ÔN TẬP CUỐI NĂM

A. ĐỀ BÀI

1. Có hay không một khối đa diện gồm một số lẻ mặt mà mỗi mặt có một số lẻ cạnh ?

2. Cho hai đường thẳng chéo nhau a, b và hai đường thẳng chéo nhau a', b'. Biết rằng :

i) Khoảng cách giữa a và b bằng khoảng cách giữa a' và b'.

ii) Góc hợp bởi a và b bằng góc hợp bởi a' và b'.

Chứng minh rằng có phép dời hình biến a thành a', biến b thành b'.

3. Xét hình lăng trụ tam giác đều với chiều cao h, nội tiếp một mặt cầu bán kính R ($h < 2R$) (tức sáu đỉnh của hình lăng trụ nằm trên mặt cầu đó).

a) Tính cạnh đáy của hình lăng trụ.

b) Tính thể tích của khối lăng trụ.

c) Tính h theo R để mỗi mặt bên của hình lăng trụ là hình vuông.

4. Cho tam giác cân ABC, $AB = AC$. Một điểm M thay đổi trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại A (M không trùng với điểm A).

a) Tìm quỹ tích trọng tâm G và trực tâm H của tam giác MBC.

b) Gọi O là trực tâm của tam giác ABC, hãy xác định vị trí của điểm M để thể tích khối tứ diện $OHBC$ đạt giá trị lớn nhất.

5. Cho khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có chiều cao bằng h và hai đường thẳng AB' và BC' vuông góc với nhau.

a) Gọi M' là trung điểm của $A'B'$. Chứng minh rằng $AB' \perp BM'$.

b) Tính độ dài đoạn thẳng $A'B'$ theo h.

c) Tính thể tích khối lăng trụ đã cho.

6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, cạnh $SA = a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Một mặt phẳng đi qua CD cắt các cạnh SA, SB lần lượt tại M, N. Đặt $AM = x$.

a) Tứ giác $MNCD$ là hình gì ? Tính diện tích tứ giác $MNCD$ theo a, x.

b) Xác định giá trị của x để thể tích của hình chóp $S.MNCD$ bằng $\frac{2}{9}$ lần thể tích hình chóp $S.ABCD$.

7. Trong không gian cho các điểm A, B, C lần lượt thuộc các tia Ox, Oy, Oz vuông góc với nhau từng đôi một sao cho $OA = a$ $(a > 0)$, $OB = a\sqrt{2}$, $OC = c$ $(c > 0)$. Gọi D là đỉnh đối diện với O của hình chữ nhật $AOBD$ và M là trung điểm của đoạn BC. (P) là mặt phẳng đi qua AM và cắt mặt phẳng (OCD) theo một đường thẳng vuông góc với đường thẳng AM.

a) Gọi E là giao điểm của (P) với đường thẳng OC, tính độ dài đoạn thẳng OE.

b) Tính tỉ số thể tích của hai khối đa diện được tạo thành khi cắt khối chóp $C.AOBD$ bởi mặt phẳng (P).

c) Tính khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (P).

8. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân, $AB = AC = a$; mp$(SBC) \perp$ mp(ABC) và $SA = SB = a$;

1. Chứng minh rằng SBC là tam giác vuông.

2. Tính thể tích của khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ biết $SC = \frac{3a}{2}$.

9. Cho hình chóp $S.ABC$. Biết rằng các điểm A, B, C và các trung điểm A', B', C' của các cạnh SA, SB, SC cùng thuộc một mặt cầu bán kính R.

1. Chứng minh rằng tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ thuộc đường cao SH của hình chóp.

2. Cho góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng 60°, chứng minh rằng H là tâm của mặt cầu đi qua sáu điểm A, B, C, A', B', C'.

Khi đó, hãy tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

10. Cho tam giác ABC vuông ở A, $AB = c, AC = b$. Trên đường thẳng d vuông góc với mp(ABC) tại A, lấy điểm S bất kì, $S \neq A$. Gọi B_1, C_1 lần lượt là hình chiếu của A trên SB, SC.

1. Xác định tâm của mặt cầu đi qua các điểm A, B, C, B_1, C_1 và tính bán kính của mặt cầu đó.

2. Cho $SA = h$, tính tỉ số thể tích của hai tứ diện SAB_1C_1 và $SABC$.

11. Cho hình trụ có bán kính đáy bằng R, trục là OO'. Gọi MN là dây cung thay đổi của đường tròn tâm O sao cho $MN = R$. Kí hiệu N' là hình chiếu

của N trên mặt phẳng chứa đường tròn tâm O'. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của OO' và MN'.

1. Chứng minh rằng IJ là đường vuông góc chung của OO' và MN', và độ dài IJ không đổi.

2. Chứng minh rằng mp(MNN') luôn tiếp xúc với một mặt trụ T cố định (tức giao của chúng là một đường sinh của T).

12. Cho hình nón tròn xoay đỉnh S, đáy là đường tròn tâm O. Gọi A là điểm cố định và M là điểm thay đổi cùng thuộc đường tròn đáy hình nón. Đặt $\widehat{AOM} = \alpha$. Gọi β là góc giữa mp(SAM) và mặt phẳng chứa đáy hình nón ; khoảng cách từ O đến mp(SAM) bằng a.

1. Tính thể tích khối nón đã cho theo a, α, β.

2. Xác định điểm M để tam giác SAM có diện tích lớn nhất.

3. Chứng minh rằng hình chiếu H của điểm O trên mp(SAM) thuộc một đường tròn cố định.

13. Trong không gian $Oxyz$ cho bốn điểm $A(1 ; 0 ; 2)$, $B(1 ; 1 ; 0)$, $C(0 ; 0 ; 1)$ và $D(1 ; 1 ; 1)$.

1. Chứng minh A, B, C, D là bốn đỉnh của một khối tứ diện.

2. Tính thể tích khối tứ diện $ABCD$.

3. Viết phương trình đường cao của tứ diện $ABCD$ hạ từ đỉnh D.

4. Viết phương trình mặt cầu (S) ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

5. Viết phương trình mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu (S) tại đỉnh A.

6. Xác định toạ độ của điểm A' đối xứng với điểm A qua mp(BCD).

7. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và BD.

14. Trong không gian $Oxyz$ cho mp(P) : $x + 2y - z + 5 = 0$ và đường thẳng

$$d : \frac{x+1}{2} = y + 1 = z - 3.$$

1. Tìm toạ độ giao điểm A của d và (P).

2. Tính góc α giữa đường thẳng d và mp(P).

3. Viết phương trình mp(Q) chứa đường thẳng d và vuông góc với mp(P).

4. Viết phương trình hình chiếu vuông góc d' của d trên mp(P).

5. Viết phương trình đường thẳng nằm trong mp(P) chứa A và vuông góc với đường thẳng d.

6. Viết phương trình mặt cầu có tâm I nằm trên đường thẳng d, tiếp xúc với mp(P) và có bán kính $R = \sqrt{6}$.

7. Viết phương trình mp(R) chứa đường thẳng d và tạo với mp(P) một góc nhỏ nhất.

15. Trong không gian $Oxyz$ cho hai điểm $A(3 ; 3 ; 1)$, $B(0 ; 2 ; 1)$ và mặt phẳng

$$(P) : x + y + z - 7 = 0.$$

1. Viết phương trình đường thẳng AB.

2. Viết phương trình hình chiếu vuông góc của AB trên mp(P).

3. Viết phương trình đường thẳng d nằm trong mp(P) mà mọi điểm của d cách đều hai điểm A, B.

4. Viết phương trình đường vuông góc chung của AB và d.

5. Tìm điểm K thuộc đường thẳng AB ($K \neq B$) sao cho

$$d\left(K,(P)\right) = d\left(B,(P)\right).$$

6. Tìm điểm C trên đường thẳng d sao cho diện tích tam giác ABC nhỏ nhất.

16. Trong không gian $Oxyz$ cho hai đường thẳng

$$d_1 : x = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+4}{2} \text{ và } d_2 : \frac{x+8}{2} = y - 6 = \frac{z-10}{-1}.$$

1. Chứng minh hai đường thẳng d_1 và d_2 chéo nhau.

2. Viết phương trình mặt phẳng chứa d_2 và song song với d_1.

3. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng d_1 và d_2.

4. Viết phương trình đường thẳng d song song với trục Ox, cắt d_1 tại M, cắt d_2 tại N. Tìm toạ độ các điểm M, N.

5. Gọi AB là đường vuông góc chung của d_1 và d_2 ($A \in d_1$, $B \in d_2$). Hãy viết phương trình mặt cầu đường kính AB.

17. Trong không gian $Oxyz$ cho tứ diện $OABC$ với $A(a ; 0 ; 0)$, $B(0 ; b ; 0)$, $C(0 ; 0 ; c)$, $a, b, c > 0$.

1. Chứng minh tam giác ABC có ba góc đều nhọn.

2. Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$.

3. Kẻ OH vuông góc với mp(ABC), $H \in$ mp(ABC). Tìm toạ độ điểm H theo a, b, c.

4. Xác định toạ độ điểm O' đối xứng với điểm O qua mp(ABC).

5. Kí hiệu $S = S_{ABC}$, $S_1 = S_{OAB}$, $S_2 = S_{OBC}$, $S_3 = S_{OCA}$.

Chứng minh $S^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$.

6. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm AB, BC, CA. Chứng minh rằng :

$$\text{mp}(OMN) \perp \text{mp}(OMP) \Leftrightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{c^2}.$$

7. Chứng minh rằng với mọi điểm P trên mp(ABC), ta đều có :

$$\frac{AP^2}{AO^2} + \frac{BP^2}{BO^2} + \frac{CP^2}{CO^2} = \frac{HP^2}{HO^2} + 2.$$