C. ĐÁP SỐ – HƯỚNG DẪN – LỜI GIẢI

6.1. a) Sai : $(Ou, Ov) = \alpha$ thì có vô số số nguyên k để $\alpha + k2\pi < 0$.

b) Sai : $(Ou, Ov) = \alpha$ thì $(Ov, Ou) = -\alpha + k2\pi$, do đó có vô số số nguyên k để $-\alpha + k2\pi > 0$.

c) Sai : Với $(Ou, Ov) = \dfrac{\pi}{2}$ và lấy $Ou' = Ov$, $Ov' = Ou$ thì $(Ou', Ov') = (Ov, Ou) = -\dfrac{\pi}{2}$, nhưng $\widehat{uOv} = \widehat{vOu} = \widehat{u'Ov'}$.

d) Đúng : $\dfrac{11\pi}{6} = 2\pi - \dfrac{\pi}{6}$; $-\dfrac{13\pi}{6} = -2\pi - \dfrac{\pi}{6}$; $\widehat{uOv} = \dfrac{\pi}{6} = \widehat{u'Ov'}$.

e) Đúng : Vì hai góc lượng giác đó có số đo dạng $\alpha + k2\pi$ và $\alpha + l2\pi$ $(k, l \in \mathbb{Z})$, $0 \le \alpha < 2\pi$.

f) Sai : vì $(Ou, Ov) = \dfrac{\pi}{2}$; $(Ov, Ou) = -\dfrac{\pi}{2}$ có $\widehat{uOv} = \widehat{u'Ov'}$, nhưng

$$\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi .$$

6.2. a) 135° ; b) 120° ; c) 330° ; d) $\approx (77{,}1429)^{\circ} \approx 77^{\circ}8'34''$;

e) $2{,}3 \approx 131^{\circ}46'49''$; f) $4{,}2 \approx 240^{\circ}38'32''$.

6.3. a) $\dfrac{\pi}{4}$; b) $\dfrac{5\pi}{6}$; c) $\dfrac{2\pi}{5}$; d) $\dfrac{5\pi}{12}$.

6.4. Gọi A, B là hai điểm tiếp xúc của dây curoa theo thứ tự với đường tròn tâm I và tâm J (A, B nằm cùng phía đối với đường thẳng IJ). Ta có

$\cos\widehat{BJI} = \dfrac{R-r}{d} = \dfrac{5-1}{8} = \dfrac{1}{2}$ ($r = 1$ là bán kính của đường tròn tâm I, $R = 5$dm là bán kính của đường tròn tâm J, $d = IJ = 8$dm là khoảng cách giữa hai tâm). Vậy $\widehat{BJI} = \alpha = \dfrac{\pi}{3}$.

Dễ thấy chiều dài dây curoa bằng :

$$2\left[R(\pi-\alpha) + r\alpha + d\sin\alpha\right] = 2\left(\frac{11\pi}{3} + 4\sqrt{3}\right) \approx 36{,}89 \text{ (dm)}.$$

6.5. Các tia sáng mặt trời chiếu song song xuống mặt đất : ở Xy-en (kí hiệu là S) chiếu thẳng góc với mặt đất, ở A-lếch-xăng-đri (kí hiệu là A) tạo với phương thẳng đứng một góc $(7{,}1)^{\circ}$ nên số đo cung tròn AS là $(7{,}1)^{\circ}$. Gọi R (km) là bán kính của Trái Đất, thì do độ dài cung tròn AS bằng 800km, suy ra được $R = \dfrac{800}{\dfrac{\pi}{180}\times 7{,}1} = \dfrac{800.180}{\pi \times 7{,}1} \approx 6456\ (km)$.

6.6. Trong một giây, bánh xe quay được $\dfrac{4\,000\,000}{60.60.55.\pi} \approx 6{,}4$ (vòng).

6.7. a) Diện tích hình quạt tròn với bán kính R và góc ở tâm α là

$$S = \frac{\pi R^2}{2\pi}\alpha = \frac{1}{2}R^2\alpha. \text{ Từ đó } S = R^2 \Leftrightarrow \alpha = 2.$$

b) Chu vi hình quạt tròn nói trên là $C = 2R + R\alpha$. Hai số dương $2R$ và $R\alpha$ có tổng không đổi nên tích $2R.R\alpha = 4S$ đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $2R = R\alpha \Leftrightarrow \alpha = 2$.

c) Hai số dương $2R$ và $R\alpha$ có tích $2R.R\alpha = 4S$ không đổi, nên tổng $2R + R\alpha = C$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $2R = R\alpha \Leftrightarrow \alpha = 2$.

6.8. Độ dài cung kinh tuyến đó là $\dfrac{6378.14.\pi}{180} \approx 1558$ (km).

6.9. a) 420° ; b) -612° ; c) 390° ; d) $-1{,}72 \approx -98^{\circ}32'55''$.

6.10. a) $\approx 0{,}349$; b) $\approx -2{,}513$; c) $\approx 34{,}959$; d) $\approx 0{,}055$.

6.11. Các góc lượng giác (Ou, Ov) có số đo là $\dfrac{\pi}{5} + k2\pi = (10k+1)\dfrac{\pi}{5}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Vậy trong các số đo đã cho chỉ có số $\dfrac{31\pi}{5}$.

6.12. Các số α cần tìm theo thứ tự là $\frac{5\pi}{4}$; $\frac{4\pi}{3}$; $\frac{\pi}{6}$; $\alpha \approx 1{,}889\pi \approx 5{,}934$.

6.13. Các số a° cần tìm theo thứ tự là : 35° ; 28° ; 108° ; $(20\pi)^{\circ}$ ($\approx 62^{\circ}49'55''$).

6.14. a) Nếu một góc lượng giác (Ou, Ov) có số đo α, $-\pi < \alpha \leq \pi$, thì mọi góc lượng giác (Ou, Ov) khác có số đo $\alpha + k2\pi$ ($k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$), nhưng dễ thấy

$\alpha + k2\pi \notin (-\pi ; \pi]$, với k nguyên khác không, vậy góc lượng giác đó là duy nhất.

Khi hai tia Ou, Ov đối nhau thì một góc lượng giác (Ou, Ov) có số đo là π và π cũng là số đo rađian của góc bẹt uOv. Khi Ou, Ov không đối nhau thì số đo góc hình học uOv là β, $0 \leq \beta < \pi$ và sđ (Ou, Ov) là $\beta + k2\pi$ hoặc $-\beta + k2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) tức là :

$$\text{sđ}(Ou, Ov) = \alpha + k2\pi \; ; \; |\alpha| = \beta.$$

b) Số đo góc hình học uOv cần tìm theo thứ tự là

- $\frac{5\pi}{7}$; $\frac{5\pi}{8}$; $\frac{2\pi}{9}$; $\approx 1{,}336$ (do $2003 \approx 319.2\pi - 1{,}336$ và $-\pi < -1{,}336 \leq \pi$) ;
- 140° ; 125° ; 145° ; 157°.

6.15. a) Viết $\alpha = \alpha_o + k_o 2\pi$, $-\pi < \alpha_o \leq \pi$, ($k_o \in \mathbb{Z}$) và

$\beta = \beta_o + l_o 2\pi$, $-\pi < \beta_o \leq \pi$, ($l_o \in \mathbb{Z}$), ta có $|\alpha_o|$ là số đo của $\widehat{uOv}$, $|\beta_o|$ là số đo của $\widehat{u'Ov'}$. Hai góc hình học bằng nhau khi và chỉ khi

$$|\alpha_o| = |\beta_o| \Leftrightarrow \beta_o = \alpha_o \text{ hoặc } \alpha_o = -\beta_o$$

$$\Leftrightarrow \beta - \alpha = k2\pi \text{ hoặc } \beta + \alpha = k2\pi, \; (k \in \mathbb{Z}).$$

b) Cặp góc hình học ứng với cặp góc lượng giác

- Có số đo $\frac{13\pi}{6}$ và $\frac{11\pi}{6}$ là bằng nhau $\left(\frac{13\pi}{6} + \frac{11\pi}{6} = 4\pi\right)$.
- Có số đo $\frac{13\pi}{6}$ và $-\frac{11\pi}{6}$ là bằng nhau $\left(\frac{13\pi}{6} - \left(-\frac{11\pi}{6}\right) = 4\pi\right)$.

• Có số đo $\frac{17\pi}{4}$ và $-\frac{15\pi}{4}$ là bằng nhau$\left(\frac{17\pi}{4}-\left(-\frac{15\pi}{4}\right)=8\pi\right)$.

• Có số đo $\frac{731\pi}{30}$ và $\frac{-11\pi}{30}$ là bằng nhau $\left(\frac{731\pi}{30}+\frac{-11\pi}{30}=24\pi\right)$.

• Có số đo $\frac{2003\pi}{8}$ và $\frac{-1211\pi}{8}$ là không bằng nhau

(do $\frac{2003+1211}{8}=\frac{3214}{8}$ không nguyên và $\frac{2003-1211}{8}=\frac{792}{8}=99$ không chẵn).

6.16. • N trùng với M khi và chỉ khi có số nguyên l để $\frac{k\pi}{798}=\frac{\pi}{6}+l2\pi$ hay

$$k=133(1+12l).$$

Do $k\in\mathbb{N}$ nên $l\in\mathbb{N}$.

• N đối xứng với M qua tâm của đường tròn khi và chỉ khi có số nguyên l để $\frac{k\pi}{798}=\frac{\pi}{6}+(2l+1)\,\pi\Leftrightarrow k=133(7+12\,l)$. Do $k\in\mathbb{N}$ nên $l\in\mathbb{N}$.

6.17. *Cách 1*. Dùng hình vẽ, dễ dàng suy ra các kết quả sau

• $PN=PM\Leftrightarrow$ sđ $\overset{\frown}{AP}=\frac{13\pi}{24}+k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$ (có hai điểm P như thế ứng với k chẵn và k lẻ).

• $NP=NM\Leftrightarrow$ sđ $\overset{\frown}{AP}=\frac{7\pi}{6}+k2\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$.

• $MP=MN\Leftrightarrow$ sđ $\overset{\frown}{AP}=-\frac{\pi}{12}+k2\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$.

Cách 2. Với ba điểm phân biệt M, N, P trên đường tròn định hướng tâm O gốc A, dễ thấy $PM=PN$ khi và chỉ khi $\widehat{POM}=\widehat{PON}$ nên theo bài tập 6.15 và do M khác N, ta có sđ (OP, OM) + sđ $(OP, ON)=k2\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$, tức là sđ (OA, OM) − sđ (OA, OP) + sđ (OA, ON) − sđ $(OA, OP)=k2\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$.

Vậy $PM = PN \Leftrightarrow$ sđ $\overset{\frown}{AP} = \dfrac{1}{2}$(sđ $\overset{\frown}{AM}$ + sđ $\overset{\frown}{AN}$) $+ k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Từ đó suy ra các kết quả ở cách 1.

6.18. • Các điểm trên đường tròn lượng giác xác định bởi các số $\dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}$, $(k \in \mathbb{Z})$ là bốn điểm của hình vuông nội tiếp đường tròn đó, có hai cạnh song song với OA (O là tâm, A là giao của đường tròn với trục hoành (là gốc của đường tròn lượng giác)), (chỉ cần lấy $k = 0, 1, 2, 3$).

• Các điểm trên đường tròn lượng giác xác định bởi các số $k\dfrac{\pi}{3}$, $(k \in \mathbb{Z})$, là các đỉnh của lục giác đều nội tiếp đường tròn đó, trong đó một đỉnh là gốc A của đường tròn lượng giác (chỉ cần lấy $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$).

• Các điểm trên đường tròn lượng giác xác định bởi các số $k\dfrac{2\pi}{5}$, $(k \in \mathbb{Z})$, là các đỉnh của ngũ giác đều nội tiếp đường tròn đó, trong đó một đỉnh là gốc A của đường tròn lượng giác (chỉ cần lấy $k = 0, 1, 2, 3, 4$).

6.19.

	sin	côsin	tang	Ghi chú
120°	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$-\dfrac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	
-30°	$-\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	
-225°	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$(-225 = -360 + 135)$
750°	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	$(750 = 720 + 30)$
510°	$\dfrac{1}{2}$	$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	$(510 = 360 + 150)$

	sin	côsin	tang	Ghi chú
$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	
$\frac{7\pi}{2}$	-1	0	không xác định	$\frac{7\pi}{2} = 4\pi - \frac{\pi}{2}$
$\frac{5\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$\frac{5\pi}{3} = 2\pi - \frac{\pi}{3}$
$\frac{-10\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{10\pi}{3} = -4\pi + \frac{2\pi}{3}$
$\frac{17\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$\frac{17\pi}{3} = 6\pi - \frac{\pi}{3}$

6.20. Điểm xác định bởi α nằm ở góc phần tư II thì điểm xác định bởi

- $\alpha - \pi$ nằm ở góc phần tư IV.
- $\alpha + \frac{\pi}{2}$ nằm ở góc phần tư III.
- $\frac{\pi}{2} - \alpha$ nằm ở góc phần tư IV.
- $\frac{3\pi}{2} - \alpha$ nằm ở góc phần tư II.

6.21. Kí hiệu M là điểm thuộc đường tròn lượng giác xác định bởi số α thì :

	Dấu		
	sin	côsin	tang
$\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow M \in (\mathrm{III})$	$-$	$-$	$+$
$\frac{3\pi}{2} < \alpha < \frac{7\pi}{4} \Rightarrow M \in (\mathrm{IV})$	$-$	$+$	$-$
$\frac{7\pi}{4} < \alpha < 2\pi \Rightarrow M \in (\mathrm{IV})$	$-$	$+$	$-$
$2\pi < \alpha < 2{,}5\pi \Rightarrow M \in (\mathrm{I})$	$+$	$+$	$+$
$3\pi < \alpha < \frac{10\pi}{3} \Rightarrow M \in (\mathrm{III})$	$-$	$-$	$+$
$\frac{5\pi}{2} < \alpha < \frac{11\pi}{4} \Rightarrow M \in (\mathrm{II})$	$+$	$-$	$-$

(Các kí hiệu (I), (II), (III), (IV) theo thứ tự chỉ các góc phần tư I, II, III, IV)

6.22. M có toạ độ $(x\ ;\ y) \neq (0\ ;\ 0)$, đặt sđ $(Ox, OM) = \alpha$ thì

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\ ;\ \sin\alpha = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$ Vậy

	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$\tan\alpha$	$\cot\alpha$
$M(3\ ;\ -4)$	$\frac{3}{5}$	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{3}{4}$
$M(4\ ;\ -3)$	$\frac{4}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{4}{3}$
$M(-12\ ;\ -9)$	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{3}$
$M(-1\ ;\ 1)$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	-1

6.23. $A = -\frac{1}{2}\ ;\ B = 0.$

6.24. • Các điểm trên đường tròn lượng giác xác định bởi các số $\frac{k2\pi}{5}$ $(k \in \mathbb{Z})$ là các đỉnh của ngũ giác đều nội tiếp đường tròn đó mà một đỉnh là $A(1\ ;\ 0)$. Từ đó quan sát hình ta thấy :

$\sin\frac{k2\pi}{5}$ $(k \in \mathbb{Z})$ có năm giá trị phân biệt,

$\cos\frac{k2\pi}{5}$ $(k \in \mathbb{Z})$ có ba giá trị phân biệt,

$\tan\frac{k2\pi}{5}$ $(k \in \mathbb{Z})$ có năm giá trị phân biệt.

• Các điểm trên đường tròn lượng giác xác định bởi các số $\frac{k\pi}{3}$ $(k \in \mathbb{Z})$ là các đỉnh của một lục giác đều nội tiếp đường tròn đó mà một đỉnh là $A(1\ ;\ 0)$. Từ đó quan sát hình ta thấy :

$\tan\frac{k\pi}{3}$ $(k \in \mathbb{Z})$ có ba giá trị phân biệt (cụ thể là $0\ ;\ \sqrt{3}\ ;-\sqrt{3}$).

6.25. $\sin 10^{\circ} \approx 0{,}174$; $\cos\frac{\pi}{9} \approx 0{,}940$; $\tan\frac{10\pi}{9} \approx 0{,}364$; $\cot(1{,}35) \approx 0{,}224$.

6.26. a) $\cos\alpha = \frac{5}{13}$, $\sin\alpha < 0$ nên $\sin\alpha = -\sqrt{1 - \frac{25}{169}} = -\frac{12}{13}$, do đó $\tan\alpha = -\frac{12}{5}$, $\cot\alpha = -\frac{5}{12}$.

b) $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, $\cos\alpha < 0$ nên $\cos\alpha = -\sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{-3}{5}$. Từ đó suy ra $\tan\alpha = \frac{-4}{3}$, $\cot\alpha = -\frac{3}{4}$.

c) $\tan\alpha = \frac{15}{8}$, $\cos\alpha < 0$ nên $\cos\alpha = -\sqrt{\frac{1}{1 + \frac{225}{64}}} = -\frac{8}{17}$, từ đó $\sin\alpha = -\frac{15}{17}$; $\cot\alpha = \frac{8}{15}$.

d) $\cot\alpha = -3$, $\sin\alpha < 0$ nên $\sin\alpha = -\sqrt{\frac{1}{1+9}} = -\frac{1}{\sqrt{10}}$, từ đó $\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$; $\tan\alpha = -\frac{1}{3}$.

6.27. • $\frac{2\sin\alpha + 3\cos\alpha}{4\sin\alpha - 5\cos\alpha} = \frac{2\tan\alpha + 3}{4\tan\alpha - 5} = \frac{9}{7}$ khi $\tan\alpha = 3$.

• $\frac{3\sin\alpha - 2\cos\alpha}{5\sin^3\alpha + 4\cos^3\alpha} = \frac{3\tan\alpha - 2}{\cos^2\alpha(5\tan^3\alpha + 4)}$

$= \frac{3\tan\alpha - 2}{5\tan^3\alpha + 4}\left(1 + \tan^2\alpha\right) = \frac{70}{139}$ khi $\tan\alpha = 3$.

6.28. a) $$\frac{\tan^2\alpha - \sin^2\alpha}{\cot^2\alpha - \cos^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha\left(\frac{1}{\cos^2\alpha} - 1\right)}{\cos^2\alpha\left(\frac{1}{\sin^2\alpha} - 1\right)} = \frac{\sin^2\alpha\tan^2\alpha}{\cos^2\alpha\cot^2\alpha} = \tan^6\alpha.$$

b) $$\frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\cos^3\alpha} = \frac{\cos\alpha\left(\tan\alpha + 1\right)}{\cos^3\alpha} = \left(\tan^2\alpha + 1\right)\left(\tan\alpha + 1\right)$$

$$= 1 + \tan\alpha + \tan^2\alpha + \tan^3\alpha.$$

c) $\sqrt{\sin^2\alpha(1+\cot\alpha)+\cos^2\alpha(1+\tan\alpha)}$

$$=\sqrt{\sin^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha+\cos\alpha\sin\alpha}$$

$$=\sqrt{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}=|\sin\alpha+\cos\alpha|.$$

d) $\sin^2\alpha\tan^2\alpha+4\sin^2\alpha-\tan^2\alpha+3\cos^2\alpha$

$$=-\tan^2\alpha\cos^2\alpha+4\sin^2\alpha+3\cos^2\alpha$$

$$=3(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)=3.$$

6.29. Cho $\tan\alpha+\cot\alpha=m$, ta có :

a) $\tan^2\alpha+\cot^2\alpha=(\tan\alpha+\cot\alpha)^2-2\tan\alpha\cot\alpha=m^2-2$.

b) $(\tan\alpha-\cot\alpha)^2=\tan^2\alpha+\cot^2\alpha-2\tan\alpha\cot\alpha=m^2-4$. Vậy $|\tan\alpha-\cot\alpha|=\sqrt{m^2-4}$ (để ý rằng, do $\tan\alpha.\cot\alpha=1$, nên $|\tan\alpha+\cot\alpha|\geq 2$, từ đó $m^2\geq 4$).

c) $\tan^3\alpha+\cot^3\alpha=(\tan\alpha+\cot\alpha)^3-3\tan\alpha\cot\alpha(\tan\alpha+\cot\alpha)=m^3-3m$.

6.30. Cho $\sin\alpha+\cos\alpha=m$, ta có :

a) $\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{1}{2}\left[(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1\right]=\dfrac{m^2-1}{2}$.

b) $(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=1-2\sin\alpha\cos\alpha=1-(m^2-1)=2-m^2$,

từ đó $|\sin\alpha-\cos\alpha|=\sqrt{2-m^2}$ (lập luận này cũng chứng tỏ rằng, nếu $\sin\alpha+\cos\alpha=m$ thì $2-m^2\geq 0$, tức là ta luôn có $|\sin\alpha+\cos\alpha|\leq\sqrt{2}$; còn có thể suy ra bất đẳng thức này từ nhiều lập luận khác).

c) $\sin^3\alpha+\cos^3\alpha=(\sin\alpha+\cos\alpha)^3-3\sin\alpha\cos\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)$

$$=m^3-3\left(\frac{m^2-1}{2}\right)m=\frac{m(3-m^2)}{2}.$$

d) $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^3-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)$

$$=1-3\left(\frac{m^2-1}{2}\right)^2=\frac{-3m^4+6m^2+1}{4}.$$

6.31. a) $\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}+\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}=\sqrt{\dfrac{(1-\cos\alpha)^2}{\sin^2\alpha}}+\sqrt{\dfrac{(1+\cos\alpha)^2}{\sin^2\alpha}}$

$=\dfrac{1-\cos\alpha+1+\cos\alpha}{|\sin\alpha|}=\dfrac{2}{|\sin\alpha|}$. (Chú ý rằng $|\cos\alpha|\le 1$).

b) $\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}-\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\sqrt{\dfrac{(1+\cos\alpha)^2}{\sin^2\alpha}}-\sqrt{\dfrac{(1-\cos\alpha)^2}{\sin^2\alpha}}$

$=\dfrac{1+\cos\alpha-1+\cos\alpha}{|\sin\alpha|}=\dfrac{2\cos\alpha}{|\sin\alpha|}$.

6.32. a) 0 ; b) 0 ; c) $2\sin\alpha$;

d) $-2\sin\alpha$; e) 0 ; f) 0 ; g) $2\cos\alpha$.

6.33. a) $\sin\left(\dfrac{5\pi}{4}+\alpha\right)=\sin\left(2\pi-\dfrac{3\pi}{4}+\alpha\right)=\sin\left(-\dfrac{3\pi}{4}+\alpha\right)=-\sin\left(\dfrac{3\pi}{4}-\alpha\right)$.

b) $\cos\left(\alpha-\dfrac{2\pi}{3}\right)=-\cos\left(\alpha-\dfrac{2\pi}{3}+\pi\right)=-\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)$.

c) $\cos\left(\alpha-\dfrac{2\pi}{3}\right)=\cos\left(\alpha+\dfrac{4\pi}{3}-2\pi\right)=\cos\left(\alpha+\dfrac{4\pi}{3}\right)$.

6.34. a) Đáp số theo thứ tự là

$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; 1 ; $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

b) $-\dfrac{3}{2}$. c) $-1+\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

6.35. a) $\cos\dfrac{\pi}{9}+\cos\dfrac{2\pi}{9}+...+\cos\dfrac{8\pi}{9}=0$, do $\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$.

b) Do $\sin\dfrac{\pi}{3}=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{6}\right)=\cos\dfrac{\pi}{6}$ nên $\sin^2\dfrac{\pi}{3}+\sin^2\dfrac{\pi}{6}=1$.

Do $\sin\dfrac{7\pi}{18}=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{9}\right)=\cos\dfrac{\pi}{9}$ nên $\sin^2\dfrac{7\pi}{18}+\sin^2\dfrac{\pi}{9}=1$.

Do $\sin\dfrac{5\pi}{18}=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{2\pi}{9}\right)=\cos\dfrac{2\pi}{9}$ nên $\sin^2\dfrac{2\pi}{9}+\sin^2\dfrac{5\pi}{18}=1$.

Vậy $\sin^2\dfrac{\pi}{3}+\sin^2\dfrac{\pi}{6}+\sin^2\dfrac{\pi}{9}+\sin^2\dfrac{2\pi}{9}+\sin^2\dfrac{5\pi}{18}+\sin^2\dfrac{7\pi}{18}=3$.

c) Do $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3}$, nên $\cos^2\frac{\pi}{3} + \cos^2\frac{5\pi}{6} = 1$.

Do $\cos\frac{11\pi}{18} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{9}\right) = -\sin\frac{\pi}{9}$, nên $\cos^2\frac{\pi}{9} + \cos^2\frac{11\pi}{18} = 1$.

Do $\cos\frac{13\pi}{18} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{9}\right) = -\sin\frac{2\pi}{9}$, nên $\cos^2\frac{13\pi}{18} + \cos^2\frac{2\pi}{9} = 1$.

Vậy $\cos^2\frac{\pi}{3} + \cos^2\frac{5\pi}{6} + \cos^2\frac{\pi}{9} + \cos^2\frac{11\pi}{18} + \cos^2\frac{13\pi}{18} + \cos^2\frac{2\pi}{9} = 3$.

d) Do $\cos\frac{6\pi}{5} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{5}\right) = -\cos\frac{\pi}{5}$; $\cos\frac{7\pi}{5} = -\cos\frac{2\pi}{5}$;

$\cos\frac{8\pi}{5} = -\cos\frac{3\pi}{5}$; $\cos\frac{9\pi}{5} = -\cos\frac{4\pi}{5}$; $\cos\pi = -1$ nên

$$\cos\frac{\pi}{5} + \cos\frac{2\pi}{5} + ... + \cos\frac{9\pi}{5} = -1.$$

e) Tương tự đối với sin, nhưng ở đây $\sin\pi = 0$, ta có :

$$\sin\frac{\pi}{5} + \sin\frac{2\pi}{5} + ... + \sin\frac{9\pi}{5} = 0.$$

(*Chú ý :* Ta cũng có thể xét thập giác đều có các đỉnh là A_k là các điểm trên đường tròn lượng giác, xác định bởi các số $\frac{k\pi}{5}$ (k = 1 ; 2 ; 3 ; 4 ;... ; 9 ; 10) và nhận xét rằng $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + ... + \overrightarrow{OA_{10}} = \vec{0}$).

6.36.

Điểm xác định bởi	**Nằm trong góc phần tư**			
α	I	II	III	IV
$\alpha + \frac{\pi}{2}$	II	III	IV	I
$\alpha + \pi$	III	IV	I	II
$\alpha - \frac{\pi}{2}$	IV	I	II	III
$-\alpha$	IV	III	II	I
$-\alpha + \frac{\pi}{2}$	I	IV	III	II
$-\alpha + \pi$	II	I	IV	III

6.37. a) Theo mô tả của cung lượng giác, hai điểm M, N trên đường tròn định hướng tâm O là hai điểm đối xứng qua đường thẳng OP (P thuộc đường tròn đó) khi và chỉ khi

$$\text{sđ}\,\overset{\frown}{PM} + \text{sđ}\,\overset{\frown}{PN} = k2\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

b) Từ câu a) nếu M, N, P thuộc đường tròn lượng giác xác định theo thứ tự bởi các số α, β, γ thì M, N là hai điểm đối xứng qua đường thẳng OP khi và chỉ khi $\alpha - \gamma + \beta - \gamma = k2\pi$ tức là $\alpha + \beta = 2\gamma + k2\pi$, ($k \in \mathbb{Z}$).

c) Coi P xác định bởi số $\frac{3\pi}{4}$ thì hai điểm M, N xác định theo thứ tự bởi α, β là hai điểm đối xứng nhau qua OP (đường phân giác của góc phần tư II và IV) khi và chỉ khi

$$\alpha + \beta = \frac{3\pi}{2} + k2\pi.$$

d) Coi các điểm A_1, A_2, A_3, A_4 trên đường tròn lượng giác xác định theo thứ tự bởi $\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{5\pi}{6}$; $\frac{13\pi}{12}$. Ta phải chứng minh $A_1A_2A_3A_4$ là hình thang cân.

Cách 1. Hai cặp điểm A_1 và A_4 ; A_2 và A_3 đối xứng nhau qua cùng một đường thẳng do $\frac{\pi}{4} + \frac{13\pi}{12} = \frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{6} = \frac{4\pi}{3}$.

Cách 2. Góc hình học A_1OA_2 có số đo $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$ và góc hình học A_3OA_4 có số đo $\frac{13\pi}{12} - \frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{4}$, nên $\widehat{A_1OA_2} = \widehat{A_3OA_4}$.

6.38. • $\sin\left(\alpha + 2l\frac{\pi}{2}\right) = \sin(\alpha + l\pi) = (-1)^l \sin\alpha$;

$$\sin\left[\alpha + (2l+1)\frac{\pi}{2}\right] = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2} + l\pi\right) = (-1)^l \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^l \cos\alpha.$$

• $\cos\left(\alpha + 2l\dfrac{\pi}{2}\right) = \cos(\alpha + l\pi) = (-1)^l\cos\alpha$;

$$\cos\left[\alpha + (2l+1)\frac{\pi}{2}\right] = \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2} + l\pi\right) = (-1)^l\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$$

$= (-1)^l(-\sin\alpha) = (-1)^{l+1}\sin\alpha.$

• Từ đó $\tan\left(\alpha + 2l\dfrac{\pi}{2}\right) = \tan\alpha$;

$$\tan\left[\alpha + (2l+1)\frac{\pi}{2}\right] = -\cot\alpha\,.$$

6.39. Coi AB có độ dài là 1 thì dễ thấy $AE = AB = 1$, $BE = CE = \sqrt{2}$;

$AC = AE + EC = 1 + \sqrt{2}$; $BC = \sqrt{1 + \left(1+\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{2\left(2+\sqrt{2}\right)}$.

Từ đó $\cos\dfrac{\pi}{8} = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2\left(2+\sqrt{2}\right)}} = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$;

$$\sin\frac{\pi}{8} = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{\sqrt{2\left(2+\sqrt{2}\right)}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

6.40. Ta có $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{DC}{BC} = \dfrac{AC - AD}{BC} = \dfrac{AC}{BC} - \dfrac{AD}{AB}\cdot\dfrac{AB}{BC}$.

Từ đó $\dfrac{AD}{AB}\left(1 + \dfrac{AB}{BC}\right) = \dfrac{AC}{BC}$, tức là $\tan\dfrac{\alpha}{2}\left(1+\cos\alpha\right) = \sin\alpha$, suy ra

$\tan\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$.

Với $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$ ta được $\tan\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{1}{2\left(1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \dfrac{1}{2+\sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}.$

6.41. Dễ thấy $BI = IC$,

nên $\cos 2\alpha = \dfrac{AI}{IC} = \dfrac{AI}{BI} = \dfrac{AB - BI}{BI} = \dfrac{AB}{BI} - 1 = \dfrac{AB}{BC} \cdot \dfrac{2BM}{BI} - 1$,

mà $\cos\alpha = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{BM}{BI}$, nên $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$.

6.42. a) $\sin\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3} - 1\right) = \dfrac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$;

$\cos\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3} + 1\right) = \dfrac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$; $\tan\dfrac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$.

b) $\sin 75^{o} = \cos\dfrac{\pi}{12}$; $\cos 75^{o} = \sin\dfrac{\pi}{12}$; $\tan 75^{o} = \dfrac{1}{\tan\dfrac{\pi}{12}} = 2 + \sqrt{3}$.

$\sin 105^{o} = \cos\dfrac{\pi}{12}$; $\cos 105^{o} = -\sin\dfrac{\pi}{12}$; $\tan 105^{o} = -\dfrac{1}{\tan\dfrac{\pi}{12}}$.

$\sin 165^{o} = \sin\dfrac{\pi}{12}$; $\cos 165^{o} = -\cos\dfrac{\pi}{12}$; $\tan 165^{o} = -\tan\dfrac{\pi}{12}$.

6.43. a) Dễ thấy $BC = BD = AD$, nên đặt $BC = a$, $AB = b$ thì $\cos\dfrac{2\pi}{5} = \dfrac{a}{2b}$. (1)

Ta có $\dfrac{DC}{DA} = \dfrac{BC}{BA}$ suy ra $\dfrac{b - a}{a} = \dfrac{a}{b}$, tức là $\dfrac{1 - \dfrac{a}{b}}{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{a}{b}$. (2)

Từ (1) và (2) ta có $\dfrac{1 - 2\cos\dfrac{2\pi}{5}}{2\cos\dfrac{2\pi}{5}} = 2\cos\dfrac{2\pi}{5}$ hay

$4\cos^2\dfrac{2\pi}{5} + 2\cos\dfrac{2\pi}{5} - 1 = 0$, tức là $4x^2 + 2x - 1 = 0$. (3)

b) Giải phương trình (3), ta được $x = \dfrac{-1 - \sqrt{5}}{4}$ hoặc $x = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{4}$.

Từ đó $\cos\dfrac{2\pi}{5} = \dfrac{-1 - \sqrt{5}}{4} < 0$ (loại) hoặc $\cos\dfrac{2\pi}{5} = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{4}$. Suy ra

$$\cos\frac{\pi}{5} = \sqrt{\frac{1+\cos\frac{2\pi}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}} = \frac{\sqrt{5}+1}{4} \ ;$$

$$\sin\frac{\pi}{5} = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{2\pi}{5}}{2}} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} \ ; \ \tan\frac{\pi}{5} = \frac{\sin\frac{\pi}{5}}{\cos\frac{\pi}{5}} = \sqrt{5-2\sqrt{5}} \, .$$

c) $$\sin 18^{\circ} = \sin\frac{\pi}{10} = \sin\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{5}}{2}} = \frac{1}{4}\sqrt{2\left(3-\sqrt{5}\right)} \, .$$

$$\cos 18^{\circ} = \cos\frac{\pi}{10} = \cos\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{5}}{2}} = \frac{1}{4}\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)} \, .$$

$$\tan 18^{\circ} = \frac{\sin 18^{\circ}}{\cos 18^{\circ}} = \sqrt{1-\frac{2\sqrt{5}}{5}} \, .$$

d) $$\sin 6^{\circ} = \sin(36^{\circ}-30^{\circ}) = \sin\left(\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{6} - \cos\frac{\pi}{5}\sin\frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{\pi}{5} - \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1}{8}\left[\sqrt{6\left(5-\sqrt{5}\right)} - \left(\sqrt{5}+1\right)\right] \quad (\approx 0{,}1045).$$

$$\cos 6^{\circ} = \cos(36^{\circ}-30^{\circ}) = \cos\left(\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{5}\sin\frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{\pi}{5} + \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{5} = \frac{1}{8}\left[\sqrt{3}\left(\sqrt{5}+1\right) + \sqrt{2\left(5-\sqrt{5}\right)}\right] (\approx 0{,}9945).$$

6.44. $$\cos 2\alpha = \frac{1}{8} \ ; \qquad \sin 2\alpha = \frac{3\sqrt{7}}{8} \ ;$$

$$\cos 2\beta = \frac{7}{25} \ ; \qquad \sin 2\beta = -\frac{24}{25}.$$

$$\cos(\alpha+\beta) = -\frac{3}{5}\left(1+\frac{\sqrt{7}}{4}\right) \ ;$$

$$\sin(\alpha-\beta) = -\frac{1}{5}\left(\sqrt{7}+\frac{9}{4}\right).$$

Gợi ý. $\cos\alpha = \frac{3}{4}$, $\sin\alpha > 0$ nên $\sin\alpha = \sqrt{1 - \frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$;

$\sin\beta = \frac{3}{5}$, $\cos\beta < 0$ nên $\cos\beta = -\sqrt{1 - \frac{9}{25}} = -\frac{4}{5}$;

6.45. a) $\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$; $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$;

$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$.

b) $\cos\beta = -\sqrt{1 - \frac{9}{25}} = -\frac{4}{5}$; $\cos\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{1 - \frac{4}{5}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$;

$\sin\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{1 + \frac{4}{5}}{2}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$; $\tan\frac{\beta}{2} = 3$.

6.46. a) $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 2m^2 - 1$;

$\sin^2 2\alpha = 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha = 4\cos^2\alpha\,(1 - \cos^2\alpha) = 4m^2(1 - m^2)$;

$$\tan^2 2\alpha = \frac{\sin^2 2\alpha}{\cos^2 2\alpha} = \frac{4m^2(1 - m^2)}{(2m^2 - 1)^2}.$$

b) Không, chẳng hạn $\cos\frac{\pi}{3} = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$, nhưng

$\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\tan\frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}$, $\tan\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$.

6.47. a) $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 1 - 2m^2$;

$\sin^2 2\alpha = 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha = 4\sin^2\alpha(1 - \sin^2\alpha) = 4m^2(1 - m^2)$;

$$\tan^2 2\alpha = \frac{\sin^2 2\alpha}{\cos^2 2\alpha} = \frac{4m^2(1 - m^2)}{(1 - 2m^2)^2}.$$

b) Không, chẳng hạn $\sin\frac{\pi}{3} = \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

nhưng $\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\left(2.\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$$\tan\frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3},\ \tan\left(2.\frac{2\pi}{3}\right) = \sqrt{3}.$$

6.48. $\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2} = \frac{1+m}{2}$;

$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2} = \frac{1-m}{2}$; $\quad\tan^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-m}{1+m}$.

6.49. a) $\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = 2\tan\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{2t}{1+t^2}$ (giả sử $\cos\frac{\alpha}{2} \neq 0$).

$\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1 = \frac{2}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}} - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ (giả sử $\cos\frac{\alpha}{2} \neq 0$).

b) Khi $\sin\alpha\cos\alpha \neq 0$, ta có

$$\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{1}{\tan\alpha} + 4\sin\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} + 4\sin\alpha.$$

Vậy khi $t = \tan\frac{\alpha}{2} \neq 0$ và $t^2 \neq 1$, ta có

$$\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{1}{\tan\alpha} + 4\sin\alpha = \frac{t^4 + 18t^2 + 1}{2t(1+t^2)}.$$

6.50. a) $\frac{\sin\alpha + \sin 2\alpha}{1+\cos\alpha+\cos 2\alpha} = \frac{\sin\alpha(1+2\cos\alpha)}{1+\cos\alpha+2\cos^2\alpha - 1}$

$$= \frac{\sin\alpha(1+2\cos\alpha)}{\cos\alpha(1+2\cos\alpha)} = \tan\alpha.$$

b) $\frac{2\sin 2\alpha - \sin 4\alpha}{2\sin 2\alpha + \sin 4\alpha} = \frac{2\sin 2\alpha(1-\cos 2\alpha)}{2\sin 2\alpha(1+\cos 2\alpha)} = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \tan^2\alpha$.

6.51. a) $\sin^2(\alpha+\beta) = (\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha)^2$

$= \sin^2\alpha\cos^2\beta + \sin^2\beta\cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta\cos\beta$

$= \sin^2\alpha(1-\sin^2\beta) + \sin^2\beta(1-\sin^2\alpha) + 2\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta\cos\beta$

$= \sin^2\alpha + \sin^2\beta - 2\sin^2\alpha\sin^2\beta + 2\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta\cos\beta$

$= \sin^2\alpha + \sin^2\beta + 2\sin\alpha\sin\beta(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)$

$= \sin^2\alpha + \sin^2\beta + 2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha+\beta)$.

b) $m^2 + n^2 = (\cos\alpha + \cos\beta)^2 + (\sin\alpha + \sin\beta)^2$

$= \cos^2\alpha + \sin^2\alpha + \cos^2\beta + \sin^2\beta + 2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)$

$= 2 + 2\cos(\alpha-\beta)$.

Do đó $\cos(\alpha-\beta) = \dfrac{m^2+n^2-2}{2}$.

c) $\cos(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta)$

$= \dfrac{1}{2}(\cos 2\alpha + \cos 2\beta) = \dfrac{1}{2}(2\cos^2\alpha - 1 + 2\cos^2\beta - 1)$

$= \cos^2\alpha + \cos^2\beta - 1 = p - 1$.

6.52. a) Nếu $\cos(\alpha+\beta) = 0$ thì

$\sin(\alpha+2\beta) = \sin\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos\alpha$

$= \sin\alpha(1-2\sin^2\beta) + 2\sin\beta\cos\beta\cos\alpha = \sin\alpha + 2\sin\beta(-\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta)$

$= \sin\alpha + 2\sin\beta\cos(\alpha+\beta) = \sin\alpha$.

b) Ta có

$\sin(2\alpha+\beta) = 3\sin\beta \Leftrightarrow 2\sin\alpha\cos\alpha\cos\beta + (2\cos^2\alpha - 1)\sin\beta = 3\sin\beta$

$$\Leftrightarrow \cos\alpha\sin(\alpha+\beta) = 2\sin\beta. \qquad (1)$$

Mặt khác

$\sin(2\alpha+\beta) = 3\sin\beta \Leftrightarrow 2\sin\alpha\cos\alpha\cos\beta + (1-2\sin^2\alpha)\sin\beta = 3\sin\beta$

$$\Leftrightarrow \sin\alpha\cos(\alpha+\beta) = \sin\beta. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\cot\alpha\tan(\alpha+\beta) = 2$. Do đó $\tan(\alpha+\beta) = 2\tan\alpha$.

6.53. a) $4\cos15^\circ\cos21^\circ\cos24^\circ - \cos12^\circ - \cos18^\circ$

$= 2\cos15^\circ(\cos45^\circ + \cos3^\circ) - 2\cos15^\circ\cos3^\circ$

$= 2\cos15^\circ\cos45^\circ = \cos60^\circ + \cos30^\circ = \dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

b) $\tan30^\circ + \tan40^\circ + \tan50^\circ + \tan60^\circ = \dfrac{\sin 90^\circ}{\cos 30^\circ\cos 60^\circ} + \dfrac{\sin 90^\circ}{\cos 40^\circ\cos 50^\circ}$

$= \dfrac{\cos 90^\circ + \cos 10^\circ + \cos 90^\circ + \cos 30^\circ}{\frac{1}{2}\cos 10^\circ\cos 30^\circ} = \dfrac{4\cos 20^\circ\cos 10^\circ}{\cos 10^\circ\cos 30^\circ}$

$= \dfrac{8}{\sqrt{3}}\cos 20^\circ = \dfrac{8\sqrt{3}}{3}\cos 20^\circ.$

c) $\dfrac{1}{\sin 18^\circ} - \dfrac{1}{\sin 54^\circ} = \dfrac{\sin 54^\circ - \sin 18^\circ}{\sin 18^\circ\sin 54^\circ} = \dfrac{2\cos 36^\circ\sin 18^\circ}{\sin 18^\circ\sin 54^\circ} = \dfrac{2\cos 36^\circ}{\sin 54^\circ}$

$$= \frac{2\cos 36^\circ}{\cos 36^\circ} = 2.$$

d) $\tan9^\circ - \tan27^\circ - \tan63^\circ + \tan81^\circ = \tan9^\circ + \tan81^\circ - (\tan27^\circ + \tan63^\circ)$

$= \left(\dfrac{\sin 9^\circ}{\cos 9^\circ} + \dfrac{\sin 81^\circ}{\cos 81^\circ}\right) - \left(\dfrac{\sin 27^\circ}{\cos 27^\circ} + \dfrac{\sin 63^\circ}{\cos 63^\circ}\right)$

$= \dfrac{1}{\sin 9^\circ\cos 9^\circ} - \dfrac{1}{\sin 27^\circ\cos 27^\circ}$

$= \dfrac{2}{\sin 18^\circ} - \dfrac{2}{\sin 54^\circ} = 2.2 = 4.$

6.54. a) $\dfrac{\sin x + \sin y}{2} = \sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2} \le \sin\dfrac{x+y}{2}$. (Với chú ý rằng

$$\sin\frac{x+y}{2} \ge 0 \text{ do } 0 \le \frac{x+y}{2} \le \pi \text{ và } \cos\frac{x-y}{2} \le 1)$$

b) $\dfrac{\cos x + \cos y}{2} = \cos\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2} \le \cos\dfrac{x+y}{2}$. (Với chú ý rằng

$$\cos\frac{x+y}{2} \ge 0 \text{ do } -\frac{\pi}{2} \le \frac{x+y}{2} \le \frac{\pi}{2} \text{ và } \cos\frac{x-y}{2} \le 1).$$

6.55. $\dfrac{\sin\alpha + \sin\beta\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha - \sin\beta\sin(\alpha+\beta)} = \dfrac{\sin\alpha + \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+2\beta) - \sin\alpha\right]}{\cos\alpha + \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+2\beta) - \cos\alpha\right]}$

$= \dfrac{\sin(\alpha+2\beta) + \sin\alpha}{\cos(\alpha+2\beta) + \cos\alpha} = \dfrac{2\sin(\alpha+\beta)\cos\beta}{2\cos(\alpha+\beta)\cos\beta} = \tan(\alpha+\beta).$

6.56. a) Vì $\sin A = 2\sin\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{A}{2}$ và

$$\frac{\cos B + \cos C}{\sin B + \sin C} = \frac{2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}{2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right)} = \frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}$$

nên dễ thấy : $\sin A = \dfrac{\cos B + \cos C}{\sin B + \sin C} \Leftrightarrow 2\cos^2\dfrac{A}{2} = 1 \Leftrightarrow \cos A = 0$

$\Leftrightarrow \widehat{A}$ là góc vuông.

b) *Cách 1*

$$\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{\cos B + \cos C}{\cos C + \cos A} \Leftrightarrow \frac{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}} = \frac{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}}{\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C-A}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{A}{2}\cos\frac{C-A}{2} = \cos\frac{B}{2}\cos\frac{B-C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{C}{2} + \cos\left(A - \frac{C}{2}\right) = \cos\left(B - \frac{C}{2}\right) + \cos\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(A - \frac{C}{2}\right) = \cos\left(B - \frac{C}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left|A - \frac{C}{2}\right| = \left|B - \frac{C}{2}\right| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\widehat{A} = \widehat{B} \\ \widehat{A} + \widehat{B} = \widehat{C}.\end{array}\right.$$

Cách 2

$$\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{\cos B + \cos C}{\cos C + \cos A} \Leftrightarrow \sin A\cos A - \sin B\cos B = \cos C(\sin B - \sin A)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\sin 2A - \sin 2B) = \cos C(\sin B - \sin A)$$

$$\Leftrightarrow \cos(A + B)\sin(A - B) = 2\cos C\cos\frac{B + A}{2}\sin\frac{B - A}{2}$$

$$\Leftrightarrow -\cos C\sin\frac{A - B}{2}\cos\frac{A - B}{2} = -\cos C\sin\frac{A - B}{2}\cos\frac{A + B}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos C\sin\frac{A - B}{2}\left(\cos\frac{A + B}{2} - \cos\frac{A - B}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos C\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{A - B}{2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos C = 0\\ \sin\dfrac{A - B}{2} = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\widehat{C} \text{ vuông}\\ \widehat{A} = \widehat{B}.\end{array}\right.$$

6.57. a) Với $k = 1, 2, 3, ..., n$, ta có

$$\sin k\alpha\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\left[\cos\frac{(2k - 1)\alpha}{2} - \cos\frac{(2k + 1)\alpha}{2}\right]$$

nên

$$S.\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\left[\left(\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{3\alpha}{2}\right) + \left(\cos\frac{3\alpha}{2} - \cos\frac{5\alpha}{2}\right) + ... +\right.$$

$$\left.+\left(\cos\frac{(2n - 1)\alpha}{2} - \cos\frac{(2n + 1)\alpha}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{(2n + 1)\alpha}{2}\right)\right] = \sin\frac{n\alpha}{2}\sin\frac{(n + 1)\alpha}{2}.$$

b) Với $k = 1, 2, 3, ..., n$, ta có

$$\cos k\alpha\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\left[\sin\frac{(2k + 1)\alpha}{2} - \sin\frac{(2k - 1)\alpha}{2}\right]$$

nên

$$T\sin\frac{\alpha}{2} = \sin\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}\left[\left(\sin\frac{3\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\right) + \left(\sin\frac{5\alpha}{2} - \sin\frac{3\alpha}{2}\right) + \ldots + \right.$$

$$\left. + \left(\sin\frac{(2n+1)\alpha}{2} - \sin\frac{(2n-1)\alpha}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\sin\frac{(2n+1)\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\right)\right] = \cos\frac{n\alpha}{2}\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}.$$

6.58. a) Ta có

$$\sin\frac{2\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7} = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{3\pi}{7}\right),$$

$$\sin\frac{4\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7} = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{3\pi}{7} - \cos\frac{5\pi}{7}\right),$$

$$\sin\frac{6\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7} = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{5\pi}{7} - \cos\pi\right).$$

Từ đó

$$\left(\sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{6\pi}{7}\right)\sin\frac{\pi}{7} = \frac{1}{2}\left(1 + \cos\frac{\pi}{7}\right) = \cos^2\frac{\pi}{14}.$$

Do $\sin\frac{\pi}{7} = 2\sin\frac{\pi}{14}\cos\frac{\pi}{14}$, ta suy ra

$$\sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{6\pi}{7} = \frac{1}{2}\cot\frac{\pi}{14}.$$

b) Với $k = 1, 2, 3, 4, 5$ ta có

$$\cos\frac{(2k-1)\pi}{11}\sin\frac{\pi}{11} = \frac{1}{2}\left[\sin\frac{2k\pi}{11} - \sin\frac{(2k-2)\pi}{11}\right],$$

nên nếu gọi B là vế trái của đẳng thức ở câu b) thì

$$B\sin\frac{\pi}{11} = \frac{1}{2}\left[\left(\sin\frac{2\pi}{11} - \sin 0\right) + \left(\sin\frac{4\pi}{11} - \sin\frac{2\pi}{11}\right) + \ldots + \left(\sin\frac{10\pi}{11} - \sin\frac{8\pi}{11}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\sin\frac{10\pi}{11} = \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{11}.$$

Từ đó $B = \frac{1}{2}$.

c) Với $k = 1, 2, 3, 4, 5$ ta có

$\cos\frac{2k\pi}{11}\sin\frac{\pi}{11} = \frac{1}{2}\left[\sin\frac{(2k+1)\pi}{11} - \sin\frac{(2k-1)\pi}{11}\right]$ nên gọi C là vế trái của đẳng thức câu c) thì

$$C\sin\frac{\pi}{11} = \frac{1}{2}\left[\left(\sin\frac{3\pi}{11} - \sin\frac{\pi}{11}\right) + \left(\sin\frac{5\pi}{11} - \sin\frac{3\pi}{11}\right) + ... + \left(\sin\pi - \sin\frac{9\pi}{11}\right)\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{11}.$$

Từ đó $C = -\frac{1}{2}$.

d) Theo câu a) bài 6.57, gọi D là vế trái của đẳng thức câu d) thì (ở đây $n = 10$, $\alpha = \frac{\pi}{11}$)

$$D\sin\frac{\pi}{22} = \sin\frac{10\pi}{22}\sin\frac{\pi}{2} = \sin\frac{10\pi}{22} = \cos\frac{\pi}{22}.$$

Từ đó $D = \cot\frac{\pi}{22}$.

6.59. Cho $\sin\alpha - \cos\alpha = m$ ta có

a) $\sin\alpha\cos\alpha = -\frac{1}{2}\left[(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 - 1\right] = \frac{1-m^2}{2}$.

b) $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = 1 + 2\sin\alpha\cos\alpha = 1 + 1 - m^2 = 2 - m^2$.

Từ đó $|\sin\alpha + \cos\alpha| = \sqrt{2 - m^2}$.

c) $\sin^3\alpha - \cos^3\alpha = (\sin\alpha - \cos\alpha)^3 - 3\sin\alpha\cos\alpha(\sin\alpha - \cos\alpha)$

$$= m^3 + 3\left(\frac{1-m^2}{2}\right)m = \frac{m(3-m^2)}{2}.$$

d) $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^3 - 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)$

$$= 1 - 3\left(\frac{1-m^2}{2}\right)^2 = \frac{-3m^4 + 6m^2 + 1}{4}.$$

(*Chú ý*. Cũng dễ dàng suy ra các kết quả này từ kết quả của bài tập 6.30 bằng cách đặt $\alpha = \pi - \alpha'$).

6.60. a) Vì $\sin 75^\circ = \cos 15^\circ$, $\sin 55^\circ = \cos 35^\circ$ nên

$\sin^2 15^\circ + \sin^2 35^\circ + \sin^2 55^\circ + \sin^2 75^\circ = 2.$

b) Vì $\sin\frac{7\pi}{8} = \sin\left(\frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{3\pi}{8}$; $\sin\frac{5\pi}{8} = \sin\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{8}$

nên $\sin^2\frac{\pi}{8} + \sin^2\frac{3\pi}{8} + \sin^2\frac{5\pi}{8} + \sin^2\frac{7\pi}{8} = 2$.

c) Tương tự

$$\cos\frac{11\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{12}\right) = -\sin\frac{5\pi}{12},$$

$$\cos\frac{9\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{12}\right) = -\sin\frac{3\pi}{12},$$

$$\cos\frac{7\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12}\right) = -\sin\frac{\pi}{12}$$

nên ta có :

$$\cos^2\frac{\pi}{12} + \cos^2\frac{3\pi}{12} + \cos^2\frac{5\pi}{12} + \cos^2\frac{7\pi}{12} + \cos^2\frac{9\pi}{12} + \cos^2\frac{11\pi}{12} = 3.$$

6.61. Ta có $\tan\alpha + \tan\beta = -\frac{b}{a}$, $\tan\alpha\tan\beta = \frac{c}{a}\cdot$

• Nếu $\cos(\alpha + \beta) \neq 0$ thì vế trái của đẳng thức đã cho là

$a\sin^2(\alpha + \beta) + b\sin(\alpha + \beta)\cos(\alpha + \beta) + c\cos^2(\alpha + \beta)$

$= \cos^2(\alpha + \beta)[a\tan^2(\alpha + \beta) + b\tan(\alpha + \beta) + c]$

$$= \frac{1}{1 + \tan^2(\alpha + \beta)}\left[a\tan^2(\alpha + \beta) + b\tan(\alpha + \beta) + c\right]. \qquad (*)$$

Nhưng ta có $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = \frac{b}{c - a}$

(để ý rằng $\cos(\alpha + \beta) \neq 0 \Leftrightarrow c \neq a$) nên thay giá trị của $\tan(\alpha + \beta)$ vào biểu thức (*), sau khi đơn giản ta được biểu thức đó bằng c.

• Nếu $\cos(\alpha + \beta) = 0$ ($\Leftrightarrow \tan\alpha\tan\beta = 1 \Leftrightarrow a = c$) thì $\sin^2(\alpha + \beta) = 1$, nên vế trái của đẳng thức đã cho bằng $a\sin^2(\alpha + \beta) = a = c$.

6.62. Đặt $u = \frac{1}{2}(\tan\alpha + \cot\alpha)$, $v = \frac{1}{2}(\tan\alpha - \cot\alpha)$ thì $u + v = \tan\alpha$,

$u - v = \cot\alpha$. Khi đó ta có

$$\sin(\tan\alpha) + \sin(\cot\alpha) = \sin(u+v) + \sin(u-v) = 2\sin u\cos v$$

$$= 2\sin\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)\right].\cos\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)\right]$$

$$= 2\sin\left(\frac{1}{2\sin\alpha\cos\alpha}\right).\cos\left(\frac{\sin^2\alpha - \cos^2 a}{2\sin\alpha\cos\alpha}\right)$$

$$= 2\sin\left(\frac{1}{\sin 2\alpha}\right).\cos(\cot 2\alpha).$$

6.63. Ta có

$$\cos(\alpha - \beta) = \frac{BK}{BE} = \frac{BH}{BE} + \frac{HK}{BE} = \frac{BH}{BA}.\frac{BA}{BE} + \frac{EJ}{BE}$$ (*HKEJ* là hình chữ nhật)

$$= \frac{BH}{BA}\cdot\frac{BA}{BE} + \frac{EJ}{EA}\cdot\frac{EA}{BE} = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

6.64. Ta có $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$;

$$\cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1 + \cos\frac{\pi}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}.$$

$$\cos\frac{\pi}{16} = \sqrt{\frac{1 + \cos\frac{\pi}{8}}{2}} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}};$$

$$\cos\frac{\pi}{32} = \sqrt{\frac{1 + \cos\frac{\pi}{16}}{2}} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}.$$

6.65. a) Ta có :

$$\sin\frac{2\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9}\cos\frac{8\pi}{9}$$

$$= \frac{1}{2}\sin\frac{4\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9}\cos\frac{8\pi}{9} = \frac{1}{4}\sin\frac{8\pi}{9}\cos\frac{8\pi}{9}$$

$$= \frac{1}{8}\sin\frac{16\pi}{9} = \frac{1}{8}\sin\left(2\pi - \frac{2\pi}{9}\right) = -\frac{1}{8}\sin\frac{2\pi}{9}.$$

Từ đó : $\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9}\cos\frac{8\pi}{9} = -\frac{1}{8}.$

b) Ta có $\cos\frac{2\pi}{9} + \cos\frac{8\pi}{9} = 2\cos\frac{5\pi}{9}\cos\frac{\pi}{3} = \cos\frac{5\pi}{9}$

$$= \cos\left(\pi - \frac{4\pi}{9}\right) = -\cos\frac{4\pi}{9},$$

từ đó $\cos\frac{2\pi}{9} + \cos\frac{4\pi}{9} + \cos\frac{8\pi}{9} = 0.$

c) Do $\cos\frac{2\pi}{9} = 2\cos^2\frac{\pi}{9} - 1 = 2\cos^2\frac{8\pi}{9} - 1,$

$$\cos\frac{4\pi}{9} = 2\cos^2\frac{2\pi}{9} - 1$$

$$\cos\frac{8\pi}{9} = 2\cos^2\frac{4\pi}{9} - 1,$$

nên từ b) suy ra

$$\cos^2\frac{2\pi}{9} + \cos^2\frac{4\pi}{9} + \cos^2\frac{8\pi}{9} = \frac{3}{2}.$$

d) Với mọi số A, B, C ta có :

$AB + BC + CA = \frac{1}{2}\left[(A+B+C)^2 - A^2 - B^2 - C^2\right]$ nên

$$\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9} + \cos\frac{4\pi}{9}\cos\frac{8\pi}{9} + \cos\frac{8\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\cos\frac{2\pi}{9} + \cos\frac{4\pi}{9} + \cos\frac{8\pi}{9}\right)^2 - \left(\cos^2\frac{2\pi}{9} + \cos^2\frac{4\pi}{9} + \cos^2\frac{8\pi}{9}\right)\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2} = -\frac{3}{4}.$$

e) Ta có $\left(X - \cos\frac{2\pi}{9}\right)\left(X - \cos\frac{4\pi}{9}\right)\left(X - \cos\frac{8\pi}{9}\right)$

$$= X^3 - \left(\cos\frac{2\pi}{9} + \cos\frac{4\pi}{9} + \cos\frac{8\pi}{9}\right)X^2 +$$

$$+ \left(\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9} + \cos\frac{4\pi}{9}\cos\frac{8\pi}{9} + \cos\frac{8\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9}\right)X$$

$$- \cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9}\cos\frac{8\pi}{9} = X^3 - \frac{3}{4}X + \frac{1}{8}.$$

Từ đó $\left(1-\cos\frac{2\pi}{9}\right)\left(1-\cos\frac{4\pi}{9}\right)\left(1-\cos\frac{8\pi}{9}\right)=\frac{3}{8}$, tức là

$$2\sin^2\frac{\pi}{9}.2\sin^2\frac{2\pi}{9}.2\sin^2\frac{4\pi}{9}=\frac{3}{8},$$

suy ra

$$\sin\frac{\pi}{9}.\sin\frac{2\pi}{9}.\sin\frac{4\pi}{9}=\frac{\sqrt{3}}{8}.$$

Đẳng thức này lại cho ta $\sin\frac{5\pi}{9}\sin\frac{7\pi}{9}\sin\frac{8\pi}{9}=\frac{\sqrt{3}}{8}$.

f) Từ e) ta suy ra :

$$\sin\frac{\pi}{9}\sin\frac{2\pi}{9}\sin\frac{3\pi}{9}\sin\frac{4\pi}{9}\sin\frac{5\pi}{9}\sin\frac{6\pi}{9}\sin\frac{7\pi}{9}\sin\frac{8\pi}{9}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{8}.\frac{\sqrt{3}}{8}\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{9}{256}.$$

6.66. Ta có

$$\cos^2(\gamma-\alpha)+\sin^2(\gamma-\beta)=\frac{1+\cos2(\gamma-\alpha)}{2}+\frac{1-\cos2(\gamma-\beta)}{2}$$

$$=1+\frac{1}{2}[\cos2(\gamma-\alpha)-\cos2(\gamma-\beta)]=1+\sin(2\gamma-\alpha-\beta)\sin(\alpha-\beta).$$

Từ đó

$$\cos^2(\gamma-\alpha)+\sin^2(\gamma-\beta)-2\cos(\gamma-\alpha)\sin(\gamma-\beta)\sin(\alpha-\beta)$$

$$=1+\sin(2\gamma-\alpha-\beta)\sin(\alpha-\beta)-2\cos(\gamma-\alpha)\sin(\gamma-\beta)\sin(\alpha-\beta)$$

$$=1+\sin(\alpha-\beta)[\sin(2\gamma-\alpha-\beta)-2\cos(\gamma-\alpha)\sin(\gamma-\beta)]$$

$$=1+\sin(\alpha-\beta)[\sin(2\gamma-\alpha-\beta)-\sin(2\gamma-\alpha-\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$$

$$=1-\sin^2(\alpha-\beta)=\cos^2(\alpha-\beta).$$

6.67. $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$

$$=1-\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha.$$

Vậy biểu thức đã cho lấy giá trị bé nhất là $\frac{1}{2}$ khi $\sin^2 2\alpha=1$.

6.68. $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^3 - 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)$

$$= 1 - 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2\alpha.$$

Vậy biểu thức đã cho lấy giá trị nhỏ nhất là $\frac{1}{4}$ khi $\sin^2 2\alpha = 1$.

6.69. Phương án (B).

6.70. Phương án (C). (Để ý rằng $\cos\frac{4\pi}{5} = -\cos\frac{\pi}{5}$).

6.71. Phương án (C).

6.72. Phương án (B).

6.73. Phương án (A). (Để ý rằng $\sin^4\alpha \le \sin^2\alpha,\ \cos^4\alpha \le \cos^2\alpha$).

6.74. Phương án (B). (Để ý rằng $\sin^4\alpha \le \sin^2\alpha,\ \cos^7\alpha \le \cos^2\alpha$).

6.75. Phương án (B). (Để ý rằng $-\sin^2\alpha \le \sin^4\alpha,\ -\cos^2\alpha \le \cos^7\alpha$).

6.76. Phương án (C). (Để ý rằng $\sin^{12}\alpha \le \sin^2\alpha,\ \cos^{12}\alpha \le \cos^2\alpha$).

6.77. Phương án (A). (Để ý rằng $\frac{4}{\cos^6\alpha} - 3\tan^6\alpha = 4(1 + \tan^2\alpha)^3 - 3\tan^6\alpha$ chỉ chứa những luỹ thừa bậc chẵn của $\tan\alpha$ với hệ số không âm nên nó đạt giá trị nhỏ nhất khi $\tan\alpha = 0,\ |\cos\alpha| = 1$).

6.78. Phương án (C). (Để ý rằng các điểm của đường tròn lượng giác xác định bởi các số $\alpha,\ \alpha + \frac{\pi}{5},\ \alpha + \frac{2\pi}{5},\ ...,\ \alpha + \frac{9\pi}{5}$ là các đỉnh của một thập giác đều nội tiếp đường tròn đó hoặc để ý rằng

$\cos\alpha = -\cos\left(\alpha + \frac{5\pi}{5}\right),\ \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{5}\right) = -\cos\left(\alpha + \frac{6\pi}{5}\right), ...$).