

BÀI TẬP ÔN TẬP CHƯƠNG VI

6.59. Cho $\sin\alpha - \cos\alpha = m$. Hãy tính theo m

a) $\sin\alpha \cos\alpha$;

b) $|\sin\alpha + \cos\alpha|$;

c) $\sin^3\alpha - \cos^3\alpha$;

d) $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha$.

6.60. Tính

a) $\sin^2 15^\circ + \sin^2 35^\circ + \sin^2 55^\circ + \sin^2 75^\circ$;

b) $\sin^2 \frac{\pi}{8} + \sin^2 \frac{3\pi}{8} + \sin^2 \frac{5\pi}{8} + \sin^2 \frac{7\pi}{8}$;

c) $\cos^2 \frac{\pi}{12} + \cos^2 \frac{3\pi}{12} + \cos^2 \frac{5\pi}{12} + \cos^2 \frac{7\pi}{12} + \cos^2 \frac{9\pi}{12} + \cos^2 \frac{11\pi}{12}$.

6.61. Giả sử phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$, ($ac \neq 0$) có hai nghiệm là $\tan\alpha$ và $\tan\beta$. Chứng minh rằng

$$a.\sin^2(\alpha + \beta) + b.\sin(\alpha + \beta)\cos(\alpha + \beta) + c.\cos^2(\alpha + \beta) = c.$$

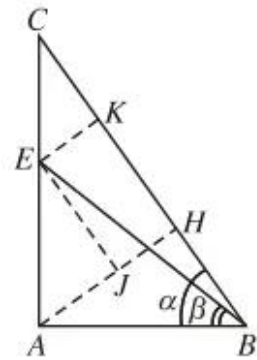
6.62. Chứng minh rằng với mọi α mà $\sin 2\alpha \neq 0$, ta có

$$\sin(\cot\alpha) + \sin(\tan\alpha) = 2\sin\left(\frac{1}{\sin 2\alpha}\right)\cos(\cot 2\alpha).$$

6.63. Chứng minh công thức

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

(với $0 < \beta < \alpha < \frac{\pi}{2}$) bằng "phương pháp hình học" như sau : Xét tam giác vuông ABC với $\widehat{A} = \frac{\pi}{2}$; $\widehat{ABC} = \alpha$; E là một điểm trên AC sao cho $\widehat{ABE} = \beta$. Kẻ AH, EK vuông góc với BC (h.6.8) thì dễ thấy $\cos(\alpha - \beta) = \frac{BK}{BE} = \frac{BH}{BE} + \frac{HK}{BE}$. Từ đó suy ra công thức trên.



Hình 6.8

6.64. Chứng minh rằng $\cos \frac{\pi}{32} = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}$.

6.65. a) Chứng minh $\cos \frac{2\pi}{9} \cos \frac{4\pi}{9} \cos \frac{8\pi}{9} = -\frac{1}{8}$ bằng cách nhân cả hai vế với $\sin \frac{2\pi}{9}$.

b) Chứng minh rằng $\cos \frac{2\pi}{9} + \cos \frac{8\pi}{9} = 2 \cos \frac{5\pi}{9} \cos \frac{\pi}{3} = \cos \frac{5\pi}{9}$,

Từ đó suy ra $\cos \frac{2\pi}{9} + \cos \frac{4\pi}{9} + \cos \frac{8\pi}{9} = 0$.

c) Từ b) suy ra rằng $\cos^2 \frac{2\pi}{9} + \cos^2 \frac{4\pi}{9} + \cos^2 \frac{8\pi}{9} = \frac{3}{2}$.

d) Từ b) và c) suy ra rằng :

$$\cos \frac{2\pi}{9} \cos \frac{4\pi}{9} + \cos \frac{4\pi}{9} \cos \frac{8\pi}{9} + \cos \frac{8\pi}{9} \cos \frac{2\pi}{9} = -\frac{3}{4} .$$

e) Từ a), b) và d) suy ra rằng :

$$\left(X - \cos \frac{2\pi}{9}\right)\left(X - \cos \frac{4\pi}{9}\right)\left(X - \cos \frac{8\pi}{9}\right) = X^3 - \frac{3}{4}X + \frac{1}{8},$$

$$\text{từ đó ta có } \left(1 - \cos \frac{2\pi}{9}\right)\left(1 - \cos \frac{4\pi}{9}\right)\left(1 - \cos \frac{8\pi}{9}\right) = \frac{3}{8}.$$

Suy ra

$$\bullet \sin \frac{\pi}{9} \sin \frac{2\pi}{9} \sin \frac{4\pi}{9} = \frac{\sqrt{3}}{8}.$$

$$\bullet \sin \frac{5\pi}{9} \sin \frac{7\pi}{9} \sin \frac{8\pi}{9} = \frac{\sqrt{3}}{8}.$$

f) Từ e) suy ra rằng

$$\sin \frac{\pi}{9} \sin \frac{2\pi}{9} \sin \frac{3\pi}{9} \sin \frac{4\pi}{9} \sin \frac{5\pi}{9} \sin \frac{6\pi}{9} \sin \frac{7\pi}{9} \sin \frac{8\pi}{9} = \frac{9}{256}.$$

(*Chú ý.* Người ta chứng minh được rằng không thể dùng thước và compa để dựng đa giác đều chín cạnh nội tiếp trong một đường tròn cho trước).

6.66. Chứng minh rằng

$$\begin{aligned} & \cos^2(\gamma - \alpha) + \sin^2(\gamma - \beta) - 2\cos(\gamma - \alpha)\sin(\gamma - \beta)\sin(\alpha - \beta) = \\ & = \cos^2(\alpha - \beta). \end{aligned}$$

6.67. Tìm giá trị bé nhất của biểu thức $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha$.

6.68. Tìm giá trị bé nhất của biểu thức $\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha$.