Chương IV

BẤT ĐẲNG THỨC VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH

A. NHỮNG KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Tính chất của bất đẳng thức

1) $a > b$ và $b > c \Rightarrow a > c$.

2) $a > b \Leftrightarrow a + c > b + c$.

3) Nếu $c > 0$ thì $a > b \Leftrightarrow ac > bc$.

Nếu $c < 0$ thì $a > b \Leftrightarrow ac < bc$.

Các hệ quả

4) $a > b$ và $c > d \Rightarrow a + c > b + d$.

$a + c > b \Leftrightarrow a > b - c$.

5) $a \geq b \geq 0$ và $c \geq d \geq 0 \Rightarrow ac \geq bd$.

6) $a \geq b > 0$ và $n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow a^n \geq b^n$.

7) $a \geq b > 0 \Rightarrow \sqrt{a} \geq \sqrt{b}$.

8) $a > b \Rightarrow \sqrt[3]{a} > \sqrt[3]{b}$.

2. Bất đẳng thức về giá trị tuyệt đối

Đối với hai số a, b tuỳ ý, ta có

$$|a| - |b| \leq |a + b| \leq |a| + |b|.$$

3. Bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân

1) Với mọi $a \geq 0$, $b \geq 0$, ta có

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}\ ;\ \frac{a+b}{2} = \sqrt{ab} \Leftrightarrow a = b.$$

2) Với mọi $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$, ta có

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}\ ;\ \frac{a+b+c}{3} = \sqrt[3]{abc} \Leftrightarrow a = b = c.$$

Áp dụng. 1) Nếu hai số dương có tổng không đổi thì tích của chúng lớn nhất khi hai số đó bằng nhau.

2) Nếu hai số dương có tích không đổi thì tổng của chúng nhỏ nhất khi hai số đó bằng nhau.

4. Biến đổi tương đương các bất phương trình

Cho bất phương trình $f(x) < g(x)$ có tập xác định $\mathcal{D}$, $y = h(x)$ là một hàm số xác định trên $\mathcal{D}$. Khi đó, trên $\mathcal{D}$, bất phương trình $f(x) < g(x)$ tương đương với mỗi bất phương trình

1) $f(x) + h(x) < g(x) + h(x)$;

2) $f(x)h(x) < g(x)h(x)$ nếu $h(x) > 0$ với mọi $x \in \mathcal{D}$;

3) $f(x)h(x) > g(x)h(x)$ nếu $h(x) < 0$ với mọi $x \in \mathcal{D}$.

5. Bất phương trình và hệ bất phương trình bậc nhất một ẩn

• Giải và biện luận bất phương trình

$$ax + b < 0. \qquad (1)$$

1) Nếu $a > 0$ thì tập nghiệm của (1) là $S = \left(-\infty\ ;\ -\frac{b}{a}\right)$.

2) Nếu $a < 0$ thì tập nghiệm của (1) là $S = \left(-\frac{b}{a}\ ;\ +\infty\right)$.

3) Nếu $a = 0$ thì (1) trở thành $0x < -b$. Do đó

(1) vô nghiệm ($S = \varnothing$) nếu $b \geq 0$;

(1) nghiệm đúng với mọi x ($S = \mathbb{R}$) nếu $b < 0$.

• Để giải một hệ bất phương trình một ẩn, ta giải từng bất phương trình của hệ rồi lấy giao của các tập nghiệm thu được.

6. Dấu của nhị thức bậc nhất

1) Bảng xét dấu của nhị thức bậc nhất $ax + b$ $(a \neq 0)$

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{a}$		$+\infty$
$ax + b$		Trái dấu với a	0	Cùng dấu với a	

2) Nếu $a > 0$ thì

$$|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a,$$

$$|x| > a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > a \\ x < -a. \end{array}\right.$$

7. Bất phương trình và hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

1) Cách xác định miền nghiệm của $ax + by + c < 0$ $(a^2 + b^2 \neq 0)$. (1)

– Vẽ đường thẳng (d) : $ax + by + c = 0$;

– Lấy điểm $M(x_0 ; y_0) \notin (d)$.

Nếu $ax_0 + by_0 + c < 0$ thì nửa mặt phẳng (không kể bờ (d)) chứa điểm M là miền nghiệm của (1).

Nếu $ax_0 + by_0 + c > 0$ thì nửa mặt phẳng (không kể bờ (d)) không chứa điểm M là miền nghiệm của (1).

Chú ý. Đối với bất phương trình $ax + by + c \leq 0$ $(a^2 + b^2 \neq 0)$ thì cách xác định miền nghiệm cũng tương tự, nhưng miền nghiệm là nửa mặt phẳng kể cả bờ.

2) Cách xác định miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

– Với mỗi bất phương trình trong hệ, ta xác định miền nghiệm của nó và gạch bỏ miền còn lại.

– Sau khi làm như trên lần lượt đối với tất cả các bất phương trình trong hệ và trên cùng một mặt phẳng toạ độ, miền còn lại không bị gạch chính là miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.

8. Dấu của tam thức bậc hai

1) Cho tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$.

• Nếu $\Delta < 0$ thì $f(x)$ cùng dấu với hệ số a với mọi $x \in \mathbb{R}$, tức là

$$af(x) > 0 \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}.$$

• Nếu $\Delta = 0$ thì $f(x)$ cùng dấu với hệ số a với mọi $x \neq -\frac{b}{2a}$, tức là

$$af(x) > 0 \text{ với mọi } x \neq -\frac{b}{2a},$$

• Nếu $\Delta > 0$ thì $f(x)$ có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2 $(x_1 < x_2)$. Khi đó $f(x)$ trái dấu với hệ số a với mọi x nằm trong khoảng $(x_1 ; x_2)$ (tức là với $x_1 < x < x_2$) và $f(x)$ cùng dấu với hệ số a với mọi x nằm ngoài đoạn $[x_1 ; x_2]$ (tức là với $x < x_1$ hoặc $x > x_2$). Nói cách khác,

$$af(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (x_1 ; x_2),$$

$$af(x) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < x_1 \\ x > x_2. \end{array}\right.$$

2) $\forall x \in \mathbb{R},\ ax^2 + bx + c > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0. \end{cases}$

$\forall x \in \mathbb{R},\ ax^2 + bx + c < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0. \end{cases}$