§3. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA CÁC GÓC (CUNG) CÓ LIÊN QUAN ĐẶC BIỆT

6.32. Đơn giản biểu thức :

a) $\cos\left(\alpha - \dfrac{\pi}{2}\right) + \sin(\alpha - \pi)$;

b) $\cos(\pi - \alpha) + \sin\left(\alpha + \dfrac{\pi}{2}\right)$;

c) $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) + \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) - \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + \alpha\right) - \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + \alpha\right)$;

d) $\cos\left(\dfrac{3\pi}{2} - \alpha\right) - \sin\left(\dfrac{3\pi}{2} - \alpha\right) + \cos\left(\alpha - \dfrac{7\pi}{2}\right) - \sin\left(\alpha - \dfrac{7\pi}{2}\right)$;

e) $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) + \cos(\pi - \alpha) + \cos\left(\dfrac{3\pi}{2} - \alpha\right) + \cos(2\pi - \alpha)$;

f) $\sin\left(\frac{5\pi}{2} - \alpha\right) - \cos\left(\frac{13\pi}{2} - \alpha\right) - 3\sin(\alpha - 5\pi) - 2\sin\alpha - \cos\alpha$;

g) $\cos(5\pi + \alpha) - 2\sin\left(\frac{11\pi}{2} - \alpha\right) - \sin\left(\frac{11\pi}{2} + \alpha\right)$.

6.33. Chứng minh rằng với mọi α ta có :

a) $\sin\left(\frac{5\pi}{4} + \alpha\right) = -\sin\left(\frac{3\pi}{4} - \alpha\right)$;

b) $\cos\left(\alpha - \frac{2\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)$;

c) $\cos\left(\alpha - \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{3} + \alpha\right)$.

6.34. Không sử dụng máy tính và bảng số, hãy tính :

a) $\sin 315^o$; $\cos 930^o$; $\tan 405^o$; $\cos 750^o$; $\sin 1140^o$;

b) $\cos 630^o - \sin 1470^o - \cot 1125^o$;

c) $\cos 4455^o - \cos 945^o + \tan 1035^o - \cot(-1500^o)$.

6.35. Tính

a) $\cos\frac{\pi}{9} + \cos\frac{2\pi}{9} + ... + \cos\frac{8\pi}{9}$;

b) $\sin^2\frac{\pi}{3} + \sin^2\frac{\pi}{6} + \sin^2\frac{\pi}{9} + \sin^2\frac{2\pi}{9} + \sin^2\frac{5\pi}{18} + \sin^2\frac{7\pi}{18}$;

c) $\cos^2\frac{\pi}{3} + \cos^2\frac{5\pi}{6} + \cos^2\frac{\pi}{9} + \cos^2\frac{11\pi}{18} + \cos^2\frac{13\pi}{18} + \cos^2\frac{2\pi}{9}$;

d) $\cos\frac{\pi}{5} + \cos\frac{2\pi}{5} + ... + \cos\frac{9\pi}{5}$;

e) $\sin\frac{\pi}{5} + \sin\frac{2\pi}{5} + ... + \sin\frac{9\pi}{5}$.

6.36. Giả sử trên đường tròn lượng giác, điểm xác định bởi số α nằm trong góc phần tư I, II, III, hay IV của hệ toạ độ vuông góc gắn với đường tròn đó (không nằm trên các trục toạ độ).

Khi đó điểm xác định bởi các số : $\alpha + \frac{\pi}{2}$; $\alpha + \pi$; $\alpha - \frac{\pi}{2}$; $-\alpha$; $-\alpha + \frac{\pi}{2}$; $-\alpha + \pi$ nằm trong góc phần tư nào ? Điền vào bảng sau :

Điểm xác định bởi	Nằm trong góc phần tư			
α	I	II	III	IV
$\alpha+\dfrac{\pi}{2}$	II			
$\alpha+\pi$				
$\alpha-\dfrac{\pi}{2}$				
$-\alpha$				
$-\alpha+\dfrac{\pi}{2}$				
$-\alpha+\pi$				

6.37. a) Trên đường tròn định hướng tâm O cho ba điểm M, N, P. Chứng minh rằng M, N là hai điểm đối xứng nhau qua đường thẳng OP khi và chỉ khi sđ(OP, OM) + sđ$(OP, ON) = k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

b) Trên đường tròn lượng giác, xét các điểm M, N, P xác định theo thứ tự bởi các số α, β, γ. Chứng minh rằng M, N là hai điểm đối xứng nhau qua đường thẳng OP khi và chỉ khi $\alpha+\beta=2\gamma+k2\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$.

c) Tìm điều kiện để hai điểm M, N trên đường tròn lượng giác xác định theo thứ tự bởi các số α, β đối xứng nhau qua đường phân giác của góc phần tư II (và IV) của hệ toạ độ vuông góc gắn với đường tròn lượng giác.

d) Hỏi các điểm trên đường tròn lượng giác xác định theo thứ tự bởi các số $\dfrac{\pi}{4}$; $\dfrac{\pi}{2}$; $\dfrac{5\pi}{6}$; $\dfrac{13\pi}{12}$, có phải là các đỉnh của một hình thang cân hay không ?

6.38. Chứng minh rằng, với mọi α, với mọi số nguyên k, ta có :

$$\sin\left(\alpha+k\frac{\pi}{2}\right)=\begin{cases}(-1)^l\sin\alpha & \text{nếu } k=2l\\ (-1)^l\cos\alpha & \text{nếu } k=2l+1\,;\end{cases}$$

$$\cos\left(\alpha+k\frac{\pi}{2}\right)=\begin{cases}(-1)^l\cos\alpha & \text{nếu } k=2l\\ (-1)^{l+1}\sin\alpha & \text{nếu } k=2l+1\,;\end{cases}$$

$$\tan\left(\alpha+k\frac{\pi}{2}\right)=\begin{cases}\tan\alpha & \text{nếu } k=2l\\ -\cot\alpha & \text{nếu } k=2l+1\end{cases}$$ (khi các biểu thức này có nghĩa).

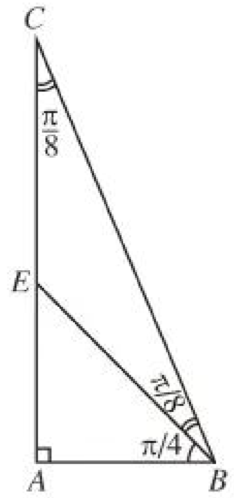
6.39. Tính $\cos\frac{\pi}{8}$ và $\sin\frac{\pi}{8}$ bằng "phương pháp hình học" như sau :

Xét tam giác vuông ABC với

$\widehat{A} = \frac{\pi}{2}; \widehat{C} = \frac{\pi}{8}$ thì $\cos\frac{\pi}{8} = \frac{AC}{BC}$; $\sin\frac{\pi}{8} = \frac{AB}{BC}$.

Bằng cách xét điểm E trên cạnh AC sao cho $AE = AB$ (h. 6.4), hãy chứng minh rằng :

$$\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}, \sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$



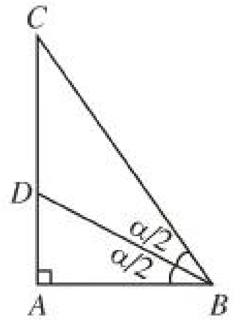
Hình 6.4

6.40. Chứng minh công thức $\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$

(với $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$) bằng "phương pháp hình học" như sau :

Xét tam giác vuông ABC với $\widehat{A} = \frac{\pi}{2}, \widehat{B} = \alpha$. Bằng cách vẽ đường phân giác BD của góc B (h. 6.5), từ tính chất $\frac{AD}{AB} = \frac{DC}{BC}$, hãy suy ra rằng :

$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$. Hãy tính $\tan\frac{\pi}{12}$.

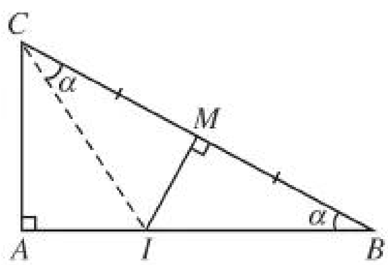


Hình 6.5

6.41. Chứng minh công thức $\cos2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ (với $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$) bằng "phương pháp hình học" như sau :

Xét tam giác vuông ABC với $\widehat{A} = \frac{\pi}{2}, \widehat{B} = \alpha$. Kẻ đường trung trực của đoạn BC cắt AB tại I. Dễ thấy : $\cos2\alpha = \frac{AI}{IC}$; $\cos\alpha = \frac{AB}{BC}$ (h. 6.6) ; từ đó hãy suy ra

$$\cos2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1.$$



Hình 6.6