§6. TÍNH CHẤT BA ĐƯỜNG PHÂN GIÁC CỦA TAM GIÁC

A - MỤC TIÊU

HS cần đạt được :

– Biết khái niệm đường phân giác của tam giác qua hình vẽ và biết mỗi tam giác có ba đường phân giác.

– Tự chứng minh được định lí : "Trong một tam giác cân, đường phân giác xuất phát từ đỉnh đồng thời là đường trung tuyến ứng với cạnh đáy" dưới sự hướng dẫn của GV và sử dụng được định lí này để giải bài tập.

– Thông qua gấp hình, HS nhận thấy ba đường phân giác của một tam giác cùng đi qua một điểm. Sau đó áp dụng hai định lí của §5 để chứng minh định lí về sự đồng quy của ba đường phân giác của một tam giác ; đồng thời chỉ rõ tính chất của điểm đồng quy này là cách đều ba cạnh của tam giác.

B - NHỮNG ĐIỂM CẦN LƯU Ý

– Gấp hình, quan sát để phát hiện ra tính chất của hình là những hoạt động thực hành ; các kết quả của những hoạt động này chỉ mang tính trực quan. Chúng ta cần dùng những kiến thức đã học để chứng minh chúng là đúng hoặc bác bỏ nếu chúng sai.

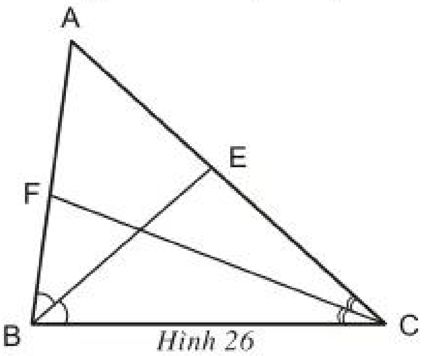
Tuy nhiên, gấp hình đôi khi cũng gợi ý cho ta cách chứng minh định lí. Ở bài này, nếu gấp hình thêm để xác định các khoảng cách từ điểm đồng quy của ba đường phân giác đến ba cạnh của nó thì ta sẽ thấy có hai khoảng cách cùng bằng khoảng cách thứ ba, đó chính là hướng chứng minh định lí này.

– Không đi sâu vào vị trí của chân đường vuông góc kẻ từ I đến ba cạnh của tam giác. Chứng minh trên hình vẽ.

– Đây là lần đầu tiên ta chứng minh ba đường thẳng đồng quy, do đó cần chỉ rõ cách làm cho HS. Chẳng hạn, người ta thường chứng minh hai đường đã cho cắt nhau tại một điểm và chứng minh tiếp đường thứ ba cũng đi qua điểm đó.

Với định lí 2 của bài này, ta đã cho HS công nhận hai đường phân giác bất kì của một tam giác bao giờ cũng cắt nhau tại một điểm nằm bên trong tam giác, và chỉ cho HS chứng minh đường phân giác thứ ba cũng đi qua giao điểm này bằng cách chứng minh đường thẳng nối đỉnh thứ ba của tam giác với giao điểm này cũng là đường phân giác của tam giác.

Sau đây ta sẽ chứng minh hai đường phân giác bất kì của một tam giác bao giờ cũng cắt nhau (chứng minh này không trình bày cho HS).



Hình 26

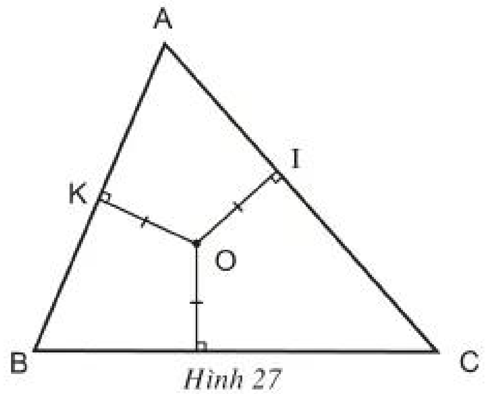
Đường phân giác BE chia mặt phẳng thành hai nửa mặt phẳng, một nửa mặt phẳng chứa điểm F còn nửa mặt phẳng kia chứa điểm C. Bởi vậy, đoạn thẳng CF cắt đường thẳng BE. Tương tự, đoạn thẳng BE cắt đường thẳng CF. Từ đó, hai đoạn thẳng BE, CF cắt nhau tại một điểm (h. 26) (ở đây chúng ta sử dụng một tính chất dễ hình dung về quan hệ thứ tự : đoạn thẳng nối hai điểm thuộc hai nửa mặt phẳng đối nhau luôn cắt bờ chung tại một điểm, còn đoạn thẳng nối hai điểm của một nửa mặt phẳng không cắt bờ).

Chú ý. Điều chứng minh trên đúng cho mọi đoạn nối B với một điểm E thuộc đoạn AC và nối C với một điểm F thuộc đoạn AB.

– Định lí về tính chất ba đường phân giác của một tam giác mới chỉ khẳng định giao điểm chung của ba đường phân giác của một tam giác cách đều ba cạnh của nó. Vấn đề ngược lại đặt ra như sau : "Điểm nằm trong tam giác, cách đều ba đường thẳng chứa ba cạnh của nó có là giao điểm chung của ba đường phân giác của tam giác hay không ?"

Câu trả lời cho vấn đề trên là : "có". Ta chứng minh điều này như sau (h.27)

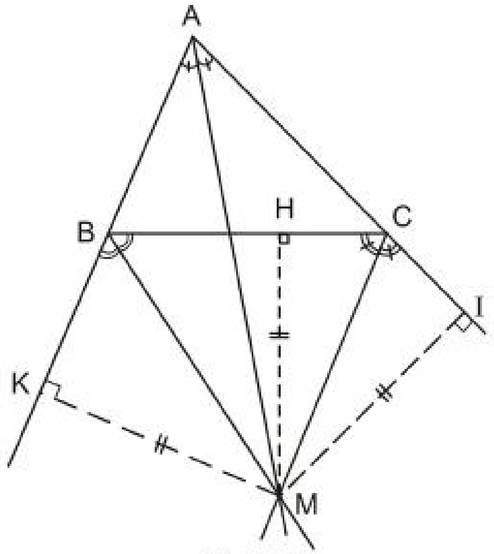
O nằm trong tam giác nên O nằm trong góc BAC, hơn nữa O cách đều hai tia AB và AC nên O nằm trên tia phân giác của góc A.



Hình 27

Tương tự, O nằm trên tia phân giác của góc B và của góc C.

Vậy O là điểm chung của ba đường phân giác của tam giác ABC.



Hình 28

– Điểm nằm ngoài tam giác, cách đều ba đường thẳng chứa ba cạnh của tam giác đó, là điểm chung của tia phân giác trong và hai tia phân giác ngoài (tia phân giác của góc ngoài) của tam giác ((h.28) chứng minh tương tự như trên).

Tuỳ đối tượng HS trong lớp mà GV có thể cung cấp cho HS kiến thức này.

Lưu ý. Thực ra ta chỉ mới xét điểm nằm trong tam giác ABC cách đều ba đường thẳng chứa ba cạnh của tam giác, điểm nằm ngoài tam giác ABC, nhưng ở trong góc BAC, cách đều ba đường thẳng chứa ba cạnh của tam giác (tức là chưa xét các hình chiếu vuông góc của các điểm đó xuống các đường thẳng chứa cạnh là thuộc cạnh hay không. Tuy có thể chứng minh không khó khăn, nhưng ngoài yêu cầu !).

C - GỢI Ý DẠY HỌC

1. *Chuẩn bị của GV và HS*

– Yêu cầu HS ôn về tính chất của tia phân giác của một góc, khái niệm tam giác cân, khái niệm đường trung tuyến của tam giác và các trường hợp bằng nhau của hai tam giác.

– Chuẩn bị mỗi người một tam giác bằng giấy và ôn cách gấp hình xác định tia phân giác của góc.

– Chuẩn bị mỗi người một thước kẻ có hai lề song song.

2. *Đặt vấn đề vào bài mới*

Tìm một điểm ở trong tam giác và cách đều ba cạnh của tam giác, liên hệ với bài tập 43 cho thấy ý nghĩa thực tế của vấn đề.

3. *Các hoạt động*

Tiết 1. (lí thuyết) gồm các nội dung

• Giới thiệu khái niệm đường phân giác của tam giác.

• Hướng dẫn cho HS chứng minh nhanh tính chất của đường phân giác xuất phát từ đỉnh của một tam giác cân.

• Thực hành, giới thiệu và chứng minh định lí.

a) Kiểm tra bài cũ

– Vẽ tia phân giác Oz của một góc xOy bằng thước hai lề.

– Lấy một điểm M trên Oz, vẽ các khoảng cách MA, MB từ điểm M lần lượt đến OA và OB.

– Dựa vào kết luận của định lí 1, §5 ta suy ra được điều gì ?

– Nêu giả thiết, kết luận của định lí 2, §5.

b) Tiến hành bài giảng theo trình tự SGK

– Nếu có thời gian cho HS gấp thêm hình để xác định khoảng cách từ điểm chung của ba đường phân giác đến ba cạnh của tam giác và gợi ý cho HS phát hiện ra trong ba nếp gấp khoảng cách thì có hai nếp gấp cùng bằng nếp gấp thứ ba.

– Để ý đến các lưu ý trong phần B khi tiến hành bài giảng.

– Cho HS làm các bài tập 36, 38.

– Chuẩn bị phiếu học tập cho HS trong đó có in sẵn bài tập 37. Cuối giờ phát phiếu, yêu cầu HS trả lời ngay vào phiếu để GV đánh giá kết quả bài học.

Tiết 2 (luyện tập). Chữa các bài tập 39, 40, 41, 42, 43.

Với bài 43, có thể HS chỉ tìm ra một địa điểm, GV có thể hướng dẫn các em áp dụng bài tập 32 để tìm ra địa điểm thứ hai.

D - HƯỚNG DẪN GIẢI CÁC $\boxed{?}$ VÀ BÀI TẬP §6 SGK

$\boxed{?1}$ Ba nếp gấp đi qua cùng một điểm.

$\boxed{?2}$

GT	ΔABC Hai đường phân giác BE, CF cắt nhau tại I $IH \perp BC$, $IK \perp AC$, $IL \perp AB$
KL	AI là tia phân giác của góc A $IH = IK = IL$

Bài 36. Xem mục B, lưu ý thứ tự.

Bài 37. Vẽ hai đường phân giác của hai góc, chẳng hạn của các góc M và N. Điểm K là giao điểm của hai đường phân giác này.

Bài 38. $\widehat{KOL} = 180^o - \dfrac{\widehat{K} + \widehat{L}}{2}$;

$\widehat{K} + \widehat{L} = 180^o - \widehat{I} = 180^o - 62^o = 118^o$.

Vậy $\widehat{KOL} = 180^o - 59^o = 121^o$.

Vì O là giao điểm của hai đường phân giác xuất phát từ K và L của tam giác IKL nên theo định lí về ba đường phân giác của tam giác , ta có IO là tia phân giác của góc I. Vậy $\widehat{KIO} = \dfrac{\widehat{I}}{2} = 31^o$.

Điểm O là điểm chung của ba đường phân giác của tam giác nên cũng theo định lí 2 về ba đường phân giác của tam giác, điểm O cách đều ba cạnh của tam giác IKL.

Bài 39. a) $\Delta ABD = \Delta ACD$ (c.g.c).

b) Từ a) suy ra BD = CD, do đó ΔBCD cân tại D, suy ra $\widehat{DBC} = \widehat{DCB}$.

Bài 40. Tam giác ABC cân tại A nên, theo định lí về tính chất của tam giác cân ở §6, ta có đường trung tuyến AM xuất phát từ đỉnh A cũng đồng thời là đường phân giác xuất phát từ đỉnh đó.

Trọng tâm G là giao của ba đường trung tuyến của tam giác nên $G \in AM$.

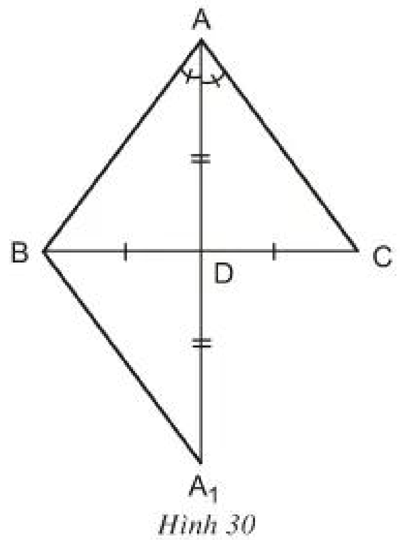
Điểm I nằm bên trong tam giác ABC và cách đều ba cạnh của tam giác đó nên I nằm bên trong góc A và cách đều hai tia AB, AC. Bởi vậy, I thuộc tia phân giác của góc A hay $I \in AM$.

Tóm lại A, G, I cùng nằm trên một đường thẳng.

Bài 41. Tam giác đều là tam giác cân tại cả ba đỉnh, do đó, theo tính chất của tam giác cân ở §6, cả ba đường trung tuyến của nó đồng thời cũng là ba phân giác của tam giác. Bởi vậy trọng tâm của tam giác đều đồng thời là điểm chung của ba đường phân giác nên trọng tâm của tam giác đều cách đều ba cạnh của tam giác đó.

Bài 42. (h.30) Kéo dài đường trung tuyến AD một đoạn DA_1 sao cho

$$AD = DA_1.$$



Hình 30

E - TÀI LIỆU BỔ SUNG

Đối với HS khá, giỏi, có thể ra thêm các bài tập 47, 50, 51, 52, 53 (SBT Toán 7 tập hai, phần Hình học).

Ta có $\Delta ADC = \Delta A_1DB$ (c.g.c), nên

$$AC = A_1B \qquad (1)$$

$$\widehat{CAD} = \widehat{BA_1D} \qquad (2)$$

Mặt khác, theo giả thiết $\widehat{CAD} = \widehat{BAD}$; kết hợp với (2) suy ra $\widehat{BAD} = \widehat{BA_1D}$. Vậy ΔBAA_1 cân tại B, do đó $AB = A_1B$; kết hợp với (1) ta có AC = AB hay tam giác ABC cân tại A.

Lưu ý. Với bài này HS có thể mắc sai lầm sau : kẻ các đường vuông góc DE, DF lần lượt tới hai tia AB, AC và mặc nhiên cho rằng E luôn thuộc cạnh AB và F luôn thuộc cạnh AC. Nhưng nếu $\widehat{ABC}$ là góc tù thì E nằm ngoài cạnh BC (ta chưa loại trừ được $\widehat{ABC}$ và $\widehat{ACB}$ có thể là những góc tù).

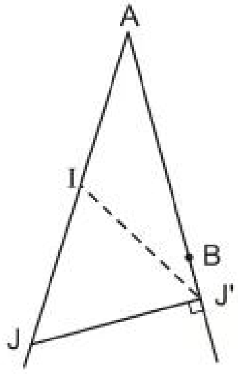
Bài 43. Có hai điểm cách đều hai con đường và con sông :

– Điểm thứ nhất là điểm chung của ba đường phân giác của tam giác do hai con đường và con sông tạo nên (điểm nằm trong tam giác).

– Điểm thứ hai, theo bài tập 32, là điểm chung của tia phân giác của góc hợp bởi hai con đường và hai góc ngoài của tam giác tạo bởi con sông và hai con đường (điểm nằm ngoài tam giác).

– Có thể hỏi để HS nhận thấy bằng trực giác : điểm thứ nhất là địa điểm mà các khoảng cách này ngắn nhất (bài giải của HS có thể dừng ở đây).

Tuy nhiên, thực chất của vấn đề này là chứng minh bán kính đường tròn nội tiếp tam giác nhỏ hơn bán kính đường tròn bàng tiếp mà ta có thể dùng công thức tính diện tích tam giác để chứng minh.



Hình 31

Cho tam giác ABC. Gọi bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC là r và bán kính đường tròn bàng tiếp góc A là r_a. Ta phải chứng minh $r < r_a$.

Gọi I và J lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp và tâm đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác ABC. Ta có A, I, J thẳng hàng và I ở giữa A, J. Gọi J' là chân đường vuông góc kẻ từ J đến đường thẳng AB (h.31).

Nối đoạn thẳng IJ'. Vì I ở giữa A và J nên $S_{\Delta AIJ'} < S_{\Delta AJJ'}$. Từ đó

$$\frac{1}{2}AJ'.r < \frac{1}{2}AJ'.r_a, \text{ suy ra } r < r_a.$$