

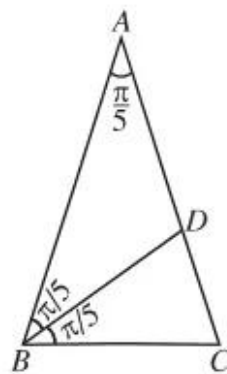
## §4. MỘT SỐ CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

**6.42.** a) Viết  $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$ ;  $\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{6}$ , rồi dùng công thức cộng, công thức nhân đôi để tìm các giá trị lượng giác sin, cosin, tang của góc  $\frac{\pi}{12}$  bằng hai cách khác nhau và đối chiếu các kết quả tìm thấy.

b) Tính sin, cosin, tang của các góc  $75^\circ$ ,  $105^\circ$ ,  $165^\circ$  (không dùng máy tính bỏ túi).

**6.43.** a) Tính  $x = \cos \frac{2\pi}{5}$  bằng "phương pháp hình học" như sau :

Xét tam giác cân  $ABC$  với  $\widehat{B} = \widehat{C} = \frac{2\pi}{5}$ , kẻ đường phân giác  $BD$  của tam giác đó. Từ tính chất  $\frac{BC}{BA} = \frac{DC}{DA}$  (h. 6.7) hãy suy ra  $4x^2 + 2x - 1 = 0$ .



Hình 6.7

b) Từ đó tính  $\cos \frac{\pi}{5}$ ,  $\sin \frac{\pi}{5}$ ,  $\tan \frac{\pi}{5}$ .

c) Tính sin, cosin, tang của  $18^\circ$ .

d) Viết  $6 = 36 - 30$ , tính sin, cosin của  $6^\circ$ . Thử lại bằng máy tính bỏ túi.

**6.44.** Cho  $\cos \alpha = \frac{3}{4}$ ,  $\sin \alpha > 0$ ;  $\sin \beta = \frac{3}{5}$ ,  $\cos \beta < 0$ .

Hãy tính  $\cos 2\alpha$ ,  $\sin 2\alpha$ ,  $\cos 2\beta$ ,  $\sin 2\beta$ ,  $\cos(\alpha + \beta)$ ,  $\sin(\alpha - \beta)$ .

**6.45.** a) Cho  $\cos \alpha = 0,6$  và  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ . Hãy tính  $\cos \frac{\alpha}{2}$ ;  $\sin \frac{\alpha}{2}$ ;  $\tan \frac{\alpha}{2}$ .

b) Cho  $\sin \beta = \frac{3}{5}$  và  $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$ . Hãy tính  $\cos \frac{\beta}{2}$ ;  $\sin \frac{\beta}{2}$ ;  $\tan \frac{\beta}{2}$ .

**6.46.** Cho  $\cos \alpha = m$ .

a) Hãy tính  $\cos 2\alpha$ ;  $\sin^2 2\alpha$ ;  $\tan^2 2\alpha$  theo  $m$  (giả sử  $\tan 2\alpha$  xác định).

b) Hỏi  $\sin 2\alpha$ ;  $\tan 2\alpha$  có xác định duy nhất bởi  $m$  hay không ?

**6.47.** Cho  $\sin \alpha = m$ .

Cũng câu hỏi như ở bài 6.46.

**6.48.** Cho  $\cos \alpha = m$ .

Hãy tính  $\cos^2 \frac{\alpha}{2}$ ;  $\sin^2 \frac{\alpha}{2}$ ;  $\tan^2 \frac{\alpha}{2}$  theo  $m$  (giả sử  $\tan \frac{\alpha}{2}$  xác định).

**6.49.** a) Tính  $\sin \alpha$ ,  $\cos \alpha$  theo  $\tan \frac{\alpha}{2} = t$ .

b) Hãy tính  $\frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{1}{\tan \alpha} + 4 \sin \alpha$  theo  $\tan \frac{\alpha}{2} = t$ .

**6.50.** Giả sử các biểu thức sau có nghĩa, chứng minh rằng :

$$\text{a) } \tan \alpha = \frac{\sin \alpha + \sin 2\alpha}{1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha}; \quad \text{b) } \tan^2 \alpha = \frac{2 \sin 2\alpha - \sin 4\alpha}{2 \sin 2\alpha + \sin 4\alpha}.$$

**6.51.** a) Chứng minh rằng với mọi  $\alpha, \beta$ , ta có :

$$\sin^2(\alpha + \beta) = \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + 2 \sin \alpha \sin \beta \cos(\alpha + \beta).$$

b) Biết  $\cos \alpha + \cos \beta = m$ ;  $\sin \alpha + \sin \beta = n$ , hãy tính  $\cos(\alpha - \beta)$  theo  $m$  và  $n$ .

c) Biết  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta = p$ . Hãy tính  $\cos(\alpha - \beta)\cos(\alpha + \beta)$  theo  $p$ .

**6.52.** a) Chứng minh rằng nếu  $\cos(\alpha + \beta) = 0$  thì  $\sin(\alpha + 2\beta) = \sin \alpha$ .

b) Chứng minh rằng nếu  $\sin(2\alpha + \beta) = 3 \sin \beta$  và  $\cos \alpha \neq 0$ ,  $\cos(\alpha + \beta) \neq 0$  thì  $\tan(\alpha + \beta) = 2 \tan \alpha$ .

**6.53.** Chứng minh

$$\text{a) } 4 \cos 15^\circ \cos 21^\circ \cos 24^\circ - \cos 12^\circ - \cos 18^\circ = \frac{1 + \sqrt{3}}{2};$$

$$\text{b) } \tan 30^\circ + \tan 40^\circ + \tan 50^\circ + \tan 60^\circ = \frac{8\sqrt{3}}{3} \cos 20^\circ;$$

$$\text{c) } \frac{1}{\sin 18^\circ} - \frac{1}{\sin 54^\circ} = 2;$$

$$\text{d) } \tan 9^\circ - \tan 27^\circ - \tan 63^\circ + \tan 81^\circ = 4.$$

**6.54.** Chứng minh

$$\text{a) } \frac{\sin x + \sin y}{2} \leq \sin \frac{x + y}{2} \text{ với mọi } x, y \text{ đều không âm và } x + y \leq 2\pi.$$

$$\text{b) } \frac{\cos x + \cos y}{2} \leq \cos \frac{x + y}{2} \text{ với mọi } x, y \text{ thoả mãn } -\pi \leq x + y \leq \pi.$$

**6.55.** Chứng minh

$$\frac{\sin \alpha + \sin \beta \cos(\alpha + \beta)}{\cos \alpha - \sin \beta \sin(\alpha + \beta)} = \tan(\alpha + \beta) \text{ (khi các biểu thức có nghĩa).}$$

**6.56.** Chứng minh rằng nếu tam giác  $ABC$  thoả mãn điều kiện :

a)  $\sin A = \frac{\cos B + \cos C}{\sin B + \sin C}$  thì tam giác  $ABC$  là tam giác vuông ;

b)  $\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{\cos B + \cos C}{\cos C + \cos A}$  thì tam giác  $ABC$  là một tam giác vuông hoặc một tam giác cân.

**6.57.** Xét các biểu thức

$$S = \sin \alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \dots + \sin n\alpha,$$

$$T = 1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \dots + \cos n\alpha$$

( $n$  là một số nguyên dương).

Chứng minh :

a)  $S \sin \frac{\alpha}{2} = \sin \frac{n\alpha}{2} \sin \frac{(n+1)\alpha}{2}$  ;      b)  $T \sin \frac{\alpha}{2} = \cos \frac{n\alpha}{2} \sin \frac{(n+1)\alpha}{2}$ .

**6.58.** Chứng minh :

a)  $\sin \frac{2\pi}{7} + \sin \frac{4\pi}{7} + \sin \frac{6\pi}{7} = \frac{1}{2} \cot \frac{\pi}{14}$  ;

b)  $\cos \frac{\pi}{11} + \cos \frac{3\pi}{11} + \cos \frac{5\pi}{11} + \cos \frac{7\pi}{11} + \cos \frac{9\pi}{11} = \frac{1}{2}$  ;

c)  $\cos \frac{2\pi}{11} + \cos \frac{4\pi}{11} + \cos \frac{6\pi}{11} + \cos \frac{8\pi}{11} + \cos \frac{10\pi}{11} = -\frac{1}{2}$  ;

d)  $\sin \frac{\pi}{11} + \sin \frac{2\pi}{11} + \dots + \sin \frac{10\pi}{11} = \cot \frac{\pi}{22}$ .