là hai đường trung tuyến
KL	BE = CF



Hình 18

ΔABC cân tại A nên $\widehat{B} = \widehat{C}$. Vì AB = AC và E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh AC, AB nên CE = BF.

$\Delta BEC = \Delta CFB$ vì có BC chung, $\widehat{B} = \widehat{C}$, CE = BF (c.g.c). Từ đó suy ra BE = CF.



Hình 19

Bài 27. (h.19)

Do BE, CF là hai đường trung tuyến nên ta có

$$AE = EC,\ AF = FB. \qquad (1)$$

G là trọng tâm của tam giác ABC nên

$$BG = 2EG,\ CG = 2FG. \qquad (2)$$

Do BE = CF nên từ (2) có FG = EG, BG = CG.

$\Delta BFG = \Delta CEG$ (c.g.c) suy ra BF = CE, kết hợp với (1) ta có AB = AC. Vậy ΔABC cân tại A.

Bài 28. a) $\Delta DEI = \Delta DFI$ (c.c.c).

b) Từ a) ta có $\widehat{DIE} = \widehat{DIF}$. Mặt khác $\widehat{DIE} + \widehat{DIF} = 180^o$. Vậy $\widehat{DIE} = \widehat{DIF} = 90^o$ hay chúng là những góc vuông.

c) Các tam giác DEI và DFI vuông tại I, nên theo định lí Py-ta-go ta có :

$$DI = \sqrt{DE^2 - IE^2}\,.$$

Mặt khác, $IE = \frac{1}{2}EF$, suy ra $IE = \frac{10}{2} = 5$. Vậy

$$DI = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12\,.$$

Bài 29. Gọi AD, BE, CF là các đường trung tuyến của tam giác đều ABC. Làm tương tự như bài 26, ta có :

$$AD = BE = CF. \qquad (1)$$

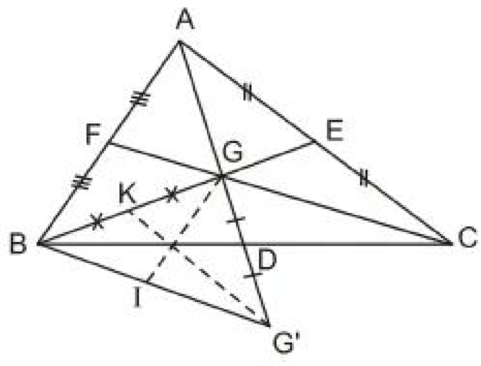
Mặt khác, do G là trọng tâm của tam giác ABC nên

$$GA = \frac{2}{3}AD,\ \ GB = \frac{2}{3}BE,\ \ GC = \frac{2}{3}CF. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra :

$$GA = GB = GC.$$

Bài 30. (h.20)



Hình 20

a) So sánh các cạnh của tam giác BGG' với các đường trung tuyến của tam giác ABC.

$$BG = \frac{2}{3}BE,\ GG' = \frac{2}{3}AD,\ G'B = \frac{2}{3}CF$$

(do ΔBDG' = Δ CDG (c. g. c)).

b) So sánh các đường trung tuyến của tam giác BGG' với các cạnh của tam giác ABC.

- $BD = \frac{1}{2}BC$ do D là trung điểm của BC.

- $\Delta KGG' = \Delta EGA$ (c.g.c) $\Rightarrow G'K = AE = \frac{1}{2}AC$.

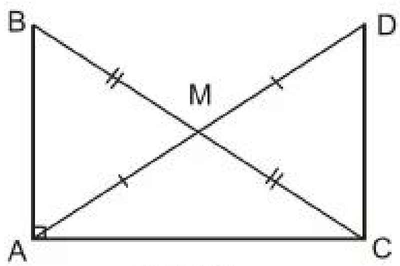
$\Delta GDC = \Delta G'DB$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{GCD} = \widehat{G'BD} \Rightarrow GC \parallel BG' \Rightarrow \widehat{FGB} = \widehat{G'BG}$ (1).

- $BG' = GC\ \left(= \frac{2}{3}CF\right) \Rightarrow BI = \frac{1}{2}BG' = \frac{1}{2}GC = GF$ (2). Từ (1) và (2) suy ra

$\Delta FGB = \Delta IBG$ (c.g.c), suy ra $GI = BF = \frac{1}{2}AB$.

E - TÀI LIỆU BỔ SUNG

1. Chứng minh đường trung tuyến xuất phát từ đỉnh góc vuông của một tam giác vuông bằng một nửa cạnh huyền (h.21) :



Hình 21

Kéo dài đường trung tuyến AM một đoạn MD, sao cho MD = AM.

ΔAMB = ΔDMC (c.g.c) nên $\widehat{ABM} = \widehat{DCM}$ và AB = CD.

AB // CD do $\widehat{ABM} = \widehat{DCM}$, suy ra $\widehat{ACD} = \widehat{CAB} = 90^o$.

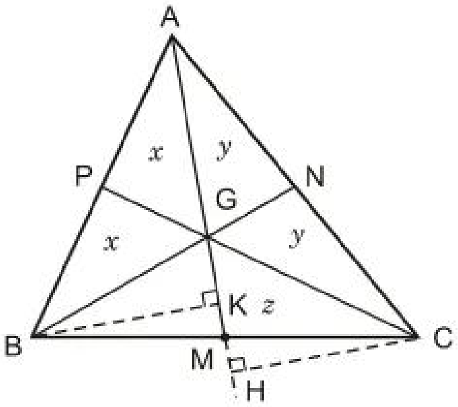
$\Delta ABC = \Delta CDA$ (c.g.c), vậy BC = AD, suy ra :

$$AM = BM = CM.$$

2. Đặt một miếng bìa hình tam giác lên giá nhọn tại trọng tâm của tam giác thì nó nằm thăng bằng trên giá nhọn bởi vì : Có thể coi miếng bìa là đồng chất, mặt khác, nối trọng tâm của tam giác với ba đỉnh của nó thì ta được ba tam giác nhỏ có diện tích như nhau (BT 67).

Tổng quát. Đặt miếng kim loại đồng chất hình tam giác lên giá nhọn tại trọng tâm của tam giác thì nó nằm thăng bằng.

3. Ta có thể dùng công thức tính diện tích tam giác để "chứng minh" định lí về tính chất ba đường trung tuyến của tam giác.



Hình 22

Lưu ý rằng, ở đây giả sử đã có khái niệm diện tích và công thức tính diện tích tam giác. Do đó, "chứng minh" này chỉ là một minh hoạ cho định lí.

"Chứng minh" định lí : Ba đường trung tuyến của một tam giác cùng đi qua một điểm. Điểm đó cách mỗi đỉnh một khoảng bằng $\frac{2}{3}$ độ dài đường trung tuyến đi qua đỉnh ấy. (h.22)

Hai đường trung tuyến BN, CP cắt nhau tại G (nằm bên trong tam giác ABC).

Vì PA = PB nên $S_{\Delta APC} = S_{\Delta BPC}$ và $S_{\Delta APG} = S_{\Delta BPG}$. Đặt $x = S_{\Delta APG} = S_{\Delta BPG}$.

Vì NA = NC nên $S_{\Delta ANB} = S_{\Delta CNB}$ và $S_{\Delta ANG} = S_{\Delta CNG}$.

Đặt $y = S_{\Delta ANG} = S_{\Delta CNG}$.

Vậy $\frac{S_{\Delta ABC}}{2} = S_{\Delta APC} = S_{\Delta ANB}$, suy ra x = y.

Giả sử đường thẳng AG cắt cạnh BC tại M. Do x = y, nên $S_{\Delta ABG} = S_{\Delta ACG}$, suy ra BK = CH. Vậy $\Delta BKM = \Delta CHM$ (g.c.g), do đó BM = CM, nghĩa là AM là đường trung tuyến của tam giác ABC, hay ba đường trung tuyến của tam giác ABC đồng quy.

Từ M là trung điểm của cạnh BC, ta cũng suy ra $S_{\Delta ABM} = S_{\Delta ACM}$, $S_{\Delta BGM} = S_{\Delta CGM}$ (đặt bằng z); kết hợp với x = y ta có x = y = z. Từ đó suy ra $S_{\Delta ABG} = 2S_{\Delta MBG}$. Mặt khác hai tam giác ABG, MBG có chung đường cao BK, do đó AG = 2GM. Tương tự ta cũng có BG = 2GN, CG = 2GP.

4. Có thể ra thêm các bài tập 35, 36, 37, 38, 39 (SBT Toán 7 tập hai, phần Hình học) cho HS khá, giỏi.