

# BÀI TẬP ÔN TẬP CUỐI NĂM

## A. ĐỀ BÀI

1. Cho  $A = (0 ; 4)$ ,  $B = \{ x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 32 \}$ ,

$$C = \{ x \in \mathbb{R} \mid (x - 2)^2 > 3 \}, D = [\sqrt{6} ; +\infty).$$

Tìm  $(A \cap B) \cup (C \cap D)$ .

2. Cho  $x$  là số vô tỉ và  $a, b, c, d$  là các số hữu tỉ sao cho  $ad - bc \neq 0$ . Chứng minh rằng số  $\frac{ax + b}{cx + d}$  là số vô tỉ.

3. Cho mệnh đề chứa biến  $P(n)$ : "Nếu tổng các chữ số của số nguyên dương  $n$  chia hết cho 6 thì  $n$  chia hết cho 6".  $P(n)$  là mệnh đề **sai** khi  $n$  bằng

(A) 30 ;      (B) 33 ;      (C) 40 ;      (D) 42.

4. a) Sử dụng máy tính bỏ túi để tính  $\sqrt{2006}$ , máy tính cho kết quả là 44,78839135. Hãy cho biết độ chính xác  $d$  của kết quả này.

b) Khi viết  $a \approx 15,7 \pm 0,3$ , ta hiểu số đúng  $a$  nằm trong khoảng nào ?

5. Cho hàm số  $f(x) = -x + |x + 2| - |x - 2|$ .

a) Hãy viết hàm số dưới dạng hàm số bậc nhất trên từng khoảng và không chứa dấu giá trị tuyệt đối. (Gợi ý. Xét hàm số trên mỗi khoảng  $(-\infty ; -2)$ ,  $[-2 ; 2)$  và  $[2 ; +\infty)$ ).

b) Chứng minh rằng  $y = f(x)$  là hàm số lẻ.

c) Vẽ đồ thị của hàm số  $y = f(x)$ , lập bảng biến thiên và nêu sự biến thiên của nó trên mỗi khoảng kể trên.

d) Sử dụng đồ thị, hãy tìm các khoảng trên đó hàm số có giá trị dương.

6. Cho hàm số  $y = x^2 - 4x + 1$ .

a) Khảo sát và vẽ đồ thị ( $P$ ) của hàm số đã cho.

b) Gọi  $(d)$  là đường thẳng song song với đường phân giác của góc phần tư  $(I)$  và đi qua điểm  $M(0 ; m)$ . Xác định biểu thức của hàm số có đồ thị  $(d)$ .

c) Tìm hoành độ các giao điểm  $A$  và  $B$  (nếu có) của  $(d)$  và  $(P)$ , và tọa độ trung điểm của đoạn thẳng  $AB$  (khi  $A$  và  $B$  phân biệt).

7. Giải và biện luận các phương trình sau theo tham số  $m$  :

a)  $m^2x - 3m^2 = 9(x + m)$  ;

b)  $m(x + 6) = x + 2m^2 + 4$  ;

c)  $|mx + x - 1| - |x + 3| = 0$  ;

d)  $|mx + 1| = |2x + m - 1|$  ;

e)  $\frac{x+a}{a-x} + \frac{x-a}{a+x} = \frac{a}{a^2-x^2}$ .

8. Giải các hệ phương trình sau :

a) 
$$\begin{cases} 0,1x - 0,3y = 0,7 \\ x - 3y = 7 ; \end{cases}$$

b) 
$$\begin{cases} \sqrt{5}x - \sqrt{3}y = \sqrt{2} \\ 6x + \sqrt{2}y = \sqrt{5}. \end{cases}$$

9. Cho hệ phương trình :

$$(I) \begin{cases} (a+4)x + ay = 2(a+1) \\ (a+2)x + 2ay = 1. \end{cases}$$

a) Giải và biện luận hệ (I) theo tham số  $a$ .

b) Khi hệ (I) có nghiệm duy nhất  $(x ; y)$ , hãy tìm hệ thức giữa  $x$  và  $y$  không phụ thuộc vào  $a$ .

10. Giải các phương trình :

a)  $\frac{13}{2x^2 + x - 21} + \frac{1}{2x + 7} = \frac{6}{x^2 - 9}$  ;

b)  $\frac{x+1}{x-1} + \frac{x-2}{x+2} + \frac{x-3}{x+3} + \frac{x+4}{x-4} = 4$ .

11. Tìm tất cả các giá trị của tham số  $a$  để phương trình :

$$(a+2)x^2 + 2(a+1)x + a - 2 = 0.$$

a) Có hai nghiệm khác nhau.

b) Có ít nhất một nghiệm.

c) Có hai nghiệm bằng nhau.

12. Dùng đồ thị để biện luận số nghiệm của phương trình :

$$x^2 - 6x + 3 + m = 0.$$

13. Giả sử  $x_1$  và  $x_2$  là các nghiệm của phương trình bậc hai  $ax^2 + bx + c = 0$  trong đó  $ac \neq 0$ . Hãy biểu diễn các biểu thức sau đây qua các hệ số  $a, b, c$  :

a)  $x_2x_1^2 + x_1x_2^2$  ;                      b)  $x_1 - x_2$  ;                      c)  $x_1^2 - x_2^2$ .

14. Giải các hệ phương trình sau :

a) 
$$\begin{cases} x + 4y = 9 \\ x^2 + y^2 + x - 2y = 2 ; \end{cases}$$

b) 
$$\begin{cases} 4x^2 + y^2 - 2xy = 7 \\ (2x - y)y = y ; \end{cases}$$

c) 
$$\begin{cases} 5(x + y) + 2xy = -19 \\ 3xy + x + y = -35. \end{cases}$$

15. So sánh các số sau đây :

a)  $\sqrt{2003} + \sqrt{2004}$  và  $\sqrt{2000} + \sqrt{2007}$  ;

b)  $\sqrt{n+3} + \sqrt{n+4}$  và  $\sqrt{n} + \sqrt{n+7}$  (với  $n \geq 0$ ) ;

c)  $\sqrt{a} + \sqrt{b}$  và  $\sqrt{a-c} + \sqrt{b+c}$ , với  $b > a > c > 0$ .

16. Chứng minh các bất đẳng thức sau :

a)  $\frac{a^2 + 3}{\sqrt{a^2 + 2}} > 2$  ;                      b)  $\frac{a^3}{a^6 + 1} \leq \frac{1}{2}$ .

17. a) Chứng minh rằng đối với ba số  $a, b, c$  tùy ý, ta có

$$|a| + |b| + |c| \geq |a + b + c|.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

b) *Áp dụng*. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$f(x) = |x + 2| + |x + 1| + |2x - 5|.$$

18. Cho ba số dương  $a, b, c$ . Chứng minh rằng :

a)  $ac + \frac{b}{c} \geq 2\sqrt{ab}$  ;                      b)  $\frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{a}} \geq 2\sqrt[4]{ab}$ .

Trong mỗi bất đẳng thức trên, dấu bằng xảy ra khi nào ?

19. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số  $g(x) = x + \frac{1}{x-2}$  với  $x > 2$  ;

20. a) Chứng minh rằng với mọi số thực  $a, b, c, x, y, z$  ( $xyz \neq 0$ ), luôn có

$$(ax + by + cz)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2).$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$ .

b) *Áp dụng.* Cho  $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$ . Chứng minh rằng  $|x + 2y + 3z| \leq 6$ .

21. Giải các hệ bất phương trình

$$\text{a) } \begin{cases} x + 1 \leq 2x - 3 \\ \frac{5 - 3x}{4} \geq x + 3; \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 2x + 1 < x + 4 \\ x + 1 < \frac{x + 20}{5} \\ x\sqrt{x+1} > 0. \end{cases}$$

22. Giải và biện luận hệ bất phương trình :

$$\begin{cases} 1 + mx > 0 \\ x - 2 \leq 0. \end{cases}$$

23. Giải các bất phương trình :

$$\text{a) } \frac{1-x}{(2x-1)(x-2)} < 0 ; \quad \text{b) } \frac{x+1}{2x+1} \geq \frac{x-1}{3x+1}.$$

24. Giải các bất phương trình :

$$\text{a) } |x+1| + 3|x+2| > x+7 ; \quad \text{b) } \left| \frac{-5}{x+2} \right| \leq \left| \frac{10}{x-1} \right|.$$

25. Xác định miền nghiệm của các hệ bất phương trình sau :

$$\text{a) } \begin{cases} y \leq 2 \\ x \geq -1 \\ x - y \leq 1 \\ x + y \leq 2; \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 2y - x > 2 \\ 4x + 3y > 12 \\ x + 3y < 3. \end{cases}$$

26. Tìm các giá trị của  $m$  để mỗi biểu thức sau đây luôn dương :

$$\text{a) } (m^2 + 1)x^2 + (m - 1)x + 3 ;$$

$$\text{b) } (\sqrt{2} - m)x^2 + (m - \sqrt{2})x + 2m + 3\sqrt{2} .$$

27. Tìm các giá trị của  $m$  để mỗi biểu thức sau đây luôn âm :

a)  $-4x^2 + (4m + \sqrt{2})x - m^2 - \sqrt{2}m + 1$  ;

b)  $(5m + 1)x^2 - (5m + 1)x + 4m + 3$ .

28. Giải các bất phương trình sau :

a)  $\frac{8 + 4x}{4x + x^2} \leq \frac{2}{x} + \frac{3}{4 + x}$  ;

b)  $\frac{1}{x^2 - 4} - \frac{1}{(x + 2)^2} \geq \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2x}$ .

29. Giải các hệ bất phương trình sau :

a)  $\begin{cases} x^2 - 14x + 45 < 0 \\ x^2 - 11x + 30 > 0 ; \end{cases}$

b)  $\begin{cases} x^2 - x - 6 \leq 0 \\ x^3 + x^2 - x - 1 \geq 0. \end{cases}$

30. Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để các bất phương trình sau vô nghiệm :

a)  $3x^2 + mx + m + 2 < 0$  ;

b)  $(3 - m)x^2 - 2(2m - 5)x - 2m + 5 > 0$ .

31. Tìm các giá trị của  $m$  để phương trình  $x^4 - 2mx^2 + m^2 - 1 = 0$  vô nghiệm.

32. Tìm các giá trị của  $m$  để phương trình  $(m - 1)x^2 - (m - 5)x + m - 1 = 0$ , có hai nghiệm phân biệt lớn hơn  $-1$ .

33. Giải các phương trình :

a)  $x^4 - 18x^2 + 81 = 0$  ;

b)  $4x^4 - 37x^2 + 9 = 0$ .

34. Giải các bất phương trình :

a)  $\sqrt{-x^2 + 4x - 3} < x - 2$  ;

b)  $\sqrt{2x + 5} > x + 1$ .

35. Giải các bất phương trình

a)  $2x^2 + \sqrt{2x^2 - 8} \leq 20$  ;

b)  $x^2 - 3x - \sqrt{x^2 - 3x + 5} > 1$ .

36. Một nghiên cứu về tuổi của những phụ nữ Mĩ sinh con lần đầu cho ta số liệu sau :

Tuổi của mẹ	Tần số
[15 ; 19]	312 448
[20 ; 24]	350 905
[25 ; 29]	196 365
[30 ; 34]	94 874
[35 ; 39]	34 408
	N = 989 000

- a) Dấu hiệu là gì ? Đơn vị điều tra là gì ?
- b) Tìm tuổi trung bình các bà mẹ ở Mĩ sinh con lần đầu.
- c) Lập bảng phân bố tần suất.
- d) Vẽ biểu đồ tần suất hình quạt.
- e) Vẽ biểu đồ tần suất hình cột.

37. Tìm tất cả các mẫu số liệu kích thước 5 có các tính chất sau :

- Các số liệu trong mẫu là các số nguyên dương.
- Số trung bình là 12, số trung vị và mốt đều bằng 8.
- Biên độ (hiệu giữa giá trị lớn nhất và giá trị bé nhất của mẫu) bằng 18.

38. Chứng minh rằng nếu  $\sin(\alpha - \beta) = \frac{1}{3} \sin\beta$ , thì  $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\sin\alpha}{3 + \cos\alpha}$ .

39. Chứng minh rằng, nếu  $\alpha + \beta + \gamma = \pi$  thì

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + 2\cos\alpha \cos\beta \cos\gamma = 1.$$

40. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$4 \cdot \frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha} - \frac{2}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} + 3, \text{ (giả sử } \cos \frac{\alpha}{2} \neq 0).$$

41. a) Với các giá trị nào của  $\alpha$  thì biểu thức sau đây có nghĩa ?

$$\frac{\sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \sin 7\alpha}{\cos\alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha + \cos 7\alpha}.$$

b) Chứng minh rằng với các giá trị đó của  $\alpha$  thì biểu thức đã cho bằng  $\tan 4\alpha$ .

42. Chứng minh rằng với mọi  $\alpha, \beta, \gamma$  ta có :

$$\begin{aligned} & \cos^2\alpha + \cos^2\beta - \cos^2\gamma - \cos^2(\alpha + \beta + \gamma) \\ & = 2\cos(\alpha + \beta)\sin(\beta + \gamma)\sin(\gamma + \alpha). \end{aligned}$$