B. ĐÁP SỐ – HƯỚNG DẪN – LỜI GIẢI

1. $A = (0\,;\,4)\,;\qquad B = (-4\sqrt{2}\,;\,4\sqrt{2}\,)$. Vậy $A \cap B = (0\,;\,4)$

$C = (-\infty\,;\,2-\sqrt{3}\,) \cup (2+\sqrt{3}\,;\,+\infty)\,;\; D = [\sqrt{6}\,;\,+\infty)$.

Vậy $C \cap D = (2 + \sqrt{3}\ ; +\infty)$.

Vậy $(A \cap B) \cup (C \cap D) = (0\ ; +\infty)$.

2. Chứng minh bằng phản chứng. Giả sử $\dfrac{ax + b}{cx + d} = r$ là số hữu tỉ. Khi đó

$ax + b = rd + rcx$. Vậy $x(rc - a) = b - rd$. Nếu $rc - a \neq 0$ thì $x = \dfrac{b - rd}{rc - a}$ là số hữu tỉ, trái với giả thiết. Vậy $rc = a$ do đó $rd = b$. Nhưng khi đó $ad - bc = rcd - rcd = 0$. Điều này trái với giả thiết.

3. Giá trị n để $P(n)$ sai khi tổng các chữ số của n chia hết cho 6 nhưng n không chia hết cho 6. Chỉ có duy nhất giá trị $n = 33$ thoả mãn điều này. Vậy câu trả lời là B).

4. a) $d = \dfrac{10^{-8}}{2}$.

b) $a \in [15{,}4\ ;\ 16]$

5. a) $f(x) = \begin{cases} -x - 4 & \text{khi } x < -2 \\ x & \text{khi } -2 \le x < 2 \\ -x + 4 & \text{khi } x \ge 2. \end{cases}$

b) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$. Với mọi x, ta có :

Cách 1. (sử dụng tính chất $|-a| = |a|$) :

$f(-x) = -(-x) + |(-x) + 2| - |(-x) - 2| = x + |x - 2| - |x + 2|$

$= -(-x + |x + 2| - |x - 2|) = -f(x)$.

Cách 2. (sử dụng kết quả câu a) :

– Nếu $x < -2$ thì $-x > 2$, nên $f(-x) = -(-x) + 4 = -(-x - 4) = -f(x)$.

– Nếu $-2 \le x < 2$ thì $-2 < -x \le 2$, nên $f(-x) = -x = -f(x)$.

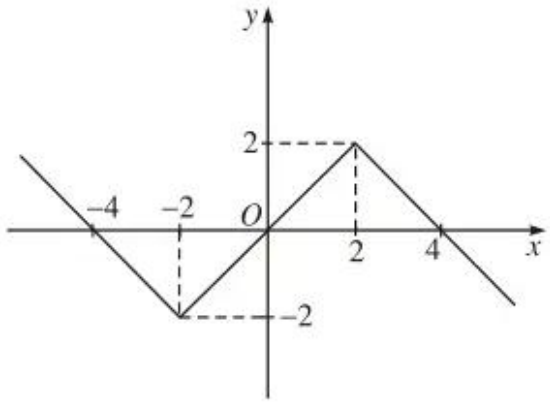
– Nếu $x \ge 2$ thì $-x \le -2$, nên $f(-x) = -(-x) - 4 = -(-x + 4) = -f(x)$.

Vậy trong mọi trường hợp ta đều có $f(-x) = -f(x)$, chứng tỏ $f(x)$ là hàm số lẻ.

c) Đồ thị (h. 1).

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$ -2	$\nearrow$ 2	$\searrow$ $-\infty$



Hình 1

d) $(-\infty ; -4)$ và $(0 ; 4)$.

6. a) Học sinh tự giải.

b) Hàm số cần tìm là $y = x + m$.

c) Hoành độ giao điểm của (d) và (P) là nghiệm của phương trình

$$x^2 - 4x + 1 = x + m,$$

hay $$x^2 - 5x + 1 - m = 0. \quad (1)$$

Phương trình (1) có biệt thức $\Delta = 25 - 4(1 - m) = 21 + 4m$.

Do đó, nếu $21 + 4m \geq 0$ thì nó có hai nghiệm

$$x_1 = \frac{5 - \sqrt{21 + 4m}}{2} \text{ và } x_2 = \frac{5 + \sqrt{21 + 4m}}{2}.$$

Đó cũng là hoành độ các giao điểm A và B của (d) và (P).

Toạ độ trung điểm của đoạn thẳng AB (khi $\Delta = 21 + 4m > 0$) là điểm có tọa độ $(x_0 ; y_0)$, trong đó :

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{5}{2} ;$$

$$y_0 = x_0 + m = \frac{5}{2} + m.$$

7. a) Ta có $m^2x - 3m^2 = 9(x + m) \Leftrightarrow (m^2 - 9)x = 3m(m + 3)$.

– Nếu $m \neq \pm 3$ thì phương trình có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{3m}{m - 3}$.

– Nếu $m = -3$ thì phương trình có dạng $0.x = 0$, nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$. Tập nghiệm $S = \mathbb{R}$.

– Nếu $m = 3$ thì phương trình có dạng $0.x = 36$ (vô lí). Tập nghiệm $S = \varnothing$.

b) Biến đổi phương trình về dạng $(m-1)x = 2(m-1)(m-2)$.

Phương trình có nghiệm duy nhất $x = 2(m-2)$ khi $m \neq 1$ và nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$ khi $m = 1$.

c) $|mx + x - 1| = |x + 3|$ (1)

$\Leftrightarrow mx + x - 1 = x + 3$ hoặc $mx + x - 1 = -x - 3$.

i) $mx + x - 1 = x + 3 \Leftrightarrow mx = 4$. (2)

– Khi $m = 0$, (2) trở thành $0.x = 4$ nên phương trình vô nghiệm

– Khi $m \neq 0$, (2) có một nghiệm $x = \dfrac{4}{m}$.

ii) $mx + x - 1 = -x - 3 \Leftrightarrow (m+2)x = -2$. (3)

– Khi $m = -2$; (3) trở thành $0.x = -2$ nên phương trình vô nghiệm.

– Khi $m \neq -2$; (3) có một nghiệm $x = \dfrac{-2}{m+2}$.

Kết luận. Với $m = 0$, phương trình có nghiệm $x = -1$;

Với $m = -2$, phương trình có nghiệm $x = -2$;

Với $m \neq 0$, $m \neq -2$, phương trình có nghiệm $x = \dfrac{4}{m}$ và $x = -\dfrac{2}{m+2}$

d) Với $m = 2$, tập nghiệm $S = \mathbb{R}$.

Với $m = -2$ hoặc $m = -1$, phương trình có nghiệm $x = 1$;

Với $m \neq 2$, $m \neq -2$, $m \neq -1$, phương trình có nghiệm $x = 1$ và $x = \dfrac{-m}{m+2}$.

e) Điều kiện của phương trình : $x \neq \pm$ a.

Ta đưa phương trình về dạng $4ax = a$. (1)

• Nếu $a = 0$ thì (1) có dạng $0.x = 0$, phương trình (1) nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Vậy phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}^*$.

• Nếu $a \neq 0$ thì (1) có nghiệm $x = \frac{1}{4}$. Xét điều kiện $x \neq \pm a$, ta có $\frac{1}{4} = \pm a$ $\Leftrightarrow a = \pm\frac{1}{4}$. Vậy khi $a \neq 0$, $a \neq \pm\frac{1}{4}$ thì $x = \frac{1}{4}$ là nghiệm của phương trình đã cho.

Kết luận : Với $a = 0$, tập nghiệm của phương trình là $S = \mathbb{R}^*$;

Với $a = \frac{1}{4}$ hoặc $a = -\frac{1}{4}$, tập nghiệm của phương trình là $S = \varnothing$;

Với $a \neq 0$, $a \neq \pm\frac{1}{4}$, tập nghiệm $S = \left\{\frac{1}{4}\right\}$.

8. a) Hệ có vô số nghiệm $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = \dfrac{x-7}{3}. \end{cases}$

b) Ta có $D = \sqrt{10} + 6\sqrt{3}$; $D_x = 2 + \sqrt{15}$; $D_y = 5 - 6\sqrt{2}$.

Hệ phương trình có nghiệm duy nhất

$$(x\,;\,y) = \left(\frac{2+\sqrt{15}}{\sqrt{10}+6\sqrt{3}}\,;\,\frac{5-6\sqrt{2}}{\sqrt{10}+6\sqrt{3}}\right).$$

9. a) Hệ có nghiệm duy nhất $(x\,;\,y) = \left(\frac{4a+3}{a+6}\,;\,\frac{-(2a+5)}{a+6}\right)$ nếu $a \neq 0$ và $a \neq -6$.

Hệ vô nghiệm nếu $a = -6$; Hệ có vô số nghiệm $\left(\frac{1}{2}\,;\,y\right)$ với y tuỳ ý nếu $a = 0$.

b) Khi $a \neq 0$ và $a \neq -6$, hệ có nghiệm duy nhất $(x\,;\,y) = \left(\frac{4a+3}{a+6}\,;\,\frac{-(2a+5)}{a+6}\right)$.

Do $x = \frac{4a+3}{a+6}$ nên $a = \frac{3-6x}{x-4}$. Do đó

$$y = \frac{-(2a+5)}{a+6} = \frac{-\left(2.\dfrac{3-6x}{x-4}+5\right)}{\dfrac{3-6x}{x-4}+6} = \frac{x+2}{3}.$$

Vậy khi hệ có nghiệm duy nhất $(x\,;\,y)$ thì $y = \dfrac{x+2}{3}$.

10. a) $x = -4$.

b) Ta có $\dfrac{x+1}{x-1} = 1 + \dfrac{2}{x-1}$, $\dfrac{x-2}{x+2} = 1 - \dfrac{4}{x+2}$,

$\dfrac{x-3}{x+3} = 1 - \dfrac{6}{x+3}$, $\dfrac{x+4}{x-4} = 1 + \dfrac{8}{x-4}$,

nên phương trình đã cho trở thành : $\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{2}{x+2} - \dfrac{3}{x+3} + \dfrac{4}{x-4} = 0$

hay $\dfrac{5x-8}{(x-1)(x-4)} = \dfrac{5x+12}{(x+2)(x+3)}$.

Từ đó phương trình đã cho tương đương với hệ

$$\begin{cases}(5x-8)(x+2)(x+3) = (5x+12)(x-1)(x-4)\\(x-1)(x+2)(x+3)(x-4) \neq 0\end{cases} \qquad (*)$$

Phương trình thứ nhất của hệ (*) được biến đổi thành phương trình

$x^2 + x - \dfrac{16}{5} = 0$ và có hai nghiệm $x_1 = \dfrac{1}{2}\left(-1 + \sqrt{\dfrac{69}{5}}\right)$ và $x_2 = \dfrac{1}{2}\left(-1 - \sqrt{\dfrac{69}{5}}\right)$.

Vì hai nghiệm này thoả mãn điều kiện thứ hai của hệ (*) nên chúng là nghiệm của phương trình đã cho.

11. a) Để phương trình có hai nghiệm phân biệt điều kiện cần và đủ là

$$\begin{cases}a+2 \neq 0\\\Delta' = (a+1)^2 - (a^2-4) > 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a \neq -2\\2a+5 > 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow a \in \left(-\frac{5}{2}\,;-2\right) \cup (-2;+\infty).$$

b) Xét các trường hợp sau :

• $a + 2 = 0 \Leftrightarrow a = -2$ khi đó phương trình trở thành

$$-2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2.$$

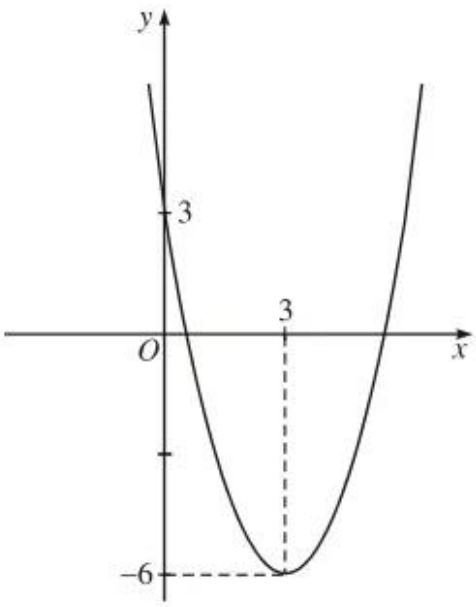
• $a + 2 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq -2$. Để phương trình có ít nhất một nghiệm, điều kiện cần và đủ là :

$$\Delta' = (a + 1)^2 - (a^2 - 4) \geq 0 \Leftrightarrow 2a + 5 \geq 0 \Leftrightarrow a \geq -\frac{5}{2}.$$

Vậy $a \in [-\frac{5}{2}; +\infty)$.

c) $a = -\frac{5}{2}$.

12. Xét hàm số $y = f(x) = x^2 - 6x + 3$. Đồ thị hàm số là một parabol quay bề lõm lên trên (h.2) và đỉnh parabol là điểm $P(3 ; -6)$



Hình 2

Do đó parabol có phương trình $y = x^2 - 6x + 3$ và đường thẳng có phương trình $y = -m$:

+ Có một điểm chung duy nhất khi $m = 6$;

+ Có hai điểm chung phân biệt khi $m < 6$;

+ Không có điểm chung khi $m > 6$.

Suy ra phương trình $x^2 - 6x + 3 + m = 0$

+ Có nghiệm kép khi $m = 6$;

+ Có hai nghiệm phân biệt khi $m < 6$;

+ Vô nghiệm khi $m > 6$.

13. a) $x_2x_1^2 + x_1x_2^2 = x_1x_2(x_1 + x_2) = -\frac{bc}{a^2}$

b) Ta có $|x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{a^2}}$.

Suy ra :

Nếu $x_1 - x_2 \geq 0$ thì $x_1 - x_2 = \sqrt{\dfrac{b^2 - 4ac}{a^2}}$.

Nếu $x_1 - x_2 \leq 0$ thì $x_1 - x_2 = -\sqrt{\dfrac{b^2 - 4ac}{a^2}}$.

c) $x_1^2 - x_2^2 = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2)$. Sử dụng kết quả câu b) :

Nếu $x_1 - x_2 \geq 0$ thì $x_1^2 - x_2^2 = -\dfrac{b}{a}\sqrt{\dfrac{b^2 - 4ac}{a^2}}$.

Nếu $x_1 - x_2 \leq 0$ thì $x_1^2 - x_2^2 = \dfrac{b}{a}\sqrt{\dfrac{b^2 - 4ac}{a^2}}$.

14. a) (1 ; 2) và $\left(-\dfrac{23}{17} ; \dfrac{44}{17}\right)$.

b) Nghiệm của hệ là : $\left(\dfrac{\sqrt{7}}{2} ; 0\right)$, $\left(-\dfrac{\sqrt{7}}{2} ; 0\right)$, (–1 ; –3) và $\left(\dfrac{3}{2} ; 2\right)$.

Gợi ý. Từ phương trình thứ hai suy ra $y = 0$ hoặc $y = 2x - 1$.

c) Nghiệm của hệ là (–3 ; 4) và (4 ; –3).

15. a) $\sqrt{2003} + \sqrt{2004} > \sqrt{2000} + \sqrt{2007}$;

b) $\sqrt{n+3} + \sqrt{n+4} > \sqrt{n} + \sqrt{n+7}$ $(n \geq 0)$;

c) Nhận thấy $\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2 = a + b + 2\sqrt{ab}$

$\left(\sqrt{a-c} + \sqrt{b+c}\right)^2 = a + b + 2\sqrt{(a-c)(b+c)}$;

Do $(a - c)(b + c) = ab + c(a - b - c) < ab$ (vì $b > a > c > 0$),

nên $2\sqrt{(a-c)(b+c)} < 2\sqrt{ab}$. Vì vậy $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a-c} + \sqrt{b+c}$.

16. a) $\dfrac{a^2+3}{\sqrt{a^2+2}} > 2 \Leftrightarrow a^2+2+1 > 2\sqrt{a^2+2} \Leftrightarrow (\sqrt{a^2+2}-1)^2 > 0.$

Do $a^2+2 \geq 2$ với mọi a nên $\sqrt{a^2+2}-1 > 0$. Vì vậy bất đẳng thức cuối cùng đúng. Suy ra điều phải chứng minh.

b) $\dfrac{a^3}{a^6+1} \leq \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 2a^3 \leq a^6+1 \Leftrightarrow (a^3-1)^2 \geq 0$ (đúng).

(Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = 1$).

17. a) $|a|+|b|+|c| = (|a|+|b|)+|c| \geq |a+b|+|c| \geq |a+b+c|$.

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} ab \geq 0 \\ (a+b)c \geq 0, \end{cases}$ tức $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$ hoặc $a \leq 0, b \leq 0, c \leq 0$.

b) $f(x) = |x+2|+|x+1|+|2x-5| = |x+2|+|x+1|+|5-2x|$

$\geq |x+2+x+1+5-2x| = 8.$

Đẳng thức xảy ra, chẳng hạn tại $x = 1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ là 8.

18. a) Với $a > 0, b > 0, c > 0$ ta có

$$ac + \frac{b}{c} \geq 2\sqrt{ac.\frac{b}{c}} = 2\sqrt{ab}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $ac = \dfrac{b}{c}$ hay $b = ac^2$.

b) $\dfrac{a}{\sqrt{b}} + \dfrac{b}{\sqrt{a}} \geq 2\sqrt{\dfrac{ab}{\sqrt{ab}}} = 2\sqrt[4]{ab}.$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b$.

19. b) $x + \dfrac{1}{x-2} = x-2+\dfrac{1}{x-2}+2 \geq 2\sqrt{(x-2)\dfrac{1}{x-2}}+2 = 4$ (vì $x-2>0$).

Đẳng thức xảy ra khi $x = 3$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $g(x)$ là 4.

20. a) *Cách 1*. Từ đẳng thức

$(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) =$

$= (ax + by + cz)^2 + (ay - bx)^2 + (bz - cy)^2 + (az - cx)^2$

dễ dàng suy ra

$$(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \geq (ax + by + cz)^2 .$$

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} ay = bx \\ bz = cy \\ az = cx \end{cases}$ tức là $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$.

Cách 2

$(ax + by + cz)^2 = a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 + 2abxy + 2acxz + 2bcyz$

$\leq a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 + a^2y^2 + b^2x^2 + a^2z^2 + c^2x^2 + b^2z^2 + c^2y^2$

$= (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2).$

b) $(x + 2y + 3z)^2 = (1.x + \sqrt{2}.\sqrt{2y} + \sqrt{3}.\sqrt{3z})^2$

$$\leq (x^2 + 2y^2 + 3z^2)(1 + 2 + 3) = 6.6 = 36.$$

Vì vậy $|x + 2y + 3z| \leq 6$.

21. a) $\begin{cases} x + 1 \leq 2x - 3 \\ \frac{5 - 3x}{4} > x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ x \leq -1. \end{cases}$

Hệ vô nghiệm.

b) $0 < x < 3$.

22. Ta có (I) $\begin{cases} 1 + mx > 0 \\ x - 2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} mx > -1 & (1) \\ x \leq 2 & (2) \end{cases}$

Gọi tập nghiệm của (1) và (2) lần lượt là S_1 và S_2. Khi đó $S_2 = (-\infty ; 2]$.

– Nếu $m = 0$ thì $S_1 = \varnothing$ nên hệ (I) vô nghiệm : $S = \varnothing$.

– Nếu $m > 0$ thì $S_1 = \left(-\frac{1}{m}; +\infty\right)$ và $-\frac{1}{m} < 2$, nên tập nghiệm của hệ (I) là $S = \left(-\frac{1}{m}; 2\right)$.

– Nếu $m < 0$ thì $S_1 = \left(-\infty; -\frac{1}{m}\right)$, ta cần phải so sánh $-\frac{1}{m}$ với 2.

+ Nếu $m \le -\frac{1}{2}$ thì $-\frac{1}{m} \le 2$, nên $S = \left(-\infty; -\frac{1}{m}\right)$.

+ Nếu $m > -\frac{1}{2}$ thì $-\frac{1}{m} > 2$, nên $S = (-\infty; 2]$.

23. a) Tập nghiệm $S = \left(\frac{1}{2}; 1\right) \cup (2; +\infty)$.

b) $\frac{x+1}{2x+1} \ge \frac{x-1}{3x+1} \Leftrightarrow \frac{(x+1)(3x+1) - (x-1)(2x+1)}{(2x+1)(3x+1)} \ge 0$

$\Leftrightarrow \frac{x^2 + 5x + 2}{(2x+1)(3x+1)} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(2x+1)(3x+1)} \ge 0$.

với $x_1 = \frac{-5 - \sqrt{17}}{2}$ và $x_2 \frac{-5 + \sqrt{17}}{2}$. Ta lập bảng sau :

x	$-\infty$		$\frac{-5-\sqrt{17}}{2}$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{-5+\sqrt{17}}{2}$		$-\frac{1}{3}$		$+\infty$
$x - x_1$	–		0	+		+		+		+	
$x - x_2$	–			–		–	0	+		+	
$2x + 1$	–			–	0	+		+		+	
$3x + 1$	–			–		–		–	0	+	
Vế trái	+		0	–		+	0	–		+	

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là

$$S = \left(-\infty, \frac{-5 - \sqrt{17}}{2}\right] \cup \left(-\frac{1}{2}; \frac{-5 + \sqrt{17}}{2}\right] \cup \left(-\frac{1}{3}; +\infty\right).$$

24. a) Lập bảng phá dấu giá trị tuyệt đối như sau :

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$\lvert x+1\rvert$	$-x-1$			$-x-1$	0	$x+1$	
$3\lvert x+2\rvert$	$-3x-6$	0		$3x+6$		$3x+6$	
Vế trái	$-4x-7$			$2x+5$		$4x+7$	

• Với $x < -2$, bất phương trình đã cho trở thành $-4x - 7 > x + 7 \Leftrightarrow x < -2{,}8$. Do $-2,8 < -2$ nên trong trường hợp này, bất phương trình có nghiệm $x < -2{,}8$.

• Với $-2 \le x < -1$, ta có $2x + 5 > x + 7 \Leftrightarrow x > 2$. Kết hợp với điều kiện đang xét thì không có giá trị x nào thoả mãn.

• Với $x \ge -1$ ta có $4x + 7 > x + 7 \Leftrightarrow x > 0$. Do $-1 \le 0$ nên trong trường hợp này, nghiệm của bất phương trình là $x > 0$.

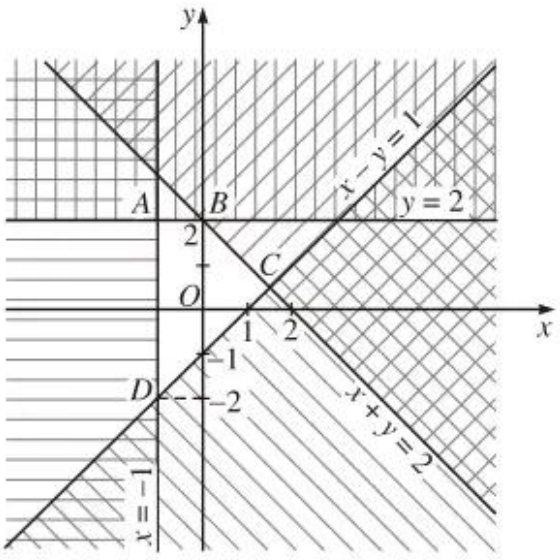
Vậy tập nghiệm $S = (-\infty\,;\,-2{,}8) \cup (0\,;\,+\infty)$.

b) $\left|\dfrac{-5}{x+2}\right| \le \left|\dfrac{10}{x-1}\right| \Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{x+2}\right)^2 \le \left(\dfrac{2}{x-1}\right)^2 \Leftrightarrow \dfrac{3(x+1)(x+5)}{(x-1)^2(x+2)^2} \ge 0.$

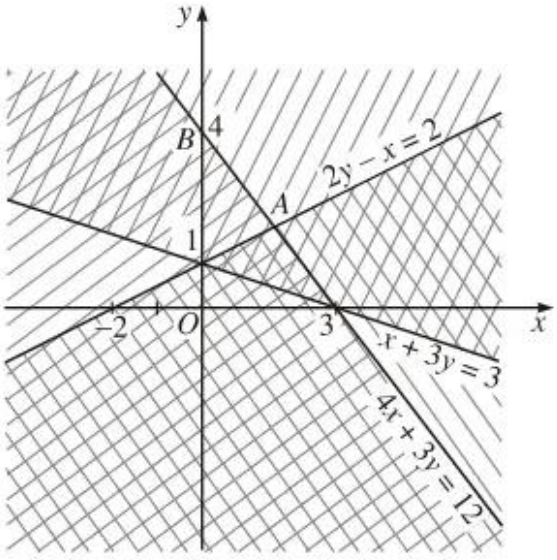
Lập bảng xét dấu ta tìm được tập nghiệm là

$$S = (-\infty\,;\,-5] \cup [-1\,;\,1) \cup (1\,;\,+\infty).$$

25.



Hình 3



Hình 4

a) Tập nghiệm của bất phương trình là miền tứ giác ABCD (kể cả biên) (h.3).

b) Hệ vô nghiệm (h.4).

26. a) Ta có $\Delta = (m-1)^2 - 12(m^2+1) = -11m^2 - 2m - 11 = -(11m^2 + 2m + 11)$ và $a = m^2 + 1 > 0$.

Tam thức luôn dương khi và chỉ khi $\Delta = -(11m^2 + 2m + 11) < 0$

$$\Leftrightarrow 11m^2 + 2m + 11 > 0 \Leftrightarrow m \in \mathbb{R}.$$

b) Nếu $m = \sqrt{2}$ dễ thấy biểu thức luôn dương với mọi x.

Nếu $m \neq \sqrt{2}$ thì biểu thức là tam thức có $a = \sqrt{2} - m \neq 0$ và biệt thức

$\Delta = (m - \sqrt{2})^2 - 4(\sqrt{2} - m)(2m + 3\sqrt{2}) = 9m^2 + 2\sqrt{2}\,m - 22.$

Tam thức luôn dương khi và chỉ khi $\begin{cases} a = \sqrt{2} - m > 0 \\ \Delta = 9m^2 + 2\sqrt{2}m - 22 < 0. \end{cases}$ (*)

Tam thức $f(m) = 9m^2 + 2\sqrt{2}\,m - 22$ có hai nghiệm $m_1 = \dfrac{-11\sqrt{2}}{9}$,

$m_2 = \sqrt{2}$.

Do đó $f(m) < 0$ khi và chỉ khi $\dfrac{-11\sqrt{2}}{9} < m < \sqrt{2}$.

Kết hợp với (*) suy ra $\dfrac{-11\sqrt{2}}{9} < m < \sqrt{2}$.

27. a) Tam thức luôn luôn âm khi và chỉ khi $m > \dfrac{9\sqrt{2}}{4}$.

b) Với $m = -\dfrac{1}{5}$, khi đó biểu thức có giá trị là $\dfrac{11}{5} > 0$, do đó $m = -\dfrac{1}{5}$ không thoả mãn.

Với $m \neq -\dfrac{1}{5}$, khi đó biểu thức đã cho là một tam thức bậc hai.

Tam thức luôn âm khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a = 5m + 1 < 0 \\ \Delta = (5m + 1)^2 - 4(5m + 1)(4m + 3) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad m < -1.$$

28. a) Bất phương trình tương đương với $\dfrac{x}{x(x + 4)} \geq 0$, suy ra tập nghiệm là $(-4 ; 0) \cup (0 ; +\infty)$.

b) Bất phương trình được biến đổi tương đương với

$$\frac{x^4 + 16}{2x^2(x - 2)(x + 2)^2} > 0.$$

Suy ra tập nghiệm là $S = (2 ; +\infty)$.

29. a) $6 < x < 9$.

b) $1 \leq x \leq 3$ và $x = -1$.

30. a) Bất phương trình đã cho có hệ số $a = 3 > 0$, để bất phương trình vô nghiệm, điều kiện cần và đủ là : $\Delta = m^2 - 12(m + 2) \leq 0$

$$\Leftrightarrow m^2 - 12m - 24 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 6 - 2\sqrt{15} \leq m \leq 6 + 2\sqrt{15}.$$

b) Với $m = 3$, khi đó bất phương trình trở thành $-2x - 1 > 0$ và bất phương trình có nghiệm là $x < -\dfrac{1}{2}$. Suy ra $m = 3$ không thoả mãn.

Với $m \neq 3$. Để bất phương trình vô nghiệm điều kiện cần và đủ là :

$$\begin{cases} 3 - m < 0 \\ \Delta' = (2m - 5)^2 - (3 - m)(5 - 2m) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 3 \\ 2m^2 - 9m + 10 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 3 \\ 2 < m < \dfrac{5}{2}. \end{cases}$$

Suy ra không tồn tại m để bất phương trình đã cho vô nghiệm.

31. Đặt $y = x^2$, $y \geq 0$. Khi đó vế trái của phương trình đã cho trở thành $f(y) = y^2 - 2my + m^2 - 1$.

Điều kiện của bài toán được thoả mãn nếu phương trình $f(y) = 0$ vô nghiệm hoặc chỉ có hai nghiệm âm.

Cách 1. Do $\Delta' = 1$ nên phương trình $f(y) = 0$ có hai nghiệm $y_1 = m - 1$ và $y_2 = m + 1$. Ta phải có

$$\begin{cases} m - 1 < 0 \\ m + 1 < 0, \end{cases}$$

tức là $m < -1$.

Vậy phương trình trùng phương đã cho vô nghiệm khi $m < -1$.

Cách 2. Do $\Delta' = 1$ nên phương trình $f(y) = 0$ có hai nghiệm phân biệt. Hai nghiệm đó âm khi và chỉ khi

$$\begin{cases} -\dfrac{b}{a} = 2m < 0 \\ \dfrac{c}{a} = m^2 - 1 > 0, \end{cases}$$

tức là $m < -1$.

Ta có kết luận như trên.

32. $-3 < m < 1$. *Hướng dẫn.* Đặt $y = x + 1$ bài toán trở thành :

Tìm m sao cho phương trình

$$(m - 1)(y - 1)^2 - (m - 5)(y - 1) + m - 1 = 0$$

có hai nghiệm dương phân biệt, tức là phương trình

$$(m - 1)y^2 - (3m - 7)y + 3m - 7 = 0$$

có hai nghiệm dương phân biệt.

33. a) $x = \pm 3$.

b) $x \in \left\{\pm 3 ; \pm \dfrac{1}{2}\right\}$.

34. a) $S = \left[1 ; \dfrac{4 - \sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\dfrac{4 + \sqrt{2}}{2} ; 3\right]$.

Gợi ý. Bất phương trình tương đương với hệ :

$$\begin{cases} -x^2 + 4x - 3 < (x-2)^2 \\ x - 2 > 0 \\ -x^2 + 4x - 3 \geq 0. \end{cases}$$

b) $S = \left[-\frac{5}{2}\,;\,2\right)$.

Gợi ý. Bất phương trình tương đương với :

$$\text{(I)} \begin{cases} 2x + 5 \geq 0 \\ x + 1 < 0 \end{cases} \text{ hoặc (II)} \begin{cases} 2x + 5 > (x+1)^2 \\ x + 1 \geq 0. \end{cases}$$

35. a) $S = \left[-\sqrt{\frac{17}{2}}\,;-2\right] \cup \left[2\,;\sqrt{\frac{17}{2}}\right]$

Gợi ý. Đặt $t = \sqrt{2x^2 - 8} \geq 0$.

b) $S = (-\infty\,;-1) \cup (4\,;+\infty)$.

Gợi ý. Đặt $t = \sqrt{x^2 - 3x + 5} \geq 0$.

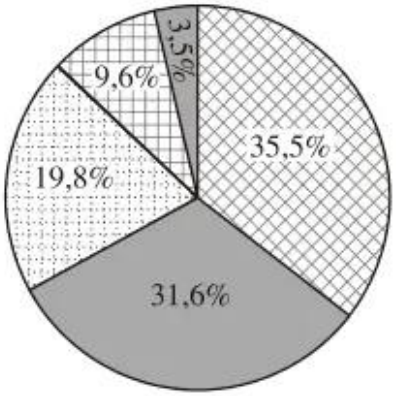
36. a) Dấu hiệu là tuổi các bà mẹ ở nước Mĩ sinh con lần đầu. Đơn vị điều tra là các bà mẹ ở nước Mĩ sinh con lần đầu.

b) Tuổi trung bình là 22,89.

c) Bảng phân bố tần suất

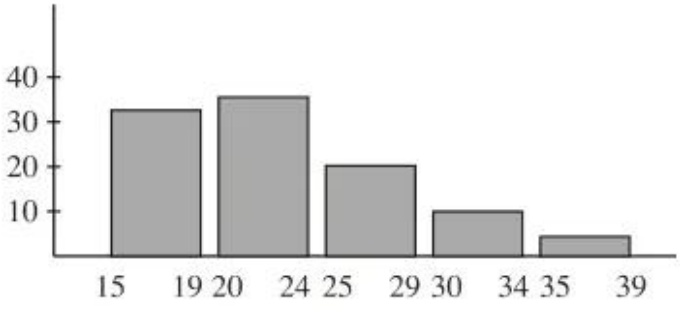
Khoảng	Tần suất(%)
[15 ; 19]	31,6
[20 ; 24]	35,5
[25 ; 29]	19,8
[30 ; 34]	9,6
[35 ; 39]	3,5

d) Biểu đồ hình quạt (h.5)



Hình 5

e) Biểu đồ tần suất hình cột (h. 6)



Hình 6

37. Gọi số bé nhất là a. Số lớn nhất là $a + 18 > 8$. Vậy có thể xảy ra hai trường hợp sau

Trường hợp 1. Mẫu là a ; b ; 8 ; 8 ; $a + 18$ (sắp xếp theo thứ tự tăng dần).

Khi đó tổng các số liệu là $2a + b + 34 = 12 \times 5 = 60$, suy ra $2a + b = 26$. Vì $a \leq 8$; $b \leq 8$ nên $2a + b \leq 24$. Vậy trường hợp này không xảy ra.

Trường hợp 2. Mẫu là a ; 8 ; 8 ; b ; $a + 18$ (sắp xếp theo thứ tự tăng dần).

Khi đó tổng các số liệu là $2a + b + 34 = 12 \times 5 = 60$. Suy ra $2a + b = 26$ hay $b = 26 - 2a = 2(13 - a)$.

Vậy b chẵn, tức là b có dạng $b = 2c$. Suy ra $c = 13 - a$. Vì $b \leq a + 18$ và $a = 13 - c$ nên $2c \leq 13 - c + 18 = 31 - c$. Vậy $3c \leq 31$ hay $c \leq 10$. Vì $a \leq 8$ nên $c \geq 13 - 8 = 5$. Khi đó $b \geq 10 > 8$.

Tóm lại $5 \leq c \leq 10$. Như vậy ta có 6 mẫu thoả mãn điều kiện đã nêu là

$\{13 - c ; 8 ; 8 ; 2c ; 31 - c\}$ trong đó $c \in \{5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10\}$. Cụ thể là các mẫu

$\{8 ; 8 ; 8 ; 10 ; 26\}$, $\{5 ; 8 ; 8 ; 16 ; 23\}$,

$\{7 ; 8 ; 8 ; 12 ; 25\}$, $\{4 ; 8 ; 8 ; 18 ; 22\}$,

$\{6 ; 8 ; 8 ; 14 ; 24\}$, $\{3 ; 8 ; 8 ; 20 ; 21\}$.

38. $3\sin(\alpha-\beta)=\sin(\beta-\alpha+\alpha)=\sin\alpha\cos(\alpha-\beta)-\sin(\alpha-\beta)\cos\alpha$, từ đó ta có

$(3+\cos\alpha)\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos(\alpha-\beta)$ (*), vậy $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\sin\alpha}{3+\cos\alpha}$.

(*Chú ý*. $\cos(\alpha-\beta)\neq 0$ vì nếu $\cos(\alpha-\beta)=0$ thì từ (*) ta suy ra $\sin(\alpha-\beta)=0$, vô lí).

39. Ta có :

$$\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=\cos\gamma[\cos(\pi-(\alpha+\beta))+2\cos\alpha\cos\beta]$$

$$=\cos\gamma[-\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta+2\cos\alpha\cos\beta]=\cos\gamma\cos(\alpha-\beta)$$

$$=-\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=\sin^2\alpha\sin^2\beta-\cos^2\alpha\cos^2\beta$$

$$=\sin^2\alpha\sin^2\beta-(1-\sin^2\alpha)(1-\sin^2\beta)=-1+\sin^2\alpha+\sin^2\beta=1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta.$$

40. Đặt $t=\tan\dfrac{\alpha}{2}$, thì $4\cdot\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}-\dfrac{2}{\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}+3=4t^2-2(1+t^2)+3=2t^2+1$,

nên giá trị nhỏ nhất đạt được là 1 khi $t=0$.

41. a) $\alpha\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$; $\alpha\neq\dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{\pi}{2}$; $\alpha\neq\dfrac{\pi}{8}+k\dfrac{\pi}{4}$ với $k\in\mathbb{Z}$.

Hướng dẫn. Có thể viết mẫu thành

$$(\cos\alpha+\cos7\alpha)+(\cos3\alpha+\cos5\alpha)=2\cos4\alpha(\cos3\alpha+\cos\alpha)$$

$$=4\cos\alpha\cos2\alpha\cos4\alpha.$$

b) *Hướng dẫn*. Viết tử thức thành $2\sin4\alpha(\cos3\alpha+\cos\alpha)$.

42. Dùng công thức hạ bậc và công thức biến đổi tổng thành tích.