

## B. ĐỀ BÀI

### §1. BẤT ĐẲNG THỨC VÀ CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

**4.1.** a) Chứng minh rằng  $a^2 + b^2 - ab \geq 0$  với mọi  $a, b \in \mathbb{R}$ .

Khi nào đẳng thức xảy ra ?

b) Chứng minh rằng nếu  $a \geq b$  thì  $a^3 - b^3 \geq ab^2 - a^2b$  với mọi  $a, b \in \mathbb{R}$ .

**4.2.** Chứng minh rằng

a)  $a^4 + b^4 \geq a^3b + ab^3$  với mọi  $a, b \in \mathbb{R}$ .

b)  $(a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$  với mọi  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .

**4.3.** Cho  $a, b, c$  là ba số dương. Chứng minh rằng

$$\text{a) Nếu } a < b \text{ thì } \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}; \quad \text{b) Nếu } a > b \text{ thì } \frac{a}{b} > \frac{a+c}{b+c}.$$

**4.4.** Cho  $a, b, c, d$  là bốn số dương và  $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ . Chứng minh rằng :

$$\text{a) } \frac{a+b}{b} < \frac{c+d}{d}; \quad \text{b) } \frac{a+b}{a} > \frac{c+d}{c}.$$

**4.5.** Cho  $b, d$  là hai số dương và  $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ . Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}.$$

**4.6.** Cho  $a, b, c, d$  là bốn số dương. Chứng minh rằng

$$1 < \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{b+c+d} + \frac{c}{c+d+a} + \frac{d}{d+a+b} < 2.$$

**4.7.** Chứng minh rằng

$$x^n + 1 \geq 0 \text{ với mọi } x \geq -1, n \in \mathbb{N}^*.$$

**4.8.** Cho  $a, b, c$  là số đo ba cạnh ;  $A, B, C$  là số đo (độ) ba góc tương ứng của một tam giác. Chứng minh rằng :

a)  $(a - b)(A - B) \geq 0$  ; khi nào đẳng thức xảy ra ?

b)  $60^\circ \leq \frac{aA + bB + cC}{a+b+c} < 90^\circ$  ; khi nào đẳng thức xảy ra ?

(Gợi ý. Sử dụng bất đẳng thức tam giác).

**4.9.** a) Chứng minh rằng, với mọi số nguyên dương  $k$  ta đều có

$$\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}} < 2\left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right).$$

b) *Áp dụng.* Chứng minh rằng

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}} < 2.$$

**4.10.** a) Cho  $k > 0$ , chứng minh  $\frac{1}{k^3} < \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ .

b) Từ kết quả trên, hãy suy ra

$$\frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{n^3} < 2.$$

**4.11.** a) Cho hai số  $a, b$  ( $a \neq b$ ). Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$f(x) = (x - a)^2 + (x - b)^2.$$

b) Cho ba số  $a, b, c$  đôi một khác nhau. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$g(x) = (x - a)^2 + (x - b)^2 + (x - c)^2.$$

**4.12.** Với các số  $a, b, c$  tùy ý, chứng minh các bất đẳng thức sau và nêu rõ đẳng thức xảy ra khi nào ?

a)  $|a| + |b| \geq |a - b|$  ;

b)  $|a + b + c| \leq |a| + |b| + |c|$

**4.13.** Với các số  $a, b, c$  tùy ý, chứng minh bất đẳng thức

$$|a - b| + |b - c| \geq |a - c|.$$

**4.14.** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$f(x) = |x - 2006| + |x - 2007|.$$

**4.15.** a) Chứng minh rằng  $x + |x| \geq 0$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$ .

b) Chứng minh rằng  $\sqrt{x + \sqrt{x^2 - x + 1}}$  xác định với mọi  $x \in \mathbb{R}$ .

**4.16.** Để chứng minh  $x(1 - x) \leq \frac{1}{4}$  với mọi  $x$ , bạn An đã làm như sau :

Áp dụng bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân cho hai số  $x$  và  $1 - x$ , ta có

$$\sqrt{x(1 - x)} \leq \frac{x + 1 - x}{2} = \frac{1}{2}.$$

Do đó

$$x(1 - x) \leq \frac{1}{4}.$$

Theo em, bạn An giải như thế đúng hay sai, vì sao ? Em giải bài này như thế nào ?

**4.17.** Cho ba số không âm  $a, b, c$ . Chứng minh các bất đẳng thức sau và chỉ rõ đẳng thức xảy ra khi nào :

$$\text{a)} (a+b)(ab+1) \geq 4ab; \quad \text{b)} (a+b+c)(ab+bc+ca) \geq 9abc.$$

**4.18.** Cho ba số dương  $a, b, c$ , chứng minh rằng :

$$\left(1 + \frac{a}{b}\right)\left(1 + \frac{b}{c}\right)\left(1 + \frac{c}{a}\right) \geq 8.$$

**4.19.** Chứng minh rằng : Nếu  $0 < a < b$  thì  $a < \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < b$ .

**4.20.** Tìm giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau

$$\text{a)} f(x) = x^2 + \frac{16}{x^2}; \quad \text{b)} g(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{1-x} \text{ với } 0 < x < 1.$$

**4.21.** Cho  $a > 0$ , hãy tìm giá trị lớn nhất của

$$y = x(a - 2x)^2 \text{ với } 0 \leq x \leq \frac{a}{2}.$$

**4.22.** Cho một tấm tôn hình chữ nhật có kích thước  $80 \text{ cm} \times 50 \text{ cm}$ . Hãy cắt đi ở bốn góc vuông những hình vuông bằng nhau để khi gấp lại theo mép cắt thì được một cái hộp (không nắp) có thể tích lớn nhất.

**4.23.** Chứng minh rằng

$$\text{a)} \text{Nếu } x^2 + y^2 = 1 \text{ thì } |x + 2y| \leq \sqrt{5};$$

$$\text{b)} \text{Nếu } 3x + 4y = 1 \text{ thì } x^2 + y^2 \geq \frac{1}{25}.$$

**4.24.** Cho  $a, b, c$  là ba số dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$A = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}.$$

**4.25.** Trên mặt phẳng toạ độ  $Oxy$ , vẽ đường tròn tâm  $O$  có bán kính  $R$  ( $R > 0$ ). Trên các tia  $Ox$  và  $Oy$  lần lượt lấy hai điểm  $A$  và  $B$  sao cho đường thẳng  $AB$  luôn tiếp xúc với đường tròn đó.

Hãy xác định toạ độ của  $A$  và  $B$  để tam giác  $OAB$  có diện tích nhỏ nhất.