Chương III

PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT VÀ BẬC HAI

A. NHỮNG KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Các kiến thức được nêu sau đây có bổ sung một vài kết quả *dễ nhận thấy* và được *sử dụng nhiều trong thực hành giải toán*.

1. Các phép biến đổi tương đương của phương trình

1) Thực hiện các phép biến đổi đồng nhất trong từng vế nhưng không làm thay đổi tập xác định của phương trình.

2) Thêm vào hai vế của phương trình cùng một biểu thức xác định với mọi giá trị của ẩn thuộc tập xác định của phương trình (trường hợp hay dùng là *quy tắc chuyển vế*).

3) Nhân hai vế của phương trình với cùng một biểu thức xác định và khác 0 với mọi giá trị của ẩn thuộc tập xác định của phương trình (chú ý rằng *chia* cho một số *tức là nhân* với nghịch đảo của số đó).

4) Bình phương hai vế của một phương trình có hai vế luôn cùng dấu khi ẩn lấy mọi giá trị thuộc tập xác định của phương trình.

2. Phép biến đổi cho phương trình hệ quả

Bình phương hai vế của một phương trình.

3. Giải và biện luận phương trình dạng $ax + b = 0$

- $a \neq 0$: phương trình có một nghiệm duy nhất $x = -\dfrac{b}{a}$.
- $a = 0$ và $b \neq 0$: phương trình vô nghiệm.
- $a = b = 0$: phương trình nghiệm đúng với mọi x.

4. Giải và biện luận phương trình bậc hai một ẩn

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (1)$$

với biệt thức $\Delta = b^2 - 4ac$ hay biệt thức thu gọn $\Delta' = b'^2 - ac$ (với $b = 2b'$).

- $\Delta < 0$ ($\Delta' < 0$) : (1) vô nghiệm.
- $\Delta = 0$ ($\Delta' = 0$) : (1) có một nghiệm kép $x = -\dfrac{b}{2a}\left(x = -\dfrac{b'}{a}\right)$.
- $\Delta > 0$ ($\Delta' > 0$) : (1) có hai nghiệm phân biệt $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}\left(x = \dfrac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a}\right)$.

5. Định lí Vi-ét (thuận và đảo) :

Hai số x_1 và x_2 là hai nghiệm của phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ *khi và chỉ khi* chúng thoả mãn hai hệ thức Vi-ét sau :

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}\ ;\ \ x_1x_2 = \frac{c}{a}.$$

Định lí Vi-ét có thể được ứng dụng để :

– Nhẩm nghiệm của phương trình bậc hai.

– Tìm hai số biết tổng và tích của chúng : Nếu hai số có tổng bằng S và tích bằng P thì hai số đó là hai nghiệm của phương trình

$$x^2 - Sx + P = 0.$$

(Tất nhiên, điều kiện tồn tại của hai số nói trên là $S^2 - 4P \geq 0$).

– Phân tích một tam thức bậc hai thành nhân tử : Cho tam thức bậc hai

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

Nếu phương trình bậc hai $f(x) = 0$ có hai nghiệm (có thể trùng nhau) x_1 và x_2 thì tam thức bậc hai $f(x)$ có thể phân tích được thành nhân tử như sau :

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

– Tính giá trị các biểu thức đối xứng của hai nghiệm của phương trình bậc hai :

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}\ ;\ P = x_1x_2 = \frac{c}{a}\ ;$$

$$x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P\ ;\ x_1^3 + x_2^3 = S^3 - 3PS.$$

– Xét dấu các nghiệm của phương trình bậc hai :

Phương trình có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow P < 0$.

Phương trình có hai nghiệm dương $\Leftrightarrow \Delta \geq 0$, $P > 0$ và $S > 0$.

Phương trình có hai nghiệm âm $\Leftrightarrow \Delta \geq 0$, $P > 0$ và $S < 0$.

6. Giải và biện luận hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \quad (a^2 + b^2 \neq 0 \text{ và } a'^2 + b'^2 \neq 0). \qquad (2)$$

$$\mathrm{D} = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b\ ;$$

$$\mathrm{D}_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} = cb' - c'b\ ;$$

$$\mathrm{D}_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = ac' - a'c.$$

• $\mathrm{D} \neq 0$: (2) có một nghiệm duy nhất $(x\ ;\ y)$, trong đó $x = \dfrac{\mathrm{D}_x}{\mathrm{D}}$, $y = \dfrac{\mathrm{D}_y}{\mathrm{D}}$.

• $\mathrm{D} = 0$, $\mathrm{D}_x \neq 0$ hoặc $\mathrm{D}_y \neq 0$: (2) vô nghiệm.

• $\mathrm{D} = \mathrm{D}_x = \mathrm{D}_y = 0$: (2) có vô số nghiệm $(x\ ;\ y)$ tính theo công thức

$$\begin{cases} x = \dfrac{-by + c}{a} \\ y \in \mathbb{R} \end{cases} \text{ (nếu } a \neq 0) \text{ hoặc } \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = \dfrac{-ax + c}{b} \end{cases} \text{ (nếu } b \neq 0).$$

Chú ý

Khi giải và biện luận hệ phương trình có chứa tham số dạng

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c', \end{cases}$$

có thể xảy ra trường hợp $a = b = 0$ (hoặc $a' = b' = 0$). Khi đó, ta sử dụng các kết luận dễ thấy sau đây :

– Phương trình $0x + 0y = c$ vô nghiệm nếu $c \neq 0$, nghiệm đúng với mọi x và với mọi y nếu $c = 0$.

– Trong một hệ phương trình, nếu một phương trình của hệ vô nghiệm thì hệ vô nghiệm.

– Trong một hệ hai phương trình, nếu một phương trình của hệ nghiệm đúng với mọi giá trị của các ẩn thì tập nghiệm của hệ phương trình đó trùng với tập nghiệm của phương trình còn lại.

7. Giải hệ phương trình bậc hai hai ẩn

1) Hệ phương trình trong đó có một phương trình bậc nhất : Dùng phương pháp thế.

2) Hệ phương trình mà mỗi phương trình trong hệ không thay đổi khi thay thế đồng thời x bởi y và y bởi x : Dùng phương pháp đặt ẩn phụ

$$S = x + y \; ; \; P = xy.$$