C. HƯỚNG DẪN – LỜI GIẢI – ĐÁP SỐ

4.1. a) $a^2 + b^2 - ab = \left(a - \dfrac{b}{2}\right)^2 + \dfrac{3b^2}{4} \geq 0$ với mọi $a, b \in \mathbb{R}$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} \left(a - \dfrac{b}{2}\right)^2 = 0 \\ \dfrac{3b^2}{4} = 0 \end{cases}$ hay $a = b = 0$.

b) $a^3 - b^3 - (ab^2 - a^2b) = a(a^2 - b^2) + b(a^2 - b^2)$

$$= (a + b)(a^2 - b^2)$$

$$= (a - b)(a + b)^2.$$

Do $a \geq b$ nên $(a - b)(a + b)^2 \geq 0$, ta có điều phải chứng minh.

4.2. a) $a^4 + b^4 - a^3b - ab^3 = a^3(a - b) + b^3(b - a) = (a - b)(a^3 - b^3)$

$$= (a - b)^2(a^2 + b^2 + ab) \geq 0.$$

(Vì $a^2 + b^2 + ab = \left(a + \dfrac{b}{2}\right)^2 + \dfrac{3b^2}{4} \geq 0$ và $(a - b)^2 \geq 0$ với mọi $a, b \in \mathbb{R}$)

b) $(a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$ (1)

$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc \leq 3a^2 + 3b^2 + 3c^2$

$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc \geq 0$

$\Leftrightarrow (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0.$ (2)

Bất đẳng thức (2) luôn đúng nên bất đẳng thức (1) được chứng minh.

4.3. Ta có $\dfrac{a + c}{b + c} - \dfrac{a}{b} = \dfrac{c(b - a)}{b(b + c)}$.

a) Nếu $0 < a < b$ và $c > 0$ thì $\dfrac{c(b - a)}{b(b + c)} > 0$. Suy ra $\dfrac{a}{b} < \dfrac{a + c}{b + c}$.

b) Nếu $a > b > 0$ và $c > 0$ thì $\dfrac{c(b - a)}{b(b + c)} < 0$. Suy ra $\dfrac{a}{b} > \dfrac{a + c}{b + c}$.

4.4. a) Từ $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ suy ra $\frac{a}{b} + 1 < \frac{c}{d} + 1$, tức là $\frac{a+b}{b} < \frac{c+d}{d}$.

b) Từ $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ và a, b, c, d là bốn số dương nên $\frac{b}{a} > \frac{d}{c}$, suy ra $\frac{b}{a} + 1 > \frac{d}{c} + 1$, tức là $\frac{b+a}{a} > \frac{d+c}{c}$.

4.5. Từ $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ và b, d là hai số dương, suy ra $ad < bc$ hay $ad - bc < 0$; $bc - ad > 0$.

Ta có $\frac{a+c}{b+d} - \frac{a}{b} = \frac{bc - ad}{(b+d)b} > 0$; $\frac{a+c}{b+d} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{(b+d)d} < 0$.

Vậy $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.

4.6. Do a, b, c, d là các số dương nên

$$\frac{a}{a+b+c} > \frac{a}{a+b+c+d}$$

$$\frac{b}{b+c+d} > \frac{b}{a+b+c+d}$$

$$\frac{c}{c+d+a} > \frac{c}{a+b+c+d}$$

$$\frac{d}{d+a+b} > \frac{d}{a+b+c+d}.$$

Cộng vế với vế của các bất đẳng thức trên, ta suy ra

$$\frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{b+c+d} + \frac{c}{c+d+a} + \frac{d}{d+a+b} > 1.$$

Lại có $\frac{a}{a+b+c} < \frac{a}{a+c}$; $\frac{c}{c+d+a} < \frac{c}{a+c}$

nên $\frac{a}{a+b+c} + \frac{c}{c+d+a} < 1$.

Tương tự $\frac{b}{b+c+d} + \frac{d}{d+a+b} < 1$. Từ đó suy ra

$$\frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{b+c+d} + \frac{c}{c+d+a} + \frac{d}{d+a+b} < 2.$$

4.7. Nếu $x \geq 0$ thì $x^n + 1 \geq 1 > 0$.

Nếu $-1 \leq x < 0$ thì $|x| \leq 1$ suy ra $|x|^n \leq 1$ hay $|x^n| \leq 1$.

Từ đó ta có $-x^n \leq 1$ (vì $-x^n \leq |x^n|$). Vì vậy $x^n + 1 \geq 0$.

4.8. a) Áp dụng mối liên hệ giữa cạnh và góc trong tam giác, ta có :

Nếu $a \geq b$ thì $A \geq B$;

Nếu $a \leq b$ thì $A \leq B$;

Vì vậy luôn có $(a - b)(A - B) \geq 0$, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$ $(A = B)$, tức là tam giác ABC cân tại C.

b) • Theo câu a) ta có

$$(a - b)(A - B) + (b - c)(B - C) + (c - a)(C - A) \geq 0$$

$\Leftrightarrow aA + bB + cC - bA - aB + bB - cB - bC + cC - aC - cA + aA \geq 0$

$\Leftrightarrow 3(aA + bB + cC) - (a + b + c)(A + B + C) \geq 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{aA + bB + cC}{a + b + c} \geq \dfrac{A + B + C}{3} = 60^{\circ}.$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $A = B = C$, tức là tam giác ABC là tam giác đều.

• Lại có $\quad a + b > c$; $b + c > a$; $c + a > b$ nên

$$aA + bB + cC < (b + c)A + (c + a)B + (a + b)C$$

$$\Leftrightarrow \quad 2(aA + bB + cC) < (A + B + C)(a + b + c).$$

Từ đó suy ra $\quad \dfrac{aA + bB + cC}{a + b + c} < 90^{\circ}.$

4.9. a) Ta có : $\dfrac{1}{(k+1)\sqrt{k}} = \dfrac{\sqrt{k}}{(k+1)k} = \sqrt{k}\left(\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}\right)$

$$= \sqrt{k}\left(\frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$$

$$= \left(1 + \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right) < 2\left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right).$$

b) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3\sqrt{2}}+\frac{1}{4\sqrt{3}}+...+\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}} < 2\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+...+\right.$

$$\left.+\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)=2\left(1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)<2.$$

4.10. a) Với $k > 1$ ta có : $\frac{1}{k^3} < \frac{1}{k^2} < \frac{1}{(k-1)k} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.

b) $\frac{1}{1^3}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+...+\frac{1}{n^3} < 1+1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$

$$=2-\frac{1}{n}<2.$$

4.11. a) $f(x) = (x-a)^2 + (x-b)^2 = 2x^2 - 2(a+b)x + a^2 + b^2$

$$= 2\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2 + \frac{(a-b)^2}{2}.$$

Ta có $f(x) \geq \frac{(a-b)^2}{2}$ với mọi a, b ; đẳng thức xảy ra khi $\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2 = 0$, tức là $x = \frac{a+b}{2}$. Vậy $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất là $\frac{(a-b)^2}{2}$ tại $x = \frac{a+b}{2}$.

Chú ý. Tránh sai lầm khi suy luận rằng $(x-a)^2 + (x-b)^2 \geq 0$ với mọi x nên giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ là 0.

b) *Hướng dẫn*. Viết $g(x)$ dưới dạng

$$3\left(x-\frac{a+b+c}{3}\right)^2 + \frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{3}.$$

4.12. a) $|a| + |b| = |a| + |-b| \geq |a-b|$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $ab \leq 0$.

b) *Hướng dẫn*. $|a+b+c| \leq |a+b| + |c|$.

4.13. $|a-b| + |b-c| \geq |a-b+b-c| = |a-c|$.

4.14. $f(x) = |x-2006| + |x-2007| \geq |x-2006-(x-2007)| = 1$.

Đẳng thức xảy ra chẳng hạn khi $x = 2006$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ là 1.

4.15. a) Với $x \geq 0$ thì hiển nhiên $x + |x| \geq 0$.

Với $x < 0$ thì $x + |x| = x - x = 0$.

b) $x + \sqrt{x^2 - x + 1} = x + \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \geq \left(x - \frac{1}{2}\right) + \left|x - \frac{1}{2}\right| \geq 0.$

Vậy $\sqrt{x + \sqrt{x^2 - x + 1}}$ xác định với mọi x.

4.16. Bạn An giải như vậy là sai.

Sai lầm của bạn An là không để ý điều kiện của các số a, b trong bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ là $a \geq 0$, $b \geq 0$. Trong bài này x và $1 - x$ chỉ không âm khi $x \in [0\ ;\ 1]$.

Lời giải đúng là :

$x(1-x) \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow -x^2 + x \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow x^2 - x + \frac{1}{4} \geq 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$, bất đẳng thức này hiển nhiên đúng với mọi x.

4.17. a) Với $a \geq 0$, $b \geq 0$ ta có

$$a + b \geq 2\sqrt{ab} \geq 0 ; ab + 1 \geq 2\sqrt{ab} \geq 0.$$

Từ đó suy ra $(a+b)(ab+1) \geq 2\sqrt{ab}.2\sqrt{ab} = 4ab$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 1$.

b) Với $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$, ta có

$$a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc} \geq 0 \ ; \qquad ab + bc + ca \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \geq 0.$$

Từ đó suy ra

$$(a+b+c)(ab+bc+ca) \geq 3\sqrt[3]{abc}.3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} = 9abc.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

4.18. Với $a > 0, b > 0, c > 0$ thì

$$1 + \frac{a}{b} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b}} \geq 0 \;; \quad 1 + \frac{b}{c} \geq 2\sqrt{\frac{b}{c}} \geq 0 \;; \quad 1 + \frac{c}{a} \geq 2\sqrt{\frac{c}{a}} \geq 0.$$

Từ đó suy ra $\left(1 + \frac{a}{b}\right)\left(1 + \frac{b}{c}\right)\left(1 + \frac{c}{a}\right) \geq 2^3 \sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a}} = 8.$

4.19. Do $0 < a < b$ nên $\frac{a}{b} < 1$ suy ra

$$a\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = 1 + \frac{a}{b} < 2 \text{ tức là } a < \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}. \qquad (1)$$

Lại có $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} > 2\sqrt{\frac{1}{ab}}$ nên $\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} < \sqrt{ab}.$ (2)

Do $0 < a < b$ nên $\sqrt{ab} < \frac{a + b}{2} < b.$ (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra điều cần chứng minh.

4.20. a) $x^2 + \frac{16}{x^2} \geq 2\sqrt{x^2 . \frac{16}{x^2}} = 8$. Đẳng thức xảy ra khi $x = \pm 2$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ là 8 khi $x = \pm 2$.

b) Do $0 < x < 1$ nên $1 - x > 0$. Ta có $\frac{1}{x} = \frac{1 - x}{x} + 1$; $\frac{2}{1 - x} = \frac{2x}{1 - x} + 2$;

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{1 - x} = \frac{1 - x}{x} + \frac{2x}{1 - x} + 3 \geq 2\sqrt{\frac{1 - x}{x} \cdot \frac{2x}{1 - x}} + 3 = 2\sqrt{2} + 3.$$

Đẳng thức xảy ra khi $\frac{1 - x}{x} = \frac{2x}{1 - x}$ và $0 < x < 1$ tức là $x = -1 + \sqrt{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $g(x)$ là $2\sqrt{2} + 3$ khi $x = -1 + \sqrt{2}$.

4.21. Do $0 \leq x \leq \frac{a}{2}$ nên $a - 2x \geq 0$. Ta có

$$x(a - 2x)^2 = \frac{1}{4}.4x.(a - 2x)(a - 2x) \leq \frac{1}{4}.\left(\frac{4x + a - 2x + a - 2x}{3}\right)^3$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{2a}{3}\right)^3 = \frac{2a^3}{27}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $4x = a - 2x$, tức là $x = \dfrac{a}{6}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của y là $\dfrac{2a^3}{27}$ khi và chỉ khi $x = \dfrac{a}{6}$.

4.22. Gọi cạnh hình vuông được cắt là x ($0 < x < 25$, đơn vị : xentimét)

Thể tích V của cái hộp là

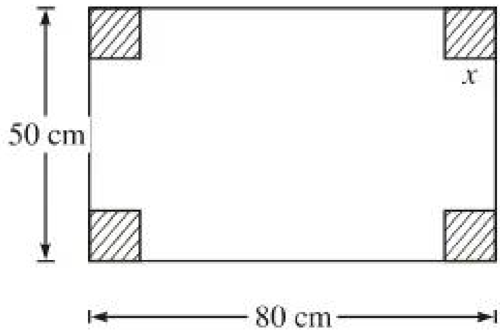
$V = x(80 - 2x)(50 - 2x)$.

Khi đó ta có

$$12V = 6x(80 - 2x)(100 - 4x)$$

$$\leq \left(\frac{6x + 80 - 2x + 100 - 4x}{3}\right)^3 = 60^3.$$

Suy ra $V \leq \dfrac{60^3}{12}$ hay $V \leq 18\,000$.



Hình 4.1

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $6x = 80 - 2x = 100 - 4x$ tức là $x = 10$.

Giá trị lớn nhất của V là 18000 cm^3 khi $x = 10$(cm).

Vậy phải cắt đi ở bốn góc vuông của hình chữ nhật ban đầu những hình vuông có cạnh 10 cm.

Nhận xét. Nếu xét $4V = 4x(80 - 2x)(50 - 2x)$ thì $4V$ là tích của ba thừa số có tổng không đổi (bằng 130), ta vẫn có bất đẳng thức $4V \leq \left(\dfrac{130}{3}\right)^3$ nhưng đẳng thức không thể xảy ra và không có giá trị nào của x thoả mãn

$$80 - 2x = 50 - 2x.$$

4.23. *Hướng dẫn*. Áp dụng bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki.

4.24. Đặt $b + c = x$, $c + a = y$; $a + b = z$. Do a, b, c dương nên x, y, z dương và

$a = \dfrac{-x + y + z}{2}$; $b = \dfrac{x - y + z}{2}$; $c = \dfrac{x + y - z}{2}$. Khi đó ta có

$$A = \frac{-x+y+z}{2x} + \frac{x-y+z}{2y} + \frac{x+y-z}{2z} = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{x}{z} + \frac{z}{x} + \frac{y}{z} + \frac{z}{y} - 3\right)$$

$$\geq \frac{1}{2}\cdot(2.3 - 3) = \frac{3}{2}.$$

Học sinh tự giải tiếp.

4.25. (h. 4.2) Ta có

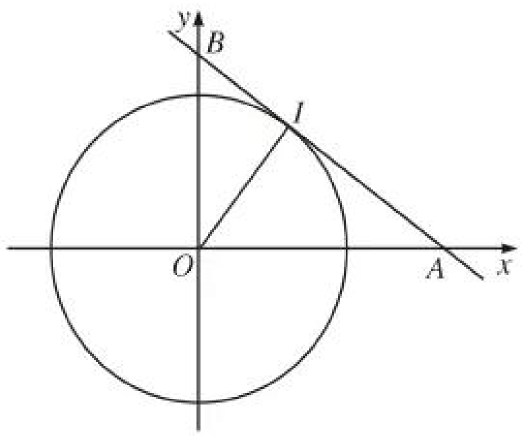
$$S_{OAB} = \frac{1}{2}OI.AB = \frac{R}{2}.AB;$$

$$AB = IA + IB \geq 2\sqrt{IA.IB} = 2\sqrt{OI^2} = 2R;$$

$AB = 2R \Leftrightarrow IA = IB = R$. Lúc đó tam giác OAB vuông cân tại O, cạnh huyền $AB = 2R$.

$$OA = OB = R\sqrt{2}.$$

Suy ra $\quad S_{OAB} \geq \frac{R}{2} \cdot 2R = R^2.$



Hình 4.2

Vậy S_{OAB} nhỏ nhất bằng R^2 khi $OA = OB = R\sqrt{2}$. Khi đó toạ độ $A(R\sqrt{2}\,;0)$ và $B(0\,;R\sqrt{2})$.

4.26. a) Đúng, vì $2^2 + 2 + 1 > 0$.

b) Sai, vì $(-3)^3 - 3.(-3) - 1 < 0$ nên -3 là nghiệm của bất phương trình đã cho.

c) Sai, vì $a^2 + (1 + a)a - a + 2 = 2a^2 + 2 > 0$.

4.27. a) Không tương đương, vì $x = 2$ là nghiệm của bất phương trình thứ nhất nhưng không thuộc tập xác định của bất phương trình thứ hai.

b) Tương đương.

c) Không tương đương, vì $x = 0$ là nghiệm của bất phương trình thứ nhất nhưng không là nghiệm của bất phương trình thứ hai.

d) Tương đương, vì khi $x - 3 > 0$ thì $x^2 > 0$ nên $x - 3 > 0 \Leftrightarrow x^2(x - 3) > 0$.

e) Không tương đương vì $x = -1$ là nghiệm của bất phương trình thứ hai nhưng không là nghiệm của bất phương trình thứ nhất.

g) Tương đương, vì $x^2 - 2x + 2 = (x - 1)^2 + 1 > 0$ với mọi x.

4.28. a) Điều kiện : $x = 2$, tập nghiệm $S = \{2\}$.

b) Điều kiện : $x \geq \frac{3}{2}$, tập nghiệm $S = \left[\frac{3}{2}\,;+\infty\right)$.

c) Điều kiện : $x > 3$, tập nghiệm $S = \varnothing$.

d) Điều kiện : $x \neq 2$, tập nghiệm $S = \left[\frac{2}{3}\,;2\right) \cup (2\,;+\infty)$.

4.29. a) Vế trái luôn dương với mọi $x \geq 2$.

b) Vế trái không âm với mọi x.

c) Giản ước cả hai vế cho $x^2 + (x-3)^2$ dẫn đến $2 > 5$. Điều này vô lí.

d) Do $\sqrt{1 + 2(x+1)^2} \geq 1$ và $\sqrt{10 - 6x + x^2} = \sqrt{1 + (x-3)^2} \geq 1$.

4.30. a) Vế trái luôn dương với mọi x.

b) Vế trái không âm với mọi x.

c) Giản ước cả hai vế cho x^2. Vế trái của bất đẳng thức mới nhận được luôn dương.

4.31. a) $x \neq -1$; $x \neq 3$.

b) $x > 1$; $x \neq 2$; $x \neq 3$; $x \neq 4$.

4.32. Sai lầm của bạn Nam là không để ý đến điều kiện xác định của phương trình $D = [2 ; +\infty)$. Hai vế của (1) chỉ không âm khi $x \in D$ chứ không phải với mọi $x \in \mathbb{R}$. Vì vậy, khi tìm ra $x < 1$ cần phải đối chiếu với điều kiện $x \in [2 ; +\infty)$ để kết luận bất phương trình (1) vô nghiệm.

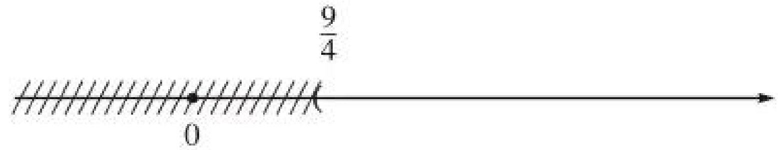
4.33. Sai lầm của bạn Minh là nghĩ rằng $\dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{b} \Leftrightarrow b < a$. Nhớ rằng

$$\frac{1}{a} < \frac{1}{b} \Leftrightarrow \frac{a-b}{ab} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} ab > 0 \\ a > b \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} ab < 0 \\ a < b \end{cases}.$$

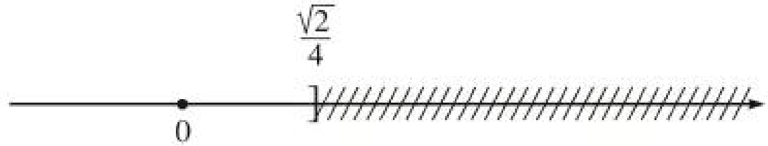
Nhận thấy nếu $x + 5 < 0$ thì (1) vô nghiệm, ngược lại ta có

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x + 5 < \sqrt{x^2 - 2x - 3} \\ x + 5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -\dfrac{7}{3} \\ x > -5 \end{cases} \Leftrightarrow -5 < x < -\dfrac{7}{3}.$$

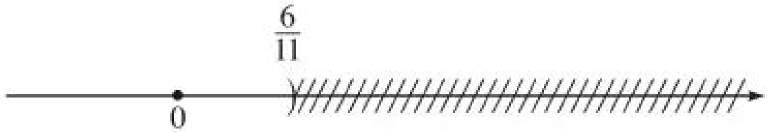
4.34. a) $S = \left(\dfrac{9}{4} ; +\infty\right)$



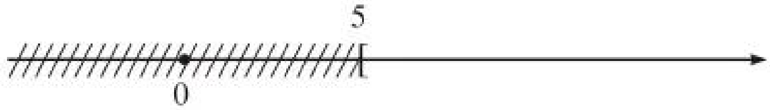
b) $S = \left(-\infty ; \dfrac{\sqrt{2}}{4}\right]$



c) $S = \left(-\infty\,;\,\dfrac{6}{11}\right)$



d) $[5\,;\,+\infty)$.



4.35. a) $S = [-3\,;\,-2]$. Bất phương trình đã cho tương đương với hệ

$$\begin{cases} x+3 \ge 0 \\ x+4 \ge 0 \\ x+2 \le 0 \end{cases} \text{ tức là } \begin{cases} x \ge -3 \\ x \ge -4 \\ x \le -2 \end{cases} \text{ hay } -3 \le x \le -2.$$

b) $S = (-\infty\,;\,-4) \cup (-3\,;\,-2)$.

c) $\sqrt{(x-1)^2(x-2)} \ge 0.$ (1)

• Nếu $x = 1$ thì bất phương trình (1) được nghiệm đúng.

• Nếu $x \ne 1$ thì (1) tương đương với $x - 2 \ge 0$, tức là $x \ge 2$.

Vậy tập nghiệm của (1) là $S = \{1\} \cup [2\,;\,+\infty)$.

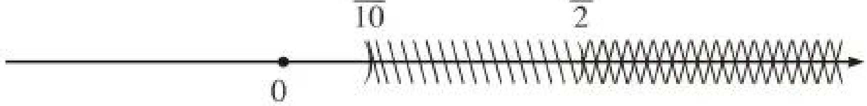
d) $\sqrt{2x-8} - \sqrt{4x-21} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x-8} > \sqrt{4x-21}$.

Điều kiện : $x \ge \dfrac{21}{4}$, khi đó ta có $2x - 8 > 4x - 21$, tức là $x < \dfrac{13}{2}$.

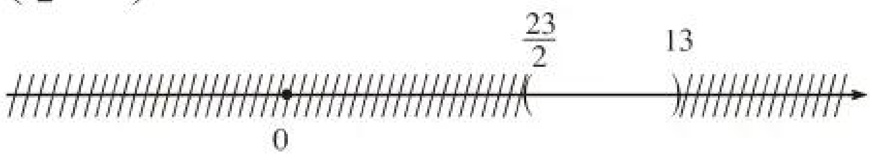
Kết hợp với điều kiện trên dẫn đến $\dfrac{21}{4} \le x < \dfrac{13}{2}$. Vậy tập nghiệm $S = \left[\dfrac{21}{4}\,;\,\dfrac{13}{2}\right)$.

4.36. a) $\begin{cases} 3x + \dfrac{3}{5} < x + 2 \\ \dfrac{6x-3}{2} < 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x < \dfrac{7}{5} \\ x < 1 + \dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \dfrac{7}{10} \\ x < \dfrac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x < \dfrac{7}{10}.$

Biểu diễn tập nghiệm $S = \left(-\infty\,;\,\dfrac{7}{10}\right)$ trên trục số (phần không bị gạch)



b) $S = \left(\dfrac{23}{2}\,;\,13\right)$.



4.37. a) Ta có $mx \geq m^2$. (1)

Nếu $m > 0$ thì (1) $\Leftrightarrow x \geq m$; tập nghiệm $S = [m\,;\,+\infty)$.

Nếu $m = 0$ thì (1) $\Leftrightarrow 0.x \geq 0$; tập nghiệm $S = \mathbb{R}$.

Nếu $m < 0$ thì (1) $\Leftrightarrow x \leq m$; tập nghiệm $S = (-\infty\,;\,m]$.

b) Biến đổi về dạng $(m - 1)x > m + 2$. (2)

Nếu $m > 1$ thì (2) $\Leftrightarrow x > \dfrac{m+2}{m-1}$, tập nghiệm $S = \left(\dfrac{m+2}{m-1}\,;\,+\infty\right)$.

Nếu $m = 1$ thì (2) $\Leftrightarrow 0.x > 3$, tập nghiệm $S = \varnothing$.

Nếu $m < 1$ thì (2) $\Leftrightarrow x < \dfrac{m+2}{m-1}$, tập nghiệm $S = \left(-\infty\,;\,\dfrac{m+2}{m-1}\right)$.

c) Biến đổi về dạng

$$\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}\right).x \leq (ab + bc + ca)\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}\right).$$

Nếu $\dfrac{1}{a+b} + \dfrac{1}{b+c} + \dfrac{1}{c+a} > 0$ thì tập nghiệm $S = (-\infty\,;\,ab + bc + ca]$.

Nếu $\dfrac{1}{a+b} + \dfrac{1}{b+c} + \dfrac{1}{c+a} = 0$ thì tập nghiệm $S = \mathbb{R}$.

Nếu $\dfrac{1}{a+b} + \dfrac{1}{b+c} + \dfrac{1}{c+a} < 0$ thì tập nghiệm $S = [ab + bc + ca\,;\,+\infty)$.

d) Biến đổi về dạng $x(a + b) < a - b$.

Nếu $a + b > 0$ thì $S = \left(-\infty\,;\,\dfrac{a-b}{a+b}\right)$.

Nếu $a + b < 0$ thì $S = \left(\dfrac{a-b}{a+b}\,;\,+\infty\right)$.

Nếu $a + b = 0$ và $a > b$ thì $S = \mathbb{R}$.

Nếu $a + b = 0$ và $a \le b$ thì $S = \varnothing$.

4.38. Nhận thấy rằng $x = -1$ là nghiệm của bất phương trình (1). Do đó bạn Nam giải sai. Sai lầm của bạn Nam ở chỗ :

Từ (I) $\begin{cases} x^2 - 1 \ge 0 \\ x + 1 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow$ (II) $\begin{cases} x - 1 \ge 0 \\ x + 1 \ge 0. \end{cases}$

(thấy ngay $x = -1$ là nghiệm của (I) nhưng không là nghiệm của (II)). Suy luận đúng là

$$\begin{cases} AB \ge 0 \\ A \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow A = 0 \text{ hoặc } \begin{cases} B \ge 0 \\ A > 0 \end{cases}$$

4.39. Ta có

$$\text{(I)} \begin{cases} x + 4m^2 \le 2mx + 1 \\ 3x + 2 > 2x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1 - 2m)x \le 1 - 4m^2 & (1) \\ x > -3. & (2) \end{cases}$$

Nếu $m < \frac{1}{2}$ thì (1) $\Leftrightarrow x \le 1 + 2m$, nên hệ (I) có nghiệm khi $-3 < 1 + 2m$, hay $m > -2$. Kết hợp với điều kiện $m < \frac{1}{2}$, ta có $-2 < m < \frac{1}{2}$.

Nếu $m = \frac{1}{2}$ thì (1) có dạng $0.x \le 0$ (luôn đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$), nên hệ (I) luôn có nghiệm $x > -3$.

Nếu $m > \frac{1}{2}$ thì (1) $\Leftrightarrow x \ge 1 + 2m$, nên hệ (I) luôn có nghiệm $x \ge 1 + 2m$.

Vậy khi $m > -2$ thì hệ (I) luôn có nghiệm.

4.40. Hệ vô nghiệm khi $-2 \le m \le 3$.

4.41. a) Học sinh tự lập bảng xét dấu

$$(3x - 1)(x + 2) > 0 \text{ khi } x < -2 \text{ hoặc } x > \frac{1}{3} ;$$

$$(3x - 1)(x + 2) < 0 \text{ khi } -2 < x < \frac{1}{3}.$$

b) $\frac{2 - 3x}{5x - 1} > 0$ khi $\frac{1}{5} < x < \frac{2}{3}$; $\frac{2 - 3x}{5x - 1} < 0$ khi $x < \frac{1}{5}$ hoặc $x > \frac{2}{3}$.

c) Lập bảng sau :

x	$-\infty$		-2		$-\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$-x+1$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$3x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$(-x+1)(x+2)(3x+1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Vậy $(-x+1)(x+2)(3x+1) < 0$ khi $-2 < x < -\frac{1}{3}$ hoặc $x > 1$;

$(-x+1)(x+2)(3x+1) > 0$ khi $x < -2$ hoặc $-\frac{1}{3} < x < 1$.

d) Ta có $2 - \frac{2+x}{3x-2} = \frac{5x-6}{3x-2}$. Lập bảng sau :

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		$\frac{6}{5}$		$+\infty$
$5x-6$		$-$		$-$	0	$+$	
$3x-2$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{5x-6}{3x-2}$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

Vậy $2 - \frac{2+x}{3x-2} < 0$ khi $\frac{2}{3} < x < \frac{6}{5}$; $2 - \frac{2+x}{3x-2} > 0$ khi $x < \frac{2}{3}$ hoặc $x > \frac{6}{5}$.

4.42. a) $9x^2 - 1 = (3x+1)(3x-1)$. Học sinh tự lập bảng xét dấu và nhận được

$9x^2 - 1 < 0$ khi $-\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}$; $9x^2 - 1 > 0$ khi $x < -\frac{1}{3}$ hoặc $x > \frac{1}{3}$.

b) $-x^3 + 7x - 6 = -(x-1)(x-2)(x+3)$. Học sinh tự lập bảng xét dấu và nhận được

$-x^3 + 7x - 6 < 0$ khi $-3 < x < 1$ hoặc $x > 2$;

$-x^3 + 7x - 6 > 0$ khi $x < -3$ hoặc $1 < x < 2$.

c) $x^3 + x^2 - 5x + 3 = (x-1)^2(x+3)$.

$x^3 + x^2 - 5x + 3 < 0$ khi $x < -3$; $x^3 + x^2 - 5x + 3 > 0$ khi $x > -3$ và $x \neq 1$.

d) $x^2 - x - 2\sqrt{2} = \left(x - \dfrac{1-\sqrt{1+8\sqrt{2}}}{2}\right)\left(x - \dfrac{1+\sqrt{1+8\sqrt{2}}}{2}\right)$;

$x^2 - x - 2\sqrt{2} < 0$ khi $\dfrac{1-\sqrt{1+8\sqrt{2}}}{2} < x < \dfrac{1+\sqrt{1+8\sqrt{2}}}{2}$;

$x^2 - x - 2\sqrt{2} > 0$ khi $x < \dfrac{1-\sqrt{1+8\sqrt{2}}}{2}$ hoặc $x > \dfrac{1+\sqrt{1+8\sqrt{2}}}{2}$.

4.43. a) Biến đổi biểu thức về dạng $\dfrac{2x}{(3-x)(3+x)}$. Học sinh tự lập bảng xét dấu. Kết quả được biểu thức dương khi $x < -3$ hoặc $0 < x < 3$; biểu thức âm khi $-3 < x < 0$ hoặc $x > 3$.

b) $\dfrac{x^2 - 6x + 8}{x^2 + 8x - 9} = \dfrac{(x-2)(x-4)}{(x-1)(x+9)}$. Lập bảng xét dấu sau :

x	$-\infty$		-9		1		2		4		$+\infty$
$x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-4$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x+9$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$\dfrac{(x-2)(x-4)}{(x-1)(x+9)}$		$+$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	

Vậy $\dfrac{x^2 - 6x + 8}{x^2 + 8x - 9} < 0$ khi $x \in (-9 ; 1) \cup (2 ; 4)$;

$\dfrac{x^2 - 6x + 8}{x^2 + 8x - 9} > 0$ khi $x \in (-\infty ; -9) \cup (1 ; 2) \cup (4 ; +\infty)$.

c) Biến đổi biểu thức về dạng $\dfrac{(x+2)^2}{x^2(x^2-2)}$. Từ đó, biểu thức đã cho sẽ dương khi $x \in (-\infty ; -2) \cup (-2 ; -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2} ; +\infty)$ và sẽ âm khi $x \in (-\sqrt{2} ; 0) \cup (0 ; \sqrt{2})$.

d) Ta có $\dfrac{|x+1|-1}{x^2+x+1} = \begin{cases} \dfrac{x}{x^2+x+1} \text{ khi } x \geq -1 \\ \dfrac{-x-2}{x^2+x+1} \text{ khi } x < -1. \end{cases}$

Dấu của biểu thức trên hoàn toàn phụ thuộc vào dấu của tử thức (vì $x^2 + x + 1 > 0$ với mọi x). Vì vậy :

$$\frac{|x+1|-1}{x^2+x+1} < 0 \text{ khi } x \in (-2 ; 0)$$

và $$\frac{|x+1|-1}{x^2+x+1} > 0 \text{ khi } x \in (-\infty ; -2) \cup (0 ; +\infty).$$

4.44. a) Tập nghiệm $S = (-\infty ; -1) \cup \left(\sqrt{2} ; \dfrac{3}{2}\right)$.

b) Biến đổi bất phương trình về dạng $\dfrac{5x+4}{3x+1} \leq 0$.

Tập nghiệm $S = \left[-\dfrac{4}{5} ; -\dfrac{1}{3}\right)$.

4.45. a) Dựa vào tính chất $|a| + |b| = |a - b| \Leftrightarrow ab \leq 0$,

và để ý rằng $(5 + x) - (x - 3) = 8$ ta có

$$|5 + x| + |x - 3| = 8 \Leftrightarrow (5 + x)(x - 3) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -5 \leq x \leq 3.$$

Chú ý. Học sinh có thể giải bằng cách chia thành các khoảng để phá dấu giá trị tuyệt đối nhưng lời giải sẽ dài hơn.

b) Dựa vào tính chất $|a| = a \Leftrightarrow a \geq 0$, ta có

$$\left|x^2 - 5x + 6\right| = x^2 - 5x + 6 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2 \text{ hoặc } x \geq 3.$$

c) Ta có $|2x - 1| = \begin{cases} 2x - 1 \text{ khi } x \geq \dfrac{1}{2} \\ 1 - 2x \text{ khi } x < \dfrac{1}{2}. \end{cases}$

Nếu $x \geq \frac{1}{2}$ thì $|2x-1| = x+2 \Leftrightarrow 2x-1 = x+2 \Leftrightarrow x = 3$ (thoả mãn điều kiện $x \geq \frac{1}{2}$).

Nếu $x < \frac{1}{2}$ thì $|2x-1| = x+2 \Leftrightarrow 1-2x = x+2 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$ (thoả mãn điều kiện $x < \frac{1}{2}$).

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{-\frac{1}{3}\,;\,3\right\}$.

d) Tập nghiệm $S = \{-3\,;\,2\}$.

4.46. a) $|3x-5| < 2 \Leftrightarrow -2 < 3x-5 < 2 \Leftrightarrow 1 < x < \frac{7}{3}$.

b) $\left|\frac{2-x}{x+1}\right| \geq 2 \Leftrightarrow \frac{2-x}{x+1} \geq 2$ hoặc $\frac{2-x}{x+1} \leq -2$.

• Trường hợp $\frac{2-x}{x+1} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{-3x}{x+1} \geq 0 \Leftrightarrow -1 < x \leq 0$.

• Trường hợp $\frac{2-x}{x+1} \leq -2 \Leftrightarrow \frac{4+x}{x+1} \leq 0 \Leftrightarrow -4 \leq x < -1$.

Vậy tập nghiệm $S = (-4\,;\,-1) \cup (-1\,;\,0]$.

c) Phân chia hai trường hợp $x \geq 2$ và $x < 2$.

Tập nghiệm $S = \left(-\infty\,;\,\frac{5}{3}\right)$.

d) Ta có

$$|x+1| = \begin{cases} x+1 & \text{khi } x \geq -1 \\ -x-1 & \text{khi } x < -1\,; \end{cases} \qquad |x| = \begin{cases} x & \text{khi } x \geq 0 \\ -x & \text{khi } x < 0. \end{cases}$$

Gọi bất phương trình đã cho là (1).

• Nếu $x < -1$ thì

(1) $\Leftrightarrow -x-1 \leq -x-x+2 \Leftrightarrow x \leq 3$.

Kết hợp với điều kiện $x < -1$, ta được $x < -1$.

• Nếu $-1 \leq x < 0$ thì

(1) $\Leftrightarrow x+1 \leq -x-x+2 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{3}$

Kết hợp với điều kiện $-1 \leq x < 0$, ta được $-1 \leq x \leq 0$.

• Nếu $x \geq 0$ thì

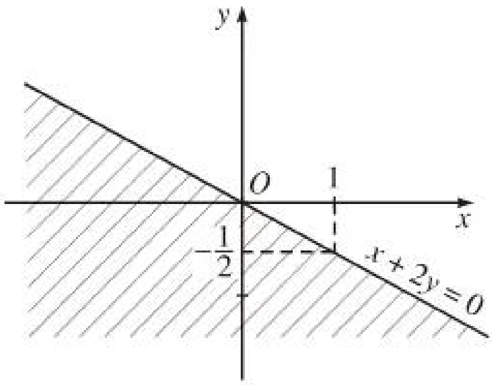
(1) $\Leftrightarrow x+1 \leq x-x+2 \Leftrightarrow x \leq 1$.

Kết hợp với điều kiện $x \geq 0$, ta được $0 \leq x \leq 1$.

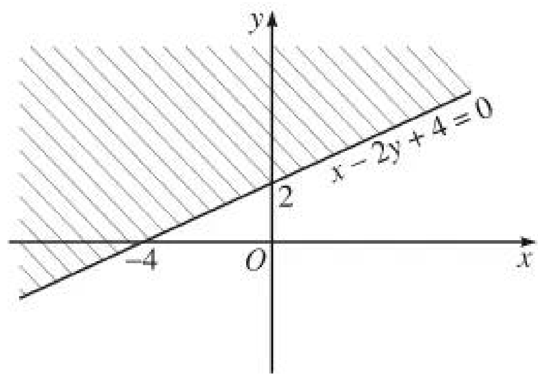
Vậy tập nghiệm của (1) là $S = (-\infty ; 1]$.

4.47. a) $2(x+y+1) > x+2 \Leftrightarrow x+2y > 0$.

Miền nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng (phần không bị gạch, không kể bờ) trong hình 4.3.



Hình 4.3

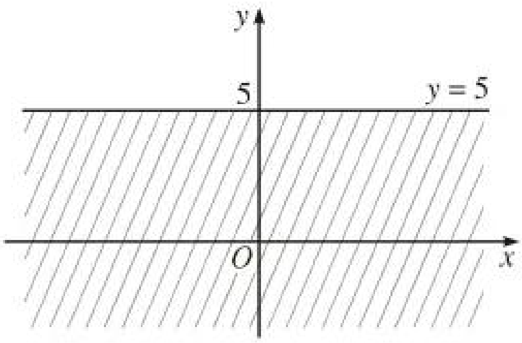


Hình 4.4

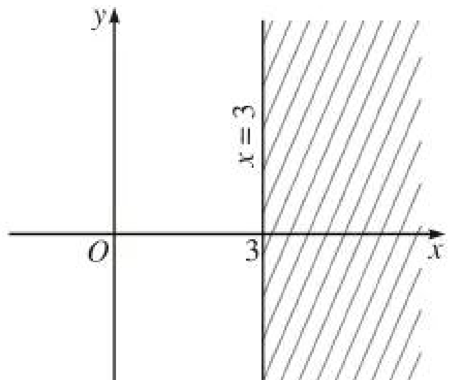
b) $2(y+x) \leq 3(x+1)+1 \Leftrightarrow x-2y+4 \geq 0$.

Miền nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng (phần không bị gạch kể cả bờ) trong hình 4.4.

c) Miền nghiệm là nửa mặt phẳng (phần không bị gạch, không kể bờ) trong hình 4.5.



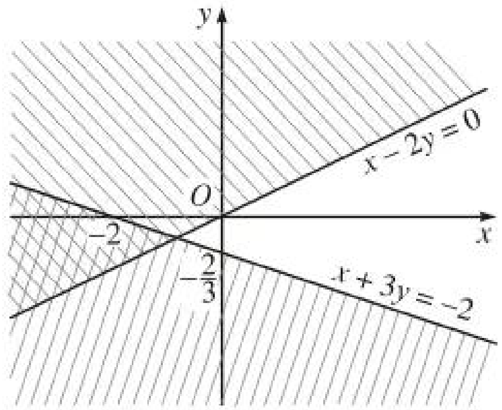
Hình 4.5



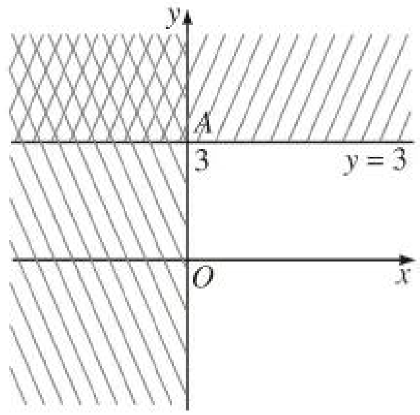
Hình 4.6

d) Miền nghiệm là nửa mặt phẳng (phần không bị gạch kể cả bờ) trong hình 4.6.

4.48. a) Miền nghiệm là phần không bị gạch (không kể biên) trong hình 4.7.



Hình 4.7

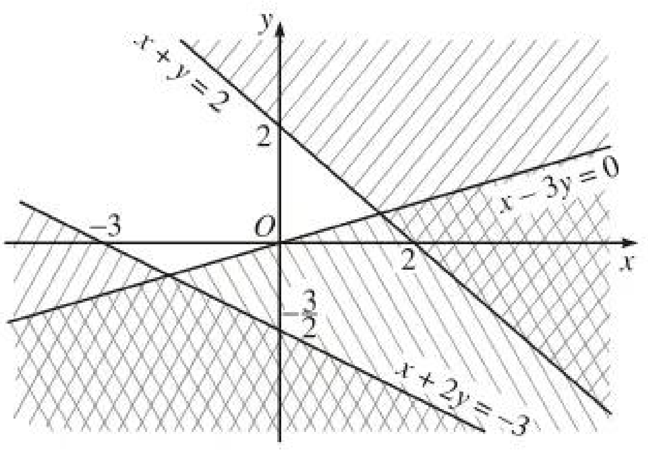


Hình 4.8

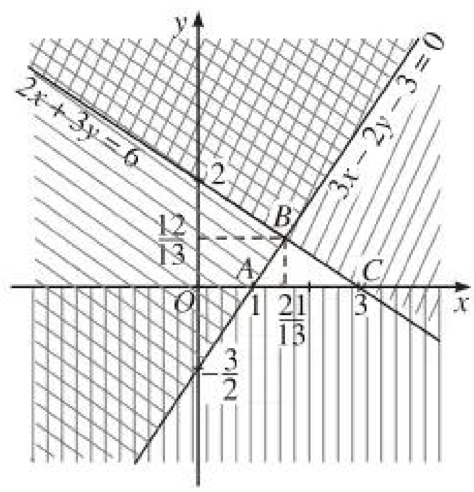
b) Miền nghiệm là phần không bị gạch trong hình 4.8 (không kể tia *At*)

4.49. a) Miền nghiệm là phần không bị gạch (không kể biên) trong hình 4.9.

b) Miền nghiệm là miền tam giác *ABC* (không kể hai cạnh *AB*, *BC*) trong hình 4.10.



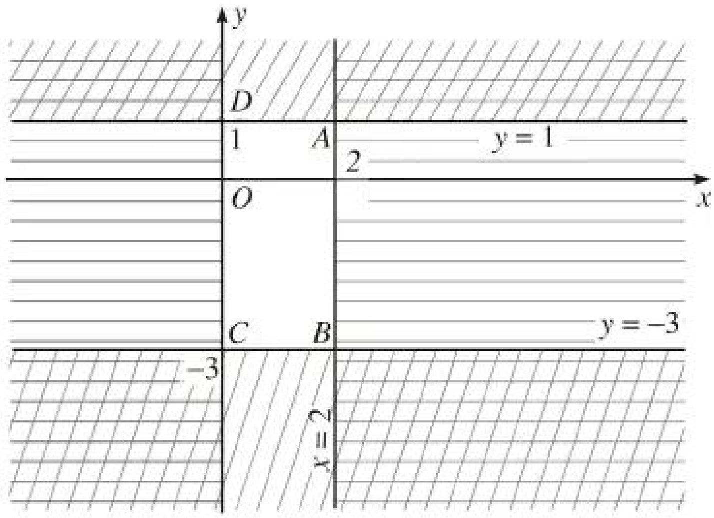
Hình 4.9



Hình 4.10

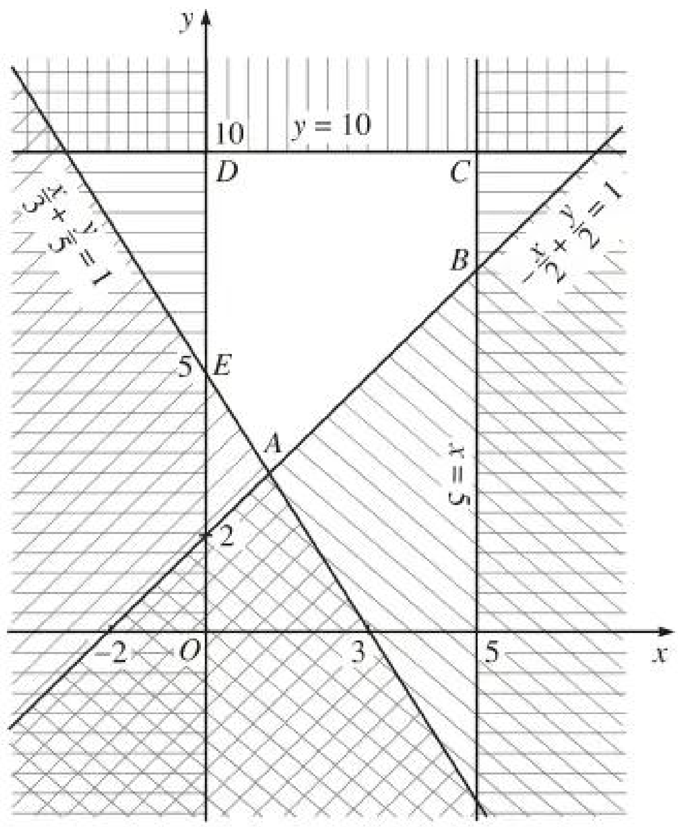
4.50. Ta có $\begin{cases} |x-1| < 1 \\ |y+1| \le 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x - 1 < 1 \\ -2 \le y + 1 \le 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 2 \\ -3 \le y \le 1. \end{cases}$

Miền nghiệm là miền hình chữ nhật *DABC* (không kể hai cạnh *AB* và *CD*) ở hình 4.11.



Hình 4.11

4.51. a) Xem hình 4.12, miền nghiệm là hình ngũ giác *ABCDE*.



Hình 4.12

b) Biểu thức $T = 2x - 2y + 3$ đạt giá trị nhỏ nhất tại một trong các đỉnh của ngũ giác *ABCDE*. Dùng phép thử trực tiếp, ta thấy $T = 2x - 2y + 3$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng -17 tại $x = 0$, $y = 10$ (tại điểm *D*).

4.52. a) Số giờ làm việc trong mỗi ngày của M_1 là $3x + y$.

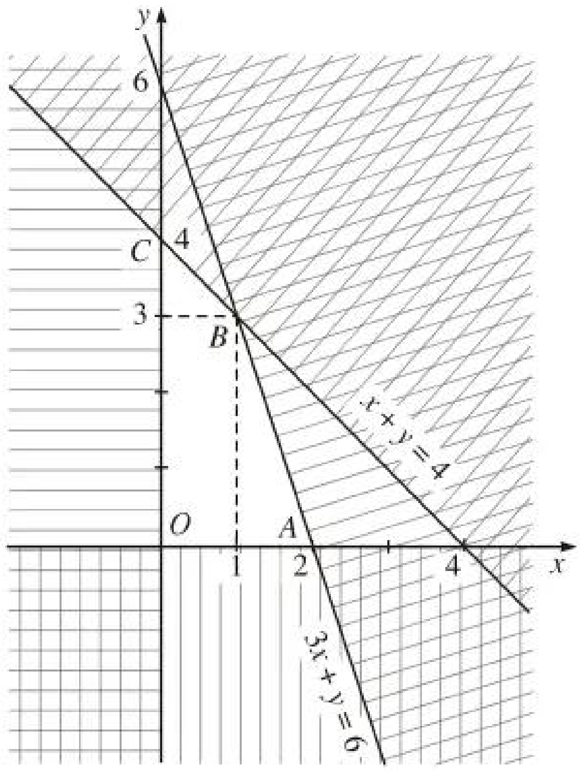
Số giờ làm việc trong mỗi ngày của M_2 là $x + y$.

Theo bài ra ta có hệ bất phương trình

$$(\mathrm{I})\begin{cases} 3x + y \le 6 \\ x + y \le 4 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0. \end{cases}$$

Miền nghiệm (S) của hệ (I) là miền tứ giác $OABC$ (h.4.13).

b) Số tiền lãi của xí nghiệp mỗi ngày là $T = 2x + 1{,}6y$ (triệu đồng)



Hình 4.13

c) $T = 2x + 1{,}6y$ đạt giá trị lớn nhất tại một trong các đỉnh của tứ giác $OABC$. Dùng phép thử trực tiếp, ta thấy $T = 2x + 1{,}6y$ đạt giá trị lớn nhất khi $x = 1$; $y = 3$ (điểm B).

Vậy để số tiền lãi lớn nhất (6,8 triệu đồng), xí nghiệp cần sản xuất mỗi ngày 1 tấn sản phẩm I và 3 tấn sản phẩm II.

4.53. a) Tam thức đã cho có $a = 2 > 0$ và biệt thức $\Delta' = 1 - 10 = -9 < 0$, nên tam thức luôn dương.

b) Tam thức đã cho có $a = -1$ và biệt thức $\Delta = 1 > 0$, và có hai nghiệm $x_1 = 2$, $x_2 = 3$. Suy ra tam thức dương trong khoảng $(2 ; 3)$ và âm trong các khoảng $(-\infty ; 2)$ và $(3 ; +\infty)$.

c) Tam thức đã cho có $a = 2$, biệt thức $\Delta = 0$ nên tam thức dương với mọi $x \ne -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

d) Tam thức đã cho có $a = -4$, biệt thức $\Delta' = 8 > 0$ và có hai nghiệm $x_1 = -\frac{1+\sqrt{2}}{2}$, $x_2 = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$, nên tam thức dương trong khoảng $\left(-\frac{1+\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)$ và âm trong các khoảng $\left(-\infty; -\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)$ và $\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}; +\infty\right)$.

e) Tam thức đã cho có $a = \sqrt{3}$ và biệt thức $\Delta = (\sqrt{3}+1)^2 - 4\sqrt{3} = (\sqrt{3}-1)^2 > 0$, tam thức có hai nghiệm $x_1 = -1$, $x_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. Suy ra tam thức dương trong các khoảng $(-\infty; -1)$, $\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}; +\infty\right)$ và âm trong khoảng $\left(-1; \frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$.

Chú ý : Nhận xét $a - b + c = 0$ nên tam thức có hai nghiệm

$$x_1 = -1, x_2 = -\frac{c}{a} = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Từ đó áp dụng định lí về dấu tam thức.

f) Tam thức có $a = 1$ và $a + b + c = 0$, nên tam thức có hai nghiệm

$$x_1 = -\sqrt{5}, x_2 = 1.$$

Suy ra tam thức luôn dương trong các khoảng $(-\infty; -\sqrt{5})$, $(1; +\infty)$ và âm trong khoảng $(-\sqrt{5}; 1)$.

g) Tam thức đã cho có $a = -0{,}3 < 0$, biệt thức $\Delta = -0{,}8 < 0$, nên tam thức luôn âm với mọi x.

h) Tam thức đã cho có $a = 1$,

$$\Delta = (\sqrt{7}-1)^2 - 4\sqrt{3} = 8 - 2\sqrt{7} - 4\sqrt{3}$$
$$= 2(2-\sqrt{7}) + 4(1-\sqrt{3}) < 0.$$

Nên tam thức luôn dương với mọi x.

4.54. a) Đặt $A(x) = \frac{x-7}{4x^2 - 19x + 12}$. Tam thức $4x^2 - 19x + 12$ có hai nghiệm $x_1 = \frac{3}{4}$, $x_2 = 4$.

Lập bảng xét dấu $A(x)$:

x	$-\infty$		$\frac{3}{4}$		4		7		$+\infty$
$x-7$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
$4x^2-19x+12$		$+$	0	$-$	0	$+$	|	$+$	
$A(x)$		$-$	||	$+$	||	$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu ta thu được $A(x) > 0$ trong các khoảng $\left(\frac{3}{4} ; 4\right)$ và $(7 ; +\infty)$ và $A(x) < 0$ trong các khoảng $(-\infty ; \frac{3}{4})$ và $(4 ; 7)$.

b) Đặt $B(x) = \dfrac{11x+3}{-x^2+5x-7}$. Tam thức $-x^2+5x-7$ có $a = -1 < 0$ và biệt thức $\Delta = -3 < 0$ nên tam thức luôn luôn âm với mọi x. Suy ra $B(x) > 0$ $\Leftrightarrow 11x + 3 < 0 \Leftrightarrow x < -\dfrac{3}{11}$ và

$$B(x) < 0 \Leftrightarrow 11x + 3 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{3}{11}.$$

c) Đặt $C(x) = \dfrac{3x-2}{x^3-3x^2+2} = \dfrac{3x-2}{(x-1)(x^2-2x-2)}$.

Lập bảng xét dấu (HS tự lập), ta thu được :

$C(x) > 0$ trong các khoảng $(-\infty ; 1-\sqrt{3})$, $(\frac{2}{3} ; 1)$ và $(1+\sqrt{3} ; +\infty)$.

$C(x) < 0$ trong các khoảng $\left(1-\sqrt{3} ; \frac{2}{3}\right)$ và $(1 ; 1+\sqrt{3})$.

d) Đặt $D(x) = \dfrac{x^2+4x-12}{\sqrt{6}x^2+3x+\sqrt{2}}$.

Ta thấy tam thức $\sqrt{6}x^2+3x+\sqrt{2} > 0$ với mọi x, nên dấu của $D(x)$ cùng dấu với dấu của tam thức $x^2+4x-12$. Suy ra $D(x) > 0$ trong các khoảng $(-\infty ; -6)$ và $(2 ; +\infty)$, $D(x) < 0$ trong khoảng $(-6 ; 2)$.

e) Đặt $E(x) = \dfrac{x^2 - 3x - 2}{-x^2 + x - 1}$. Ta thấy $-x^2 + x - 1 < 0$ với mọi x, nên $E(x)$ trái dấu với dấu tam thức $x^2 - 3x - 2$.

Suy ra : $E(x) > 0$ trong khoảng $\left(\dfrac{3-\sqrt{17}}{2} ; \dfrac{3+\sqrt{17}}{2}\right)$.

$E(x) < 0$ trong các khoảng $\left(-\infty ; \dfrac{3-\sqrt{17}}{2}\right)$ và $\left(\dfrac{3+\sqrt{17}}{2} ; +\infty\right)$.

f) Đặt $F(x) = \dfrac{x^3 - 5x + 4}{x^4 - 4x^3 + 8x - 5} = \dfrac{(x-1)(x^2 + x - 4)}{(x-1)^2(x^2 - 2x - 5)}$.

Lập bảng xét dấu (HS tự lập) ta thu được :

$F(x) > 0$ trong các khoảng

$\left(\dfrac{-1-\sqrt{17}}{2} ; 1-\sqrt{6}\right)$, $\left(1 ; \dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}\right)$ và $(1+\sqrt{6} ; +\infty)$.

$F(x) < 0$ trong các khoảng

$\left(-\infty ; \dfrac{-1-\sqrt{17}}{2}\right)$, $(1-\sqrt{6} ; 1)$, $\left(\dfrac{-1+\sqrt{17}}{2} ; 1+\sqrt{6}\right)$.

4.55. a) Ta có biệt thức $\Delta = (m+1)^2 - 4\left(m - \dfrac{1}{3}\right) = m^2 - 2m + \dfrac{7}{3}$.

Xét tam thức $f(m) = m^2 - 2m + \dfrac{7}{3}$, có $a = 1$và biệt thức $\Delta' = -\dfrac{4}{3} < 0$ nên $f(m) > 0$ với mọi m. Vậy phương trình luôn có nghiệm.

Chú ý : Ta có thể xét $\Delta = (m+1)^2 - 4\left(m - \dfrac{1}{3}\right) = (m-1)^2 + \dfrac{4}{3} \geq \dfrac{4}{3}$.

b) Ta có $\Delta' = (m-1)^2 - (m-3) = \left(m - \dfrac{3}{2}\right)^2 + \dfrac{7}{4} \geq \dfrac{7}{4} > 0$, nên phương trình luôn luôn có nghiệm.

Chú ý : Ta có thể sử dụng định lí về dấu tam thức bậc hai để làm bài tập này, học sinh tự làm.

c) Ta có $\Delta = (m+2)^2 - 4\left(\dfrac{3}{4}m + \dfrac{1}{2}\right) = \left(m + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{7}{4} \geq \dfrac{7}{4} > 0$, nên phương trình luôn có nghiệm.

d) *) Nếu $m = 1$ phương trình có nghiệm $x = -1$.

*) Nếu $m \neq 1$ ta có

$$\Delta = (3m-2)^2 - 4(m-1)(3-2m)$$
$$= 17m^2 - 32m + 16 = m^2 + 16(m-1)^2 > 0,$$

nên phương trình luôn có nghiệm.

Tóm lại với mọi giá trị của m thì phương trình luôn có nghiệm.

4.56. a) Ta có $\Delta' = 4m^2 - 2(2m^2+1) = -2 < 0$, nên phương trình vô nghiệm với mọi giá trị của m.

b) Ta có $\Delta = (m+1)^2 - 2(m^2+m+1) = -m^2 - 1 < 0$, nên phương trình vô nghiệm với mọi giá trị của m.

c) Ta có $\Delta' = (m-3)^2 - (2m^2 - 7m + 10) = -m^2 + m - 1$.

Xét tam thức $f(m) = -m^2 + m - 1$, có $a = -1$ và $\Delta = -3$ nên $f(m) < 0$ với mọi m.

Suy ra phương trình luôn vô nghiệm.

d) Ta có $\Delta = (\sqrt{3}m - 1)^2 - 4(m^2 - \sqrt{3}m + 2) = -m^2 + 2\sqrt{3}m - 7$ $= -(m-\sqrt{3})^2 - 4 < 0$ nên phương trình vô nghiệm với mọi giá trị của m.

4.57. a) Ta có $\Delta' = 4 - (m-5) = 9 - m$ và tam thức có $a = 1 > 0$. Tam thức luôn dương khi và chỉ khi $\Delta' = 9 - m < 0 \Leftrightarrow m > 9$.

b) Tam thức đã cho có biệt thức

$$\Delta = (m+2)^2 - 4(8m+1) = m^2 - 28m = m(m-28) \text{ và } a = 1.$$

Tam thức luôn dương khi và chỉ khi $\Delta = m(m-28) < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 28$.

c) Ta có $\Delta' = 4 - (m-2)^2 = -m^2 + 4m$ và hệ số $a = 1$. Tam thức luôn dương khi và chỉ khi $\Delta = -m^2 + 4m < 0 \Leftrightarrow m > 4$ hoặc $m < 0$.

d) *) Nếu $3m + 1 = 0$ thì $m = -\frac{1}{3}$. Khi đó biểu thức luôn dương với mọi x.

*) Nếu $m \neq -\frac{1}{3}$ thì tam thức đã cho có biệt thức

$$\Delta = (3m+1)^2 - 4(m+4)(3m+1) = (3m+1)(-m-15)$$
$$= -3m^2 - 46m - 15 = -(3m^2 + 46m + 15).$$

Tam thức luôn dương khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a = 3m + 1 > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \dfrac{-1}{3} \\ (3m+1)(m+15) > 0 \end{cases} \qquad (*)$$

$$\Leftrightarrow m > -\frac{1}{3} \text{ hoặc } m < -15.$$

Kết hợp với (*) suy ra $m > -\frac{1}{3}$. Tóm lại với $m \geq -\frac{1}{3}$ thì biểu thức luôn dương với mọi x.

4.58. a) *) Khi $m = 4$ dễ thấy biểu thức không luôn luôn âm với mọi x.

*) Khi $m \neq 4$, để tam thức luôn âm với mọi x, điều kiện cần và đủ là :

$$\begin{cases} m - 4 < 0 \\ \Delta = (m+1)^2 - 4(m-4)(2m-1) < 0. \end{cases} \qquad (*)$$

Ta có $\Delta = -7m^2 + 38m - 15$, $\Delta < 0$ khi và chỉ khi $m < \frac{3}{7}$ hoặc $m > 5$. Kết hợp với (*), suy ra $m < \frac{3}{7}$.

b) *) Khi $m = -2$, biểu thức đã cho trở thành $5x - 4$. Biểu thức này không thể luôn luôn âm với mọi x. Vậy $m = -2$ không thoả mãn.

*) Khi $m \neq -2$ thì tam thức luôn âm khi và chỉ khi

$$\begin{cases} m + 2 < 0 \\ \Delta = 25 + 16(m+2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < -\frac{57}{16}.$$

c) Biểu thức luôn âm khi và chỉ khi $m < -\frac{36}{5}$.

d) Biểu thức luôn âm khi và chỉ khi $-\frac{5}{3} < m < -1$.

4.59. a) Xét tam thức $f(x) = 2x^2 - 7x - 15$ có $a = 2 > 0$ và $\Delta = 49 + 120 = 169 = 13^2$, nên tam thức có hai nghiệm $x_1 = -\frac{3}{2}$, $x_2 = 5$. Do đó bất đẳng thức có tập nghiệm là : $(-\infty; \frac{-3}{2}] \cup [5; +\infty)$

b) Nghiệm bất phương trình là $-\frac{7}{3} < x < \frac{15}{4}$.

c) Tập nghiệm bất phương trình là $(-\infty ; 1] \cup [4 ; +\infty)$.

d) Bất phương trình được biến đổi thành $(2x + 3)^2 \geq 0$ nên tập nghiệm là tập số thực $\mathbb{R}$.

e) Nghiệm bất phương trình là $3 < x < 6$.

4.60. a) Bất phương trình đã cho tương đương với bất phương trình :

$$\frac{2x-5}{x^2-6x-7} - \frac{1}{x-3} < 0 \Leftrightarrow \frac{(2x-5)(x-3)-(x^2-6x-7)}{(x-3)(x+1)(x-7)} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-5x+22}{(x-3)(x+1)(x-7)} < 0 \qquad (*)$$

Tam thức $x^2 - 5x + 22$ có $a = 1 > 0$, $\Delta = -63 < 0$, nên $x^2 - 5x + 22 > 0$ với mọi x. Suy ra (*) tương đương với $(x-3)(x+1)(x-7) < 0$.

Lập bảng xét dấu :

x	∞		-1		3		7		$+\infty$
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-7$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x-3)(x+1)(x-7)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu suy ra tập nghiệm của bất phương trình đã cho là :

$$T = (-\infty ; -1) \cup (3 ; 7).$$

b) Bất phương trình được biến đổi tương đương thành :

$$\frac{11x^2+5x+6}{x(x^2+5x+6)} \leq 0.$$

Suy ra tập nghiệm là : $S = (-\infty ; -3) \cup (-2 ; 0)$.

c) Bất phương trình được biến đổi tương đương với :

$$\frac{(x+1)(2-x)}{(x+1)(x^2-x+1)} \geq 0.$$

Suy ra tập nghiệm là : $S = (-\infty ; -1) \cup (-1 ; 2]$.

d) Bất phương trình được biến đổi tương đương với :

$$\frac{x^2 + x - 1}{(x-1)(x+1)x} \le 0.$$

Suy ra tập nghiệm là : $S = \left(-\infty\,;\,\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right] \cup (-1\,;\,0) \cup \left[\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\,;\,1\right)$.

4.61. Bất phương trình được biến đổi thành $\frac{2x+9}{(x-2)(x+2)} < 0$, với $x \ne 0$.

Suy ra tập nghiệm của bất phương trình đã cho là

$$S = \left(-\infty\,;\,-\frac{9}{2}\right) \cup (-2\,;\,0) \cup (0\,;\,2).$$

Do đó, giá trị nguyên không âm của x thoả mãn bất phương trình là $x = 1$.

4.62. a) Nhận xét $x = -1$ và $x = 2$ là nghiệm của phương trình $x^2 - x - 2 = 0$.

Nếu $x \ne -1$ và $x \ne 2$ thì bất phương trình tương đương với hệ

$$\begin{cases} x - 1 \ge 0 \\ x^2 - x - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ x < -1 \text{ hoặc } x > 2. \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = [2\,;\,+\infty) \cup \{-1\}$.

b) $T = [-2\,;\,3]$.

4.63. a) Phương trình $x^2 - 2x - 3 = 0$ có hai nghiệm $x_1 = -1$; $x_2 = 3$. Suy ra bất phương trình

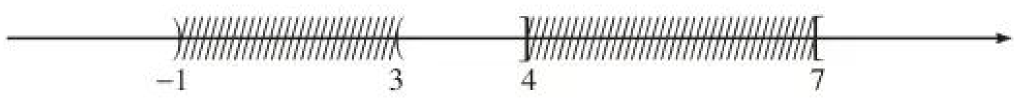
$x^2 - 2x - 3 > 0$ có tập nghiệm là : $S_1 = (-\infty\,;\,-1) \cup (3\,;\,+\infty)$.

Phương trình $x^2 - 11x + 28 = 0$ có hai nghiệm $x_1 = 4$; $x_2 = 7$. Suy ra bất phương trình $x^2 - 11x + 28 \ge 0$ có nghiệm là : $S_2 = (-\infty\,;\,4] \cup [7\,;\,+\infty)$.

Nghiệm của hệ bất phương trình là giao của hai tập nghiệm S_1 và S_2, tức là

$$S = S_1 \cap S_2 = (-\infty, -1) \cup (3\,;\,4] \cup [7\,;\,+\infty).$$

Biểu diễn trên trục số :



b) $1 < x < \frac{3}{2}$.

c) Bất phương trình vô nghiệm ;

d) $1 < x < 7$.

4.64. a) Phương trình $x^2 - 4x - 5 = 0$ có hai nghiệm $x_1 = -1$; $x_2 = 5$, nên bất phương trình $x^2 - 4x - 5 < 0$ có tập nghiệm là $S_1 = (-1 ; 5)$.

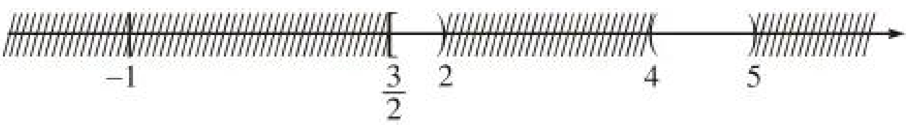
Phương trình $x^2 - 6x + 8 = 0$ có hai nghiệm $x_1 = 2$; $x_2 = 4$, nên bất phương trình $x^2 - 6x + 8 > 0$ có tập nghiệm là $S_2 = (-\infty ; 2) \cup (4 ; +\infty)$.

Nghiệm của bất phương trình $2x - 3 \geq 0$ là $S_3 = \left[\frac{3}{2} ; +\infty\right)$.

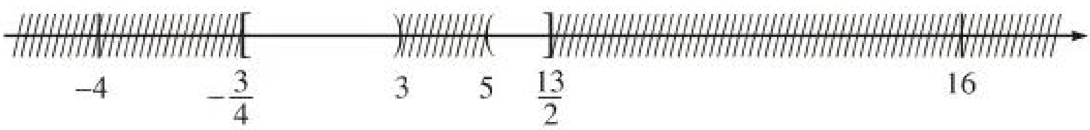
Suy ra nghiệm của hệ là giao của ba tập S_1, S_2 , S_3, tức là

$$S = S_1 \cap S_2 \cap S_3 = \left[\frac{3}{2} ; 2\right) \cup (4 ; 5).$$

Biểu diễn trên trục số :



b) $S = \left[-\frac{3}{4} ; 3\right) \cup \left(5 ; \frac{13}{2}\right]$. Biểu diễn trên trục số :



4.65. Tập xác định của hàm số $y = f(x)$ gồm các giá trị x thoả mãn

$$\begin{cases} \dfrac{3 - 3x}{-x^2 - 2x + 15} - 1 \geq 0 \\ -x^2 - 2x + 15 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3 - 3x - 15 + 2x + x^2}{-(x^2 + 2x - 15)} \geq 0 \\ -x^2 - 2x + 15 \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 12}{x^2 + 2x - 15} \leq 0 \\ x^2 + 2x - 15 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x + 3)(x - 4)}{(x - 3)(x + 5)} \leq 0 \\ x^2 + 2x - 15 \neq 0. \end{cases}$$

Đặt $P(x) = \dfrac{(x+3)(x-4)}{(x-3)(x+5)}$.

Lập bảng xét dấu $P(x)$:

x	$-\infty$		-5		-3		3		4		$+\infty$
$x-4$		$-$	|	$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
$x-3$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$x+3$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$x+5$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	|	$+$	
$P(x)$		$+$	||	$-$	0	$+$	||	$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu suy ra tập xác định của hàm số $f(x)$ là :

$$(-5\ ;\ -3] \cup (3\ ;\ 4].$$

4.66. a) Phương trình $x^2 - 3x - 4 = 0$ có hai nghiệm $x_1 = -1$, $x_2 = 4$, nên bất phương trình $x^2 - 3x - 4 \le 0$ có tập nghiệm là $S_1 = [-1\ ;\ 4]$.

Xét bất phương trình $(m-1)x - 2 \ge 0 \Leftrightarrow (m-1)x \ge 2$. (1)

*) Nếu $m - 1 = 0$ thì bất phương trình trên vô nghiệm.

*) Nếu $m - 1 > 0 \Leftrightarrow m > 1$ thì bất phương trình (1) có tập nghiệm là

$$S_2 = \left[\frac{2}{m-1}\ ;\ +\infty\right).$$

Để hệ có nghiệm, điều kiện cần và đủ là $S_1 \cap S_2 \ne \varnothing$ tức là

$\dfrac{2}{m-1} \le 4 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} \le m - 1 \Leftrightarrow m \ge \dfrac{3}{2}$, thoả mãn điều kiện $m > 1$.

Vậy $m \ge \dfrac{3}{2}$.

*) Nếu $m - 1 < 0 \Leftrightarrow m < 1$ thì bất phương trình (1) có tập nghiệm là

$$S_3 = \left(-\infty\ ;\ \frac{2}{m-1}\right].$$

Để hệ có nghiệm, điều kiện cần và đủ là

$$S_1 \cap S_3 \neq \varnothing \Leftrightarrow \frac{2}{m-1} \geq -1 \Leftrightarrow -(m-1) \geq 2 \Leftrightarrow m \leq -1,$$

thoả mãn điều kiện $m < 1$. Vậy $m \leq -1$.

Tóm lại các giá trị của m để hệ có nghiệm là $m \in (-\infty\,; -1] \cup \left[\frac{3}{2}\ +\infty\right)$.

b) Tập hợp các giá trị m thoả mãn bài toán là :

$$\left(-\frac{1}{11}\,; +\infty\right)$$

4.67. a) $-2-\sqrt{2} \leq m \leq -2+\sqrt{2}$.

b) Nếu $m = 1$, phương trình có nghiệm $x = \frac{1}{8}$.

Nếu $m \neq 1$, để phương trình có nghiệm điều kiện cần và đủ là :

$$\Delta' = (m+3)^2 - (m-1)(2-m) \geq 0 \Leftrightarrow 2m^2 + 3m + 11 \geq 0.$$

Ta thấy tam thức $f(m) = 2m^2 + 3m + 11$ có $a = 2 > 0$ và $\Delta = -79 < 0$ nên $f(m) > 0$ với mọi m.

Vậy phương trình luôn luôn có nghiệm với mọi giá trị của m.

4.68. a) $m \geq 1$.

b) Không tồn tại m để bất phương trình nghiệm đúng với mọi x.

c) Ta thấy tam thức $x^2 - 8x + 20$ có $a = 1 > 0$, $\Delta' = 16 - 20 = -4 < 0$.

Suy ra $x^2 - 8x + 20 > 0$ với mọi x. Do đó bài toán trở thành tìm các giá trị m để bất phương trình $mx^2 + 2(m+1)x + 9m + 4 < 0$ (*) đúng với mọi x.

Nếu $m = 0$ bất phương trình (*) trở thành $2x + 4 < 0$, bất phương trình chỉ nghiệm đúng với $x < -2$, nên $m = 0$ không thoả mãn.

Nếu $m \neq 0$. Để bất phương trình (*) đúng với mọi x thì điều kiện cần và đủ là :

$$\begin{cases} m < 0 \\ \Delta' = (m+1)^2 - m(9m+4) < 0. \end{cases}$$

Ta thấy tam thức $\Delta' = -8m^2 - 2m + 1$ có hai nghiệm là $m_1 = -\frac{1}{2}$, $m_2 = \frac{1}{4}$ nên $\Delta' < 0 \Leftrightarrow m < -\frac{1}{2}$ hoặc $m > \frac{1}{4}$. Kết hợp với điều kiện $m < 0$, suy ra các giá trị cần tìm của m là $m < -\frac{1}{2}$.

d) $m > 5$.

4.69. a) Phương trình có hai nghiệm âm phân biệt khi và chỉ khi :

$$\begin{cases} \Delta' = (m+1)^2 - (9m-5) > 0 \\ \dfrac{S}{2} = -(m+1) < 0 \\ ac = 9m - 5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 7m + 6 > 0 \\ m > -1 \\ m > \dfrac{5}{9} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ m > \dfrac{5}{9} \\ m > 6 \text{ hoặc } m < 1 \end{cases} \Leftrightarrow m > 6 \text{ hoặc } \frac{5}{9} < m < 1.$$

Vậy các giá trị cần tìm của m là $m \in \left(\frac{5}{9} ; 1\right) \cup (6 ; +\infty)$.

b) $m \in (-\infty ; -3) \cup (2 ; 6)$.

4.70. a) + Với $m = 2$, phương trình đã cho trở thành :

$$-6x^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Phương trình có hai nghiệm, nên không thoả mãn yêu cầu của đầu bài.

+ Với $m \neq 2$, đặt $t = x^2 \geq 0$, ta được phương trình

$$f(t) = (m-2)t^2 - 2(m+1)t + 2m - 1 = 0. \qquad (*)$$

Để phương trình đã cho có đúng một nghiệm thì phương trình (*) hoặc có nghiệm kép $t = 0$ hoặc có một nghiệm âm, còn nghiệm thứ hai bằng 0. Bây giờ xét $t = 0$. Khi đó $f(0) = 2m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$. Thay $m = \frac{1}{2}$ vào (*) ta được :

$$f(t) = t\left(-\frac{3}{2}t - 3\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = -2. \end{array}\right.$$

Vậy $m = \frac{1}{2}$ là giá trị cần tìm (để phương trình đã cho có một nghiệm).

b) $m = \dfrac{7+3\sqrt{5}}{2}$, $m \in \left(\dfrac{1}{2}\,;2\right]$. *Hướng dẫn.* Rõ ràng với $m = 2$ phương trình có hai nghiệm $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Với $m \neq 2$.

Để phương trình đã cho có đúng hai nghiệm thì phương trình (*) hoặc có nghiệm kép dương hoặc có một nghiệm âm và một nghiệm dương.

– Phương trình (*) có hai nghiệm trái dấu khi và chỉ khi $ac < 0$ tức là $(m-2)(2m-1) < 0$ hay $\dfrac{1}{2} < m < 2$

– Phương trình (*) có nghiệm kép dương khi và chỉ khi $\Delta' = 0$ và $-\dfrac{b}{2a} > 0$.

$$\Delta' = -m^2 + 7m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{7 \pm 3\sqrt{5}}{2}\ ;$$

$$-\frac{b}{2a} = \frac{m+1}{m-2} > 0 \Leftrightarrow m < -1 \text{ hoặc } m > 2.$$

Chỉ có $m = \dfrac{7+3\sqrt{5}}{2}$ thoả mãn hai điều kiện trên.

c) $2 < m < \dfrac{7+3\sqrt{5}}{2}$. *Hướng dẫn.* Tìm m để phương trình $f(t) = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt. Điều kiện cần và đủ là $\Delta' > 0$, $S > 0$ và $P > 0$.

4.71. a) Phương trình được biến đổi thành $3(3x-2) + \sqrt{3x-2} - 4 = 0$. (*)

Đặt $t = \sqrt{3x-2} \geq 0$, khi đó (*) trở thành $3t^2 + t - 4 = 0$ giải ra có hai nghiệm $t_1 = 1$, $t_2 = -\dfrac{4}{3}$.

Do $t \geq 0$, nên chỉ lấy $t = 1$. Vậy (*) $\Leftrightarrow \sqrt{3x-2} = 1 \Leftrightarrow x = 1$. Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1$.

b) $x = 3$. *Hướng dẫn.* Phương trình tương đương với hệ :

$$\begin{cases} -x^2 + 2x + 4 = (x-2)^2 \\ x - 2 \geq 0 \end{cases}$$

c) $x = \dfrac{-7+\sqrt{13}}{3}$. *Hướng dẫn*. Phương trình đã cho tương đương với hệ

$$\begin{cases} x^2 - 2x - 3 = (2x+3)^2 \\ 2x + 3 \geq 0 \end{cases}$$

d) $x = -3$. *Hướng dẫn*. Phương trình tương đương với

$$\begin{cases} \sqrt{(9-5x)(3-x)} = 9 - x \\ x \leq \dfrac{9}{5}. \end{cases}$$

4.72. a) $x = -1$, $x = 4$.

b) $x \in \{1\ ;\ 3\}$. *Hướng dẫn*. Đặt $x^2 - 4x + 10 = t$, $t \neq 0$.

c) $x \in \left\{\dfrac{3}{4}\ ;\ 2\right\}$. *Hướng dẫn*. Nhận xét $x = 0$ không là nghiệm của phương trình, nên ta chia cả tử và mẫu của vế trái của phương trình cho x ta được phương trình tương đương :

$$\frac{2}{2x + \dfrac{3}{x} - 5} + \frac{13}{2x + \dfrac{3}{x} + 1} = 6.$$

Phương trình này có dạng $\dfrac{2}{y-5} + \dfrac{13}{y+1} = 6$,

trong đó $2x + \dfrac{3}{x} = y$. Từ đó giải được $y = 1$ và $y = 5{,}5$

d) $x = \dfrac{1}{2}(1 - \sqrt{2} \pm \sqrt{2\sqrt{2} - 1})$. *Hướng dẫn*. Cộng vào hai vế của phương trình biểu thức $2x.\dfrac{x}{x-1}$.

Từ đó đi đến : $\left(\dfrac{x^2}{x-1}\right)^2 - 2\dfrac{x^2}{x-1} = 1$.

Đặt $t = \dfrac{x^2}{x-1}$ được phương trình $t^2 - 2t - 1 = 0$.

4.73. a) $x_1 = \sqrt{\dfrac{33}{2}}$, $x_2 = -\sqrt{\dfrac{33}{2}}$. *Hướng dẫn*. Phương trình được biến đổi thành

$$2x^2 + 3 - 5\sqrt{2x^2 + 3} - 6 = 0. \qquad (*)$$

Đặt $t = \sqrt{2x^2 + 3} \geq 0$. Khi đó (*) trở thành $t^2 - 5t - 6 = 0$ và có hai nghiệm $t_1 = -1$, $t_2 = 6$. Do $t \geq 0$, nên chỉ lấy $t = 6$.

b) $x = 3$; $x = -\dfrac{9}{2}$. *Hướng dẫn*. Đặt $t = \sqrt{2x^2 + 3x + 9}$.

c) $x = 0$; $x = 2$. *Hướng dẫn*. Đặt $t = \sqrt{81 - 7x^3}$.

d) $x = 1$; $x = \dfrac{1}{2}$. *Hướng dẫn*. Đặt $t = \sqrt{2x^2 - 3x + 2}$.

4.74. a) $x = \dfrac{\sqrt{17} - 3}{2}$;

b) $x = -2 - \sqrt{2}$;

c) $x \in \{-1, -3\}$;

d) $x = \dfrac{-15 \pm \sqrt{165}}{2}$.

4.75. a) Phương trình tương đương với :

$$\text{(I)} \begin{cases} x^2 - (2x - 1) = 0 \\ 2x - 1 \geq 0 \end{cases} \text{ hoặc (II) } \begin{cases} x^2 + (2x - 1) = 0 \\ 2x - 1 < 0. \end{cases}$$

Giải hệ (I) : $\begin{cases} x = 1 \\ x \geq \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$

Giải hệ (II) : $\begin{cases} x_1 = -1 - \sqrt{2}\ ;\ x_2 = -1 + \sqrt{2} \\ x < \dfrac{1}{2} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow x = -1 - \sqrt{2} \text{ hoặc } x = -1 + \sqrt{2}.$$

Vậy phương trình có các nghiệm : $x = 1$; $x = -1 \pm \sqrt{2}$.

b) $x = 1$. *Hướng dẫn*. Phương trình tương đương với :

$$\begin{cases} x^2 - 2x - 3 = x^2 - 2x + 5 \\ x^2 - 2x - 3 \geq 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} -(x^2 - 2x - 3) = x^2 - 2x + 5 \\ x^2 - 2x - 3 < 0. \end{cases}$$

c) $x = \dfrac{4}{3}$; $x = 2$. *Hướng dẫn*. Phương trình tương đương với :

$$(2x-3)^2 = (x-1)^2.$$

d) $x = 1 \pm \sqrt{6}$, $x = 1 \pm \sqrt{2}$. *Hướng dẫn*. Phương trình tương đương với :

$$x^2 - 2x - 3 = 2 \text{ hoặc } x^2 - 2x - 3 = -2.$$

4.76. a) $5 \leq x \leq 10$. *Hướng dẫn*. Đưa phương trình về dạng :

$$\left|\sqrt{x-1} - 2\right| + \left|\sqrt{x-1} - 3\right| = 1.$$

b) $\dfrac{7}{2} \leq x \leq 7$. *Hướng dẫn*. Phương trình được đưa về dạng

$$\left|\sqrt{14x-49} + 7\right| + \left|\sqrt{14x-49} - 7\right| = 14.$$

c) $|x| = \dfrac{5}{2}$.

d) $x \in \left\{-\dfrac{\sqrt{2}}{2} ; \dfrac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})\right\}$ *Hướng dẫn*. Nếu x nghiệm đúng phương trình thì $-\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ nên $\sqrt{1-x^2} \geq |x|$, nghĩa là $x + \sqrt{1-x^2} \geq 0$.

Vậy ta có thể giả thiết $x \leq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ và phương trình trở thành :

$$x + \sqrt{1-x^2} = \sqrt{2}(1-2x^2).$$

Mặt khác $1 - 2x^2 = (\sqrt{1-x^2} + x)(\sqrt{1-x^2} - x)$, nên ta có thể đưa phương trình đã cho về :

$$(x + \sqrt{1-x^2})\left(\sqrt{1-x^2} - x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0.$$

4.77. a) $-6 \leq x < -4 + \sqrt{2}$. *Hướng dẫn*. Bất phương trình tương đương với hệ :

$$\begin{cases} -x^2 - 8x - 12 \geq 0 \\ x + 4 < 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} -x^2 - 8x - 12 > (x+4)^2 \\ x + 4 \geq 0. \end{cases}$$

b) $x \in \left[0 ; \dfrac{1}{11}\right) \cup (4 ; +\infty)$. *Hướng dẫn*. Bất phương trình tương đương với :

$$\begin{cases} 4x + 2 > 0 \\ 5x^2 + 61x \geq 0 \\ 5x^2 + 61x < (4x+2)^2. \end{cases}$$

c) $x \in (-\infty ; 0) \cup [1 ; 2]$. *Hướng dẫn.* Bất phương trình tương đương với :

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ x(\sqrt{2-x} + 2x - 3) \geq 0. \end{cases}$$

d) $x \in \left[-\dfrac{3}{2} ; -1\right) \cup \left(1 ; \dfrac{3}{2}\right]$. *Hướng dẫn.* Bất phương trình tương đương với :

$$\begin{cases} 3x^2 - 3 > 0 \\ (2x+3)[3(2x-3) - \sqrt{3x^2 - 3}] \leq 0. \end{cases}$$

4.78. a) Bất phương trình tương đương với hệ :

$$\begin{cases} x + 3 \geq 0 \\ 1 - x > 0 \\ x + 3 < (1-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3 \geq 0 \\ x < 1 \\ x^2 - 3x - 2 > 0. \end{cases}$$

Từ đó suy ra tập nghiệm bất phương trình là $S = \left[-3 ; \dfrac{3-\sqrt{17}}{2}\right)$.

b) $3 < x < 5$. *Hướng dẫn.* Bất phương trình đã cho tương đương với hệ :

$$\begin{cases} -x^2 + 6x - 5 > (8-2x)^2 \\ 8 - 2x \geq 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} -x^2 + 6x - 5 \geq 0 \\ 8 - 2x < 0. \end{cases}$$

c) $S = \left[0 ; \dfrac{1}{11}\right) \cup (4 ; +\infty)$. *Hướng dẫn.* Bất phương trình tương đương với hệ :

$$\begin{cases} (4x+2)^2 > 5x^2 + 61x \\ 5x^2 + 61x \geq 0 \\ 4x + 2 > 0. \end{cases}$$

d) $S = \mathbb{R}$. *Hướng dẫn.* Bất phương trình đã cho tương đương với :

$$\left|x^2 - x\right| > x - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x > x - 2 \\ x^2 - x \geq 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x - x^2 > x - 2 \\ x^2 - x < 0. \end{cases}$$

4.79. a) * Nếu $-5 \le x < 0$ bất phương trình luôn luôn đúng.

* Xét $x \ge 0$.

Nếu $3 < \sqrt{x+5}$ tức là $x > 4$, bất phương trình đã cho tương đương với $\sqrt{x+5} > x + 3$. Không có x thoả mãn bất phương trình này.

Nếu $3 \ge \sqrt{x+5}$ tức là $x \le 4$, bất phương trình đã cho tương đương với $3 - x > \sqrt{x+5}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 3 \\ 9 - 6x + x^2 > x + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3 \\ x^2 - 7x + 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x < \frac{7 - \sqrt{33}}{2}.$$

Kết hợp ta có : $-5 \le x < \dfrac{7 - \sqrt{33}}{2}$.

b) $x \in [-9 ; 16)$.

c) Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\left|24 - 6\sqrt{6 - x}\right| > -x - 13. \qquad (1)$$

Điều kiện của bất phương trình là $x \le 6$.

* Nếu $-x - 13 < 0$ tức là $x > -13$, bất phương trình luôn luôn nghiệm đúng.

Vậy mọi $x \in (-13 ; 6]$ là nghiệm của bất phương trình.

* Với $x \le -13$, ta có $\sqrt{6 - x} > \sqrt{16} = 4$ nên $24 - 6\sqrt{6 - x} < 0$.

Do đó

(1) $\Leftrightarrow 6\sqrt{6 - x} - 24 > -x - 13 \Leftrightarrow 6\sqrt{6 - x} > -x + 11$

$\Leftrightarrow 36(6 - x) > x^2 - 22x + 121 \Leftrightarrow x^2 + 14x - 95 < 0$

$\Leftrightarrow -19 < x < 5$.

Vậy trong trường hợp đang xét, mọi $x \in (-19 ; -13]$ là nghiệm của bất phương trình.

Kết luận : Tập nghiệm là $S = (-13 ; 6] \cup (-19 ; -13] = (-19 ; 6]$.

d) $x > \dfrac{1}{2}$. *Hướng dẫn.* Bất phương trình được viết thành :

$$|x + 3| - |x - 3| > 1.$$

4.80. a) Đặt $t = x^2 + x + 2$, $t > 0$. Khi đó bất phương trình trở thành :

$$(t-1)(t+1) \geq 15 \Leftrightarrow t^2 \geq 16. \qquad (*)$$

Do $t > 0$ nên nghiệm của bất phương trình (*) là $t \geq 4$. Suy ra

$$x^2 + x + 2 \geq 4 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1 \text{ hoặc } x \leq -2.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = (-\infty\,;\,-2\,] \cup [1\,;\,+\infty)$.

b) $S = \left(-7\,;\,-\dfrac{5+\sqrt{17}}{2}\right] \cup \left[\dfrac{\sqrt{17}-5}{2}\,;\,2\right)$ *Hướng dẫn*. Đặt $t = \sqrt{x^2+5x+2} \geq 0$.

c) $S = (-\infty\,;\,-2] \cup [6\,;\,+\infty)$. *Hướng dẫn*. Đặt $t = \sqrt{2x^2 - 8x + 12} \geq 0$.

4.81. a) Bất phương trình tương đương với $(x-3)\left[\sqrt{x^2+4} - (x+3)\right] \leq 0$. Từ đó tập nghiệm cần tìm là hợp các tập nghiệm của hai hệ bất phương trình sau :

(I) $\begin{cases} x - 3 \geq 0 \\ \sqrt{x^2+4} \leq x+3 \end{cases}$, (II) $\begin{cases} x - 3 \leq 0 \\ \sqrt{x^2+4} \geq x + 3. \ (*) \end{cases}$

Giải hệ (I) : (I) $\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x^2 + 4 \leq x^2 + 6x + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x \geq -\dfrac{5}{6} \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 3. \qquad (1)$

Giải hệ (II) : Ta xét hai trường hợp :

– Trường hợp $x \leq -3$: Dễ thấy mọi $x \leq -3$ là nghiệm.

– Trường hợp $x > -3$: Ta có

(*) $\Leftrightarrow x^2 + 4 \geq x^2 + 6x + 9 \Leftrightarrow x \leq -\dfrac{5}{6}$. Vậy trong trường hợp này, hệ (II) có nghiệm là $-3 < x \leq -\dfrac{5}{6}$.

Do đó (II) $\Leftrightarrow x \leq -\dfrac{5}{6}. \qquad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra tập nghiệm của bất phương trình đã cho là :

$$S = \left(-\infty\,;\,-\frac{5}{6}\right] \cup [3\,;\,+\infty).$$

b) $S = \left[-\frac{2}{3}; -\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{5}}; \frac{5}{2}\right)$. *Hướng dẫn*. Bất phương trình tương đương với hệ

$$\begin{cases} 9x^2 - 4 \leq (3x+2)\sqrt{5x^2-1} \\ 5x^2 - 1 > 0. \end{cases}$$

4.82. Với $m < 0$: Phương trình vô nghiệm.

Với $m = 0$: Phương trình có ba nghiệm $x = 0$; $x = \pm 2$.

Với $m > 0$: Phương trình tương đương với

$$\left|x^2\right| - 2|x| + m^2 = 0. \quad (1)$$

Xét phương trình $y^2 - 2y + m^2 = 0$ (2)

có $\Delta' = 1 - m^2$.

– Nếu $m > 1$ thì (2) vô nghiệm nên (1) vô nghiệm.

– Nếu $m = 1$ thì (2) có nghiệm $y = 1$ nên (1) có hai nghiệm $x = \pm 1$.

– Nếu $0 < m < 1$ thì (2) có hai nghiệm dương

$$y_1 = 1 + \sqrt{1-m^2}, \ y_2 = 1 - \sqrt{1-m^2},$$

suy ra (1) có bốn nghiệm phân biệt $x_{1,2} = \pm(1 + \sqrt{1-m^2})$

$$x_{3,4} = \pm(1 - \sqrt{1-m^2}).$$

4.83. a) Do $11 < \sqrt{123} < 12$ và $6 < \sqrt{37} < 7$ nên $-12 < -\sqrt{123} < -11$ và $-7 < -\sqrt{37} < -6$. Suy ra $-\frac{9}{4} < \frac{3-\sqrt{123}}{4} < -2$ và $-\frac{5}{3} < \frac{2-\sqrt{37}}{3} < -\frac{4}{3}$.

Vì $-2 < -\frac{5}{3}$, do đó $\frac{2-\sqrt{37}}{3} > \frac{3-\sqrt{123}}{4}$.

b) Ta có $\frac{3\sqrt{7}+5\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \frac{3}{5}\sqrt{35} + \sqrt{10}$ và $\sqrt{35} < 6$, $\sqrt{10} < 3{,}2$.

Suy ra $\frac{3}{5}\sqrt{35} + \sqrt{10} < \frac{3.6}{5} + 3{,}2 = 6{,}8 < 6{,}9$.

4.84. Ta có $|ab - c| = |ab - a + a - c| \leq |ab - a| + |a - c|$

$$= |a||b - 1| + |a - c| < 1.10 + 10 = 20.$$

4.85. a) Bất đẳng thức cần chứng minh được biến đổi thành :

$$a^6 + b^9 + 64 \geq 12a^2b^3.$$

Áp dụng bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân, ta có :

$$a^6 + b^9 + 64 \geq 3\sqrt[3]{a^6b^9.64} = 12a^2b^3.$$

Vậy $a^6 + b^9 + 64 \geq 12a^2b^3$ hay $\dfrac{a^6 + b^9}{4} \geq 3a^2b^3 - 16.$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = 2$, $b = \sqrt[3]{4}$.

b) Bất đẳng thức cần chứng minh được biến đổi thành :

$$(a - b)^2 + (b - \sqrt{a})^2 + (a - \sqrt{b})^2 \geq 0.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 0$ hoặc $a = b = 1$

Điều này luôn luôn đúng.

4.86. a) Ta có $A = (a - 1)^2 + (b - 1)^2 + ab - a - b + 2004$

$$= (a - 1)^2 + (b - 1)^2 + (a - 1)(b - 1) + 2003$$

$$= \left[(a - 1) + \frac{b - 1}{2}\right]^2 + \frac{3}{4}(b - 1)^2 + 2003 \geq 2003.$$

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} a - 1 + \dfrac{b - 1}{2} = 0 \\ b - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1. \end{cases}$

Vậy A nhỏ nhất bằng 2003 khi $a = b = 1$.

b) $B = (a - b + 1)^2 + (b - 1)^2 - 14 \geq -14.$

Vậy B nhỏ nhất bằng -14 khi $a = 0$, $b = 1$.

4.87. a) Do $a, b, c > 0$ nên $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$ và $a^2 + b^2 + c^2 \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$.

Suy ra $(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2) \geq 9\sqrt[3]{a^3b^3c^3} = 9abc.$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

b) Áp dụng bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân, ta có

$$\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}\ge 2b\,;\ \frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}\ge 2a\ ;\ \frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}\ge 2c,\ \text{nên}$$

$$\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}\ge a+b+c\,.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$.

c) $$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b+c}{4}\ge a\ ;\ \frac{b^2}{a+c}+\frac{a+c}{4}\ge b\ ;\ \frac{c^2}{a+b}+\frac{a+b}{4}\ge c\,.$$

Do đó $\dfrac{a^2}{b+c}+\dfrac{b^2}{a+c}+\dfrac{c^2}{a+b}\ge\dfrac{a+b+c}{2}$.

Mặt khác từ bất đẳng thức $(x+y)^2\ge 4xy$ và $x, y > 0$ ta suy ra :

$$\frac{2ab}{a+b}\le\frac{a+b}{2}\,;\frac{2bc}{b+c}\le\frac{b+c}{2}\ ;\ \frac{2ca}{c+a}\le\frac{c+a}{2}.$$

Cộng từng vế các bất đẳng thức và chia hai vế cho 2 ta được

$$\frac{ab}{a+b}+\frac{bc}{b+c}+\frac{ca}{c+a}\le\frac{a+b+c}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$.

4.88. a) Ta có thể viết

$$P=|x+1|+|2x+5|+|18-3x|\ge|(x+1)+(2x+5)+(18-3x)|=24$$

(Áp dụng bất đẳng thức $|a|+|b|+|c|\ge|a+b+c|$).

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi (I) $\begin{cases}x+1\ge 0\\ 2x+5\ge 0\\ 18-3x\ge 0\end{cases}$ hoặc (II) $\begin{cases}x+1\le 0\\ 2x+5\le 0\\ 18-3x\le 0.\end{cases}$

Hệ (I) có nghiệm $-1\le x\le 6$; Hệ (II) vô nghiệm.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 24 khi $-1\le x\le 6$.

b) Áp dụng bất đẳng thức $|a-b|\ge|a|-|b|$ ta được

$$|x-1|\ge|x|-1,$$

$$|y-2|\ge|y|-2,$$

$$|z-3|\ge|z|-3.$$

Do đó $Q \geq |x| + |y| + |z| - 6 = 2006 - 6 = 2000$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x - 1 \geq 0$; $y - 2 \geq 0$; $z - 3 \geq 0$ và $x + y + z = 2006$.

Chẳng hạn $x = 2000$; $y = z = 3$ thì $|x - 1| = 1999$; $|y - 2| = 1$; $|z - 3| = 0$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của Q là 2000.

4.89. a) $S = \left(-\infty ; \dfrac{5\sqrt{3} - 1}{3(\sqrt{3} - 1)}\right)$; b) $S = \left(\dfrac{-19}{13} ; +\infty\right)$.

c) Bất phương trình được đưa về dưới dạng

$$(1 + \sqrt{3})x \leq (1 + \sqrt{3})^2 \Leftrightarrow x \leq 1 + \sqrt{3}.$$

Vậy $S = (-\infty ; 1 + \sqrt{3}]$.

d) Bất phương trình đã cho tương đương với

$$10 \geq (x + \sqrt{5})^2 - (x - \sqrt{5})^2 \Leftrightarrow x \leq \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Vậy $S = \left(-\infty ; \dfrac{\sqrt{5}}{2}\right]$.

4.90. a) Với $m = 3$, tập nghiệm của bất phương trình là $\varnothing$

Với $m < 3$, tập nghiệm của bất phương trình là $\left(-\infty ; \dfrac{1 + m^2}{m - 3}\right)$.

Với $m > 3$, tập nghiệm của bất phương trình là $\left(\dfrac{1 + m^2}{m - 3} ; +\infty\right)$.

b) Với $m = 0$ hoặc $m = 2$, tập nghiệm bất phương trình là $\mathbb{R}$.

Với $m < 0$ hoặc $m > 2$, tập nghiệm của bất phương trình là $\left[\dfrac{1}{m} ; +\infty\right)$

Với $0 < m < 2$, tập nghiệm của bất phương trình là $\left(-\infty ; \dfrac{1}{m}\right]$.

c) Nếu $m < 10$ thì tập nghiệm của bất phương trình là $\left(-\infty ; \dfrac{m - 7}{m - 10}\right)$.

Nếu $m > 10$ thì tập nghiệm của bất phương trình là $\left(\dfrac{m - 7}{m - 10} ; +\infty\right)$;

Nếu $m = 10$ thì bất phương trình vô nghiệm.

d) Nếu $m \in (-\infty ; -\sqrt{5}\,] \cup [\,\sqrt{5} ; +\infty)$ thì tập nghiệm của bất phương trình là $(-\infty ; -m - \sqrt{m^2 - 5}\,] \cup [\,-m + \sqrt{m^2 - 5} ; +\infty)$.

Nếu $m \in (-\sqrt{5} ; \sqrt{5})$ thì tập nghiệm của bất phương trình là $\mathbb{R}$.

e) Nếu $m = 0$ thì tập nghiệm của bất phương trình là $\left(-\infty ; -\dfrac{1}{4}\right]$.

Nếu $m > 4$ thì bất phương trình vô nghiệm.

Nếu $0 < m \leq 4$ thì tập nghiệm của bất phương trình là

$$\left[\frac{-2 - \sqrt{4 - m}}{m} ; \frac{-2 + \sqrt{4 - m}}{m}\right].$$

Nếu $m < 0$ thì tập nghiệm của bất phương trình là

$$\left(-\infty ; \frac{-2 - \sqrt{4 - m}}{m}\right] \cup \left[\frac{-2 + \sqrt{4 - m}}{m} ; +\infty\right).$$

f) Nếu $m = 3$ thì tập nghiệm của bất phương trình là $\left(-\dfrac{3}{8} ; +\infty\right)$

Nếu $m < 3$ thì tập nghiệm của bất phương trình là

$$\left(-\infty ; \frac{m + 1 - \sqrt{3m^2 - 7m + 10}}{m - 3}\right] \cup \left[\frac{m + 1 + \sqrt{3m^2 - 7m + 10}}{m - 3} ; +\infty\right).$$

Nếu $m > 3$ thì tập nghiệm của bất phương trình là

$$\left[\frac{m + 1 - \sqrt{3m^2 - 7m + 10}}{m - 3} ; \frac{m + 1 + \sqrt{3m^2 - 7m + 10}}{m - 3}\right].$$

4.91. a) $\{4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10 ; 11\}$.

b) Không có nghiệm nguyên.

4.92. a) $m \in \left[\dfrac{64}{33} ; +\infty\right)$.

b) $m \in \mathbb{R}$.

4.93. a) Vô nghiệm.

b) $S = [0 ; +\infty)$.

c) $S = (-\infty ; -3) \cup (-1 ; 4) \cup \left(\dfrac{7+\sqrt{57}}{2} ; +\infty\right)$.

4.94. a) $x \in (-\infty ; -4] \cup [-2 ; -1] \cup [1 ; +\infty)$. *Hướng dẫn.* Đặt $t = x^2 + 3x - 1$.

b) $x \in (-2 ; -1) \cup (2 ; 3)$. *Hướng dẫn.* Đặt $t = x^2 - x - 4$.

c) $x \in (-\infty ; -2) \cup (-1 ; 3) \cup (4 ; +\infty)$.

d) $x \in (-2 ; 1)$.

4.95. a) $x \in \left[\dfrac{7-\sqrt{109}}{10} ; \dfrac{7+\sqrt{109}}{10}\right]$;

b) $x \in \left[-2 ; \dfrac{1}{3}\right]$;

c) $x \in \left[\dfrac{4}{3} ; \dfrac{5}{2}\right)$;

d) $x \in [1 ; 6]$.

4.96. a) Do $2x^2 - 2x + 3 > 0$ với mọi x nên bất phương trình tương đương với :

$$x^2 - (2+m)x + 4 > 0.$$

Để bất phương trình nghiệm đúng với mọi x, điều kiện cần và đủ là

$$\Delta = (2+m)^2 - 16 < 0 \text{ hay } -6 < m < 2.$$

b) $m \in (-2 ; 4)$.

4.97. Đặt $t = x^2$ phương trình trở thành $f(t) = (m+3)t^2 - (2m-1)t - 3 = 0$, $t \geq 0$.

• Nếu $m + 3 = 0$, tức là $m = -3$ thì $f(t) = 7t - 3 = 0$, từ đó $t = \dfrac{3}{7}$. Suy ra phương trình đã cho có hai nghiệm $x = \pm\sqrt{\dfrac{3}{7}}$.

• Nếu $m + 3 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -3$.

Khi đó, $\Delta = (2m-1)^2 + 12(m+3) = 4m^2 + 8m + 37 > 0$ với mọi m nên phương trình $f(t) = 0$ luôn có hai nghiệm phân biệt khác 0 (vì $c = -3 \neq 0$).

+) Phương trình $f(t) = 0$ có hai nghiệm dương khi và chỉ khi :

$$\begin{cases} S = \dfrac{2m-1}{m+3} > 0 \\ P = \dfrac{-3}{m+3} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m-1<0 \\ m+3<0 \end{cases} \Leftrightarrow m < -3.$$

Khi đó phương trình đã cho có bốn nghiệm phân biệt.

+) Phương trình $f(t) = 0$ có hai nghiệm âm khi và chỉ khi :

$$\begin{cases} S = \dfrac{2m-1}{m+3} < 0 \\ P = \dfrac{-3}{m+3} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m-1>0 \\ m+3<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \dfrac{1}{2} \\ m < -3 \end{cases} \text{(không tồn tại } m\text{)}.$$

+) Phương trình $f(t) = 0$ có một nghiệm âm và một nghiệm dương khi và chỉ khi $ac = (-3)(m+3) < 0 \Leftrightarrow m > -3$.

Khi đó phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt.

Tóm lại : Với $m \geq -3$ phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Với $m < -3$ phương trình có bốn nghiệm phân biệt.

4.98. a) Nếu đặt $f(x) = \dfrac{7x-4}{8x+5} - 2$ thì

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{14}{9}; -\frac{5}{8}\right),$$

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; -\frac{14}{9}\right) \cup \left(-\frac{5}{8}; +\infty\right).$$

b) Nếu đặt $g(x) = \dfrac{x^2-5x+4}{x^2+5x+4}$ thì

$$g(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-4; -1) \cup (1; 4),$$

$$g(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -4) \cup (-1; 1) \cup (4; +\infty).$$

c) Nếu đặt $h(x) = \dfrac{15x^2-7x-2}{6x^2-x+5}$ thì

$$h(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; -\frac{1}{5}\right) \cup \left(\frac{2}{3}; +\infty\right),$$

$$h(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{1}{5}; \frac{2}{3}\right).$$

d) Nếu đặt $p(x) = \dfrac{x^4 - 17x^2 + 60}{x(x^2 - 8x + 5)}$ thì $p(x) > 0$ khi và chỉ khi

$$x \in (-\sqrt{12}, -\sqrt{5}) \cup (0 ; 4 - \sqrt{11}) \cup (\sqrt{5} ; \sqrt{12}) \cup (4 + \sqrt{11} ; +\infty).$$

$p(x) < 0$ khi và chỉ khi

$$x \in (-\infty ; -\sqrt{12}) \cup (-\sqrt{5} ; 0) \cup (4 - \sqrt{11} ; \sqrt{5}) \cup (\sqrt{12} ; 4 + \sqrt{11}).$$

4.99. a) $x \in (5 ; +\infty)$;

b) $x \in (-\infty ; \sqrt[3]{2}) \cup (\sqrt[3]{2} ; +\infty)$.

Hướng dẫn. $\sqrt{x^6 - 4x^3 + 4} = \left|x - \sqrt[3]{2}\right| \ (x^2 + \sqrt[3]{2x} + \sqrt[3]{4})$.

c) $x \in (-2 ; -1] \cup \left[-\dfrac{2}{3} ; \dfrac{1}{3}\right)$.

4.100. a) $x \in \left[3 ; \dfrac{6 + \sqrt{12}}{3}\right)$. *Hướng dẫn.* Phương trình viết thành

$$\sqrt{x - 1} > \sqrt{x - 2} + \sqrt{x - 3}.$$

Với điều kiện $x \geq 3$, bình phương hai vế ta được bất phương trình tương đương

$x - 1 > 2x - 5 + 2\sqrt{(x - 2)(x - 3)}$

$\Leftrightarrow 4 - x > 2\sqrt{(x - 2)(x - 3)}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4 - x \geq 0 \\ (4 - x)^2 > 4(x - 2)(x - 3). \end{cases}$

b) $x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$. *Hướng dẫn.* Đặt $t = \sqrt{x^2 - x + 1} \geq 0$.

Bất phương trình trở thành $2t^2 - t - 1 > 0$.

c) $x > 1$.

d) Viết bất phương trình về dạng :

$$\sqrt{\frac{(x - 1)(x + 1)}{x}} - \sqrt{\frac{x - 1}{x}} > \frac{x - 1}{x} \text{ hay } \sqrt{\frac{x - 1}{x}}(\sqrt{x + 1} - 1) > \frac{x - 1}{x}.$$

Điều kiện : $-1 \leq x < 0$ hoặc $x \geq 1$.

Nhận thấy $x = 1$ không phải là nghiệm của bất phương trình nên có thể coi $x \neq 1$.

Khi đó $\dfrac{x-1}{x} > 0$ nên bất phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{x+1} - 1 > \sqrt{\frac{x-1}{x}} \Leftrightarrow \sqrt{x+1} > 1 + \sqrt{\frac{x-1}{x}}. \qquad (*)$$

+ Nếu $-1 \leq x < 0$ thì $\sqrt{x+1} < 1$ suy ra bất phương trình không có nghiệm trong nửa khoảng $[-1 ; 0)$.

+ Với $x > 1$, bình phương hai vế của (*) ta đi đến :

$$(x-1) + \frac{1}{x} > 2\sqrt{\frac{x-1}{x}}.$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức Cô-si ta có

$$(x-1) + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{\frac{x-1}{x}}.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x - 1 = \dfrac{1}{x}$ tức là khi và chỉ khi $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Vậy $(x-1) + \dfrac{1}{x} > 2\sqrt{\dfrac{x-1}{x}} \Leftrightarrow 1 < x \neq \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Kết luận. Tập nghiệm của bất phương trình là

$$\left(1 ; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} ; +\infty\right).$$

4.101. a) $x \in (-\infty ; -\sqrt{6}) \cup (0 ; \sqrt{2}) \cup (2 + 2\sqrt{2}, +\infty)$.

b) $x \in \left(-\dfrac{5}{4} ; +\infty\right)$.

c) $x \in [3 ; 4) \cup (4, +\infty)$.

d) $x \in (1 ; 3)$.

4.102. a) $x < \dfrac{4}{3}$.

b) $x \in (-1 ; \sqrt[3]{4})$.

c) Điều kiện $|x+3| \neq 1 \Leftrightarrow x+3 \neq 1$ và $x+3 \neq -1$ hay $x \neq -2$ và $x \neq -4$.

* Nếu $x < -3$, bất phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{3}{-x-3-1} \geq -x-2 \Leftrightarrow \frac{3}{x+4} \leq x+2 \Leftrightarrow \frac{3}{x+4} - (x+2) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3-(x^2+6x+8)}{x+4} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-x^2-6x-5}{x+4} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+6x+5}{x+4} \geq 0$$

$\Leftrightarrow x \in [-5\,;-4)$.

* Nếu $-3 \leq x < -2$, bất phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{3}{x+2} \geq -x-2 \Leftrightarrow \frac{3}{x+2} + x+2 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{3+(x+2)^2}{x+2} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2.$$

Không có x thoả mãn yêu cầu điều kiện $-3 \leq x < -2$.

* Nếu $x > -2$, bất phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{3}{x+2} \geq x+2 \Leftrightarrow \frac{3}{x+2} - (x+2) \geq 0 \Leftrightarrow 3-(x+2)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{3}-x-2)(\sqrt{3}+x+2) \geq 0 \Leftrightarrow -2-\sqrt{3} \leq x \leq 2-\sqrt{3}.$$

Vậy $-2 < x \leq 2-\sqrt{3}$.

Kết luận. $x \in [-5\,;-4) \cup (-2\,;2-\sqrt{3}]$.

d) Nếu $x < 2$ bất phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{9}{5-x-3} \geq -x+2 \Leftrightarrow \frac{9}{2-x} + x-2 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{5-x^2+4x}{2-x} \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -1.$$

Nếu $2 \leq x < 5$ bất phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{9}{5-x-3} \geq x-2 \Leftrightarrow \frac{9}{2-x} + 2-x \geq 0 \Leftrightarrow \frac{9+(2-x)^2}{2-x} \geq 0.$$

Vậy $2 < x < 5$.

Nếu $x > 5$ bất phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{9}{x-5-3} \geq x-2 \Leftrightarrow \frac{9}{x-8} \geq x-2 \Leftrightarrow \frac{9}{x-8} - (x-2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{9-(x^2-10x+16)}{x-8} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-x^2+10x-7}{x-8} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-10x+7}{x-8} \leq 0.$$

Vậy $8 < x \le 5 + \sqrt{18}$.

Kết luận $x \in (-\infty ; -1] \cup (2 ; 5) \cup (8 ; 5 + \sqrt{18}]$.

4.103. a) Với $m = \sqrt{5}$ phương trình trở thành

$$-3\sqrt{5}x + \sqrt{5} + 1 = 0,$$

có nghiệm $x = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{3\sqrt{5}}$.

Với $m \neq \sqrt{5}$ phương trình có nghiệm khi và chỉ khi

$\Delta = 9m^2 - 4(m + 1)(m - \sqrt{5}) \ge 0 \Leftrightarrow 5m^2 - 4(1 - \sqrt{5})m + 4\sqrt{5} \ge 0$, bất phương trình này nghiệm đúng với mọi m (vì $\Delta'_m = 4(1 - \sqrt{5})^2 - 20\sqrt{5} < 0$).

Vậy phương trình đã cho có nghiệm với mọi m.

b) $m \in (-1 ; \sqrt{5})$.

4.104. $m < 0$: phương trình vô nghiệm

$m = 0$: phương trình có hai nghiệm

$0 < m < 4$: phương trình có bốn nghiệm

$m = 4$: phương trình có ba nghiệm

$m > 4$: phương trình có hai nghiệm.

4.105. Khi $m = 0$, dễ thấy phương trình đã cho có một nghiệm duy nhất $x = 0$.

Giả sử $m \neq 0$. Đặt $t = 1 - mx$, ta có $x = \dfrac{1 - t}{m}$ và ta được phương trình

$$m|t| = t^2 + (2m - 3)t + 2 - m. \qquad (1)$$

Hiển nhiên phương trình đã cho có một nghiệm duy nhất khi và chỉ khi (1) có một nghiệm duy nhất. Ta có phương trình (1) tương đương với

(I) $\begin{cases} t \ge 0 \\ t^2 + (m - 3)t + 2 - m = 0 \end{cases}$ hoặc (II) $\begin{cases} t < 0 \\ t^2 + (3m - 3)t + 2 - m = 0. \end{cases}$

Ta xét các trường hợp sau

• Trường hợp $m > 2$. Lúc này mỗi phương trình bậc hai trong hệ (I) và (II) đều có hai nghiệm trái dấu, suy ra mỗi hệ (I) và (II) đều có một nghiệm, nghĩa là phương trình (1) có hai nghiệm (trái dấu). Vậy $m > 2$ không thoả mãn điều kiện của bài toán.

• Trường hợp $m \le 2$. Lúc này phương trình bậc hai trong hệ (I) có hai nghiệm $t_1 = 1$ và $t_2 = 2 - m$. Do $m \le 2$ nên cả hai nghiệm này đều thoả mãn điều kiện $t \ge 0$. Vậy nếu $t_1 \ne t_2$, tức là $m \ne 1$ thì hệ (I) có hai nghiệm phân biệt, tức là (1) có ít nhất hai nghiệm phân biệt, không thoả mãn yêu cầu của bài toán.

Cuối cùng, khi $m = 1$, dễ thấy hệ (I) có một nghiệm duy nhất $t = 1$, hệ (II) vô nghiệm nên phương trình (1) có một nghiệm duy nhất.

Tóm lại, các giá trị của m thoả mãn yêu cầu đề bài là $m \in \{0 ; 1\}$.

4.106. a) Đúng.

b), c), d), e), f), g), h), i), k) sai. Học sinh tự lấy phản ví dụ.

4.107. Phương án (B).

4.108. Phương án (B).

4.109. Phương án (A).

4.110. Phương án (D).

4.111. Phương án (B).

4.112. Phương án (B).

4.113. Phương án (C).

4.114. Phương án (B).

4.115. a) $\leftrightarrow$ (4) ; b) $\leftrightarrow$ (1) ; c) $\leftrightarrow$ (3) ; d) $\leftrightarrow$ (2).

4.116. a) $m \boxed{<} 2$; b) $m \boxed{\le} 2$;

c) $m \boxed{>} 2$; d) $m \boxed{\ge} 2$.