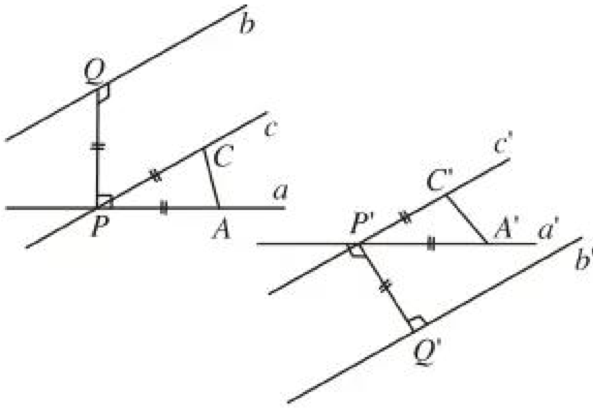
B - LỜI GIẢI - HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

1. Giả sử tồn tại một khối đa diện $\mathscr{H}$ gồm k mặt và c cạnh thoả mãn yêu cầu của bài toán. Gọi c_1 là số cạnh của mặt thứ nhất, c_2 là số cạnh của mặt thứ hai, ..., c_k là số cạnh của mặt thứ k. Theo giả thiết thì $k, c_1, c_2, ..., c_k$ là những số lẻ. Vì mỗi cạnh thuộc đúng hai mặt nên ta có :

$$c_1 + c_2 + ... + c_k = 2c.$$

Điều này là vô lí vì vế trái của đẳng thức trên là một số lẻ, còn vế phải là một số chẵn. Vậy không có khối đa diện nào thoả mãn yêu cầu của bài toán.

2. (h.106) Gọi PQ là đường vuông góc chung của a và b, trong đó $P \in a$, $Q \in b$. Gọi $P'Q'$ là đường vuông góc chung của a' và b', trong đó $P' \in a'$, $Q' \in b'$. Theo giả thiết $PQ = P'Q'$.



Hình 106

Gọi c là đường thẳng đi qua P và song song với b, c' là đường thẳng đi qua P' và song song với b'. Theo giả thiết, góc giữa a và c bằng góc giữa a' và c'.

Lấy lần lượt trên a và c các điểm A, C sao cho $PA = PC = PQ$, rồi lấy lần lượt trên a' và c' các điểm A', C' sao cho $P'A' = P'C' = P'Q'$ và góc $\widehat{APC}$ bằng góc $\widehat{A'P'C'}$. Từ đó, dễ thấy hai tứ diện $PQAC$ và $P'Q'A'C'$ có các cạnh tương ứng bằng nhau.

Vậy có một phép dời hình f biến tứ diện $PQAC$ thành tứ diện $P'Q'A'C'$. Khi đó, f biến hai đường thẳng a, b lần lượt thành hai đường thẳng a' và b'.

3. (h.107).

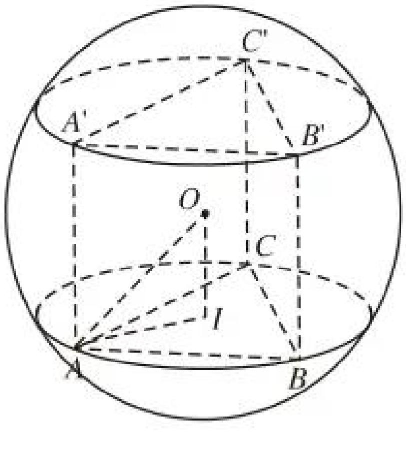
a) Gọi O là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ, I là hình chiếu của O trên mặt phẳng (ABC). Khi đó ta có : $OA = OB = OC = R, OI = \frac{1}{2}h$. Tam giác OAI vuông tại I nên $AI^2 = OA^2 - OI^2 = R^2 - \frac{h^2}{4}$.

IA là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC nên

$$AB = IA\sqrt{3} = \sqrt{3\left(R^2 - \frac{h^2}{4}\right)}.$$

Vậy cạnh đáy của hình lăng trụ bằng

$$\frac{1}{2}\sqrt{3(4R^2 - h^2)}.$$



Hình 107

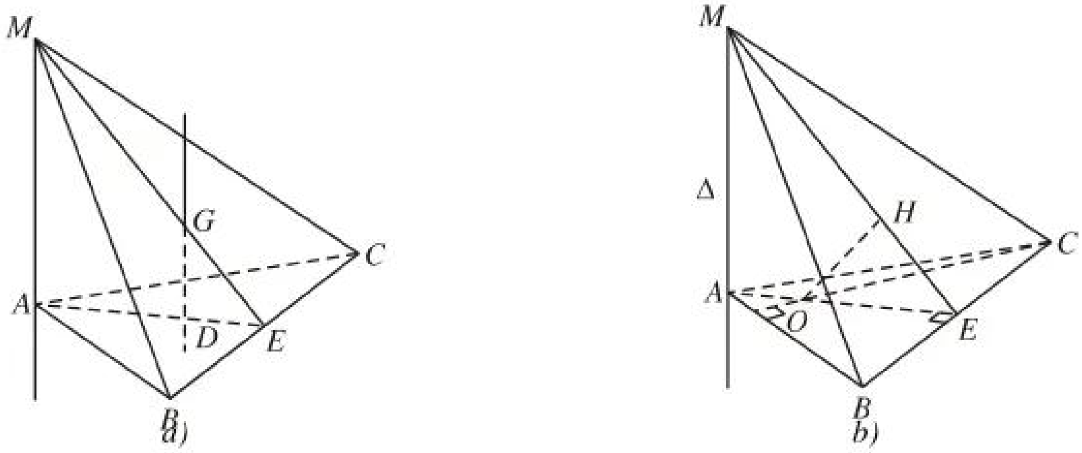
b) Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là :

$$V = S_{ABC}.h = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4}h = \frac{3\sqrt{3}}{16}(4R^2 - h^2)h.$$

c) Mỗi mặt bên của hình lăng trụ là hình vuông khi và chỉ khi $AB = h$, tức $\frac{1}{2}\sqrt{3(4R^2 - h^2)} = h \Leftrightarrow h = \sqrt{\frac{12}{7}}R$ (để ý rằng $\sqrt{\frac{12}{7}} < 2$).

4. a) Nếu gọi E là trung điểm của BC (h.108a) thì trọng tâm G của tam giác MBC xác định bởi $\overrightarrow{EG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EM}$. Từ đó, khi M vạch đường thẳng Δ vuông góc với mp(ABC) tại A ($M \neq A$) thì G vạch đường thẳng Δ' vuông góc với mp(ABC) tại trọng tâm D của tam giác ABC (trừ điểm D).

Do $AB = AC$ nên các tam giác vuông MAB, MAC bằng nhau, vậy ME và AE cùng vuông góc với BC. Từ đó trực tâm H của tam giác MBC thuộc ME (h.108b).



Hình 108

Trong mặt phẳng (AME), đường thẳng vuông góc với ME tại trực tâm H của tam giác MBC cắt AE tại O thì do $BC \perp (AEM)$ nên $BC \perp OH$, từ đó $OH \perp (MBC)$.

Ta có $BM \perp CH$ mà $BM \perp OH$ nên $BM \perp (OHC)$, do đó $OC \perp BM$, nhưng $OC \perp AM$ nên $OC \perp (ABM)$. Vậy $OC \perp AB$.

Điểm O thuộc đường cao OC và đường cao AE của tam giác ABC nên O là trực tâm của tam giác ABC.

Như vậy, khi $M \in \Delta$ $(M \neq A)$ thì H là trực tâm của tam giác MBC khi và chỉ khi H là hình chiếu của trực tâm O của tam giác ABC trên ME.

Vậy quỹ tích của H là đường tròn đường kính OE (bỏ hai điểm O, E) trong mặt phẳng trung trực của BC.

b) (h.108b).

$V_{OHBC} = 2V_{OHBE} = \dfrac{2}{3}S_{OHE}.BE$ (vì (OHE) là mặt phẳng trung trực của BC)

nên V_{OHBC} lớn nhất khi và chỉ khi S_{OHE} lớn nhất.

Tam giác vuông OHE có cạnh huyền OE cố định nên có diện tích lớn nhất khi và chỉ khi tam giác đó vuông cân, tức $\widehat{HEO} = 45^{\circ}$ hay $AM = AE$.

Vậy có hai vị trí của M trên Δ để V_{OHBC} đạt cực đại, đó là các điểm M sao cho $AM = AE$.

5. (h.109)

a) Ta có $C'M' \perp A'B'$, $C'M' \perp AA' \Rightarrow C'M' \perp (ABB'A') \Rightarrow C'M' \perp AB'$.

Mặt khác, theo giả thiết $BC' \perp AB'$, suy ra $AB' \perp mp(BC'M')$.

Do đó $AB' \perp BM'$.

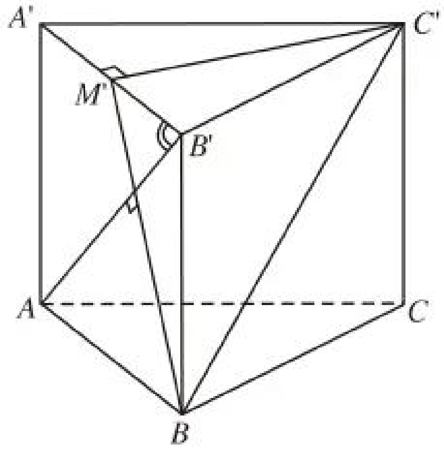
b) Từ kết quả của câu a), ta dễ dàng suy ra $\Delta BB'M' \backsim \Delta B'A'A$

$\Rightarrow \dfrac{A'B'}{BB'} = \dfrac{A'A}{B'M'}$

$\Rightarrow A'B'.B'M' = A'A.BB'$

$\Rightarrow \dfrac{1}{2}A'B'^2 = h^2$

$\Rightarrow A'B' = h\sqrt{2}$.



Hình 109

c) $V_{ABC.A'B'C'} = S_{A'B'C'}.AA' = \left(h\sqrt{2}\right)^2.\dfrac{\sqrt{3}}{4}h = \dfrac{\sqrt{3}}{2}h^3$.

6. (h.110). a) Do $AB//CD$, $AB \subset (SAB)$, $CD \subset (MNCD)$ nên hai mặt phẳng (SAB) và $(MNCD)$ cắt nhau theo giao tuyến MN song song với AB và CD.

Mặt khác $CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp DM$.

Vậy $MNCD$ là hình thang vuông.

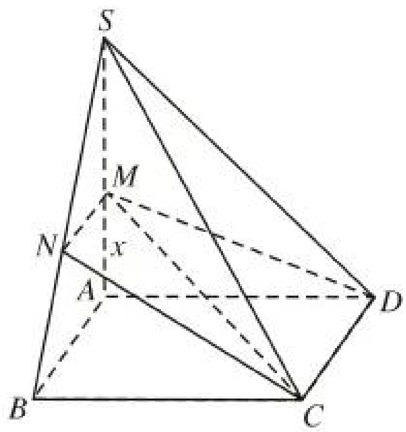
Vì $MN//AB$ nên ta có $\dfrac{MN}{AB} = \dfrac{SM}{SA}$.

Vậy $MN = \dfrac{AB.SM}{SA} = \dfrac{a.SM}{a} = SM = a - x$.

$$S_{MNCD} = \frac{1}{2}(MN + CD).DM$$

$$= \frac{1}{2}(a - x + a)\sqrt{a^2 + x^2}$$

$$= \frac{1}{2}(2a - x)\sqrt{a^2 + x^2}.$$



Hình 110

b) $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}S_{ABCD}.SA = \dfrac{1}{3}a^3 \Rightarrow V_{S.ACD} = V_{S.ACB} = \dfrac{1}{6}a^3$.

$V_{S.MNCD} = V_{S.MNC} + V_{S.MCD}$.

Mặt khác

$$\frac{V_{S.MCN}}{V_{S.ACB}} = \frac{SM}{SA}.\frac{SC}{SC}.\frac{SN}{SB} = \left(\frac{a-x}{a}\right)^2 \Rightarrow \frac{V_{S.MCN}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{2}\left(\frac{a-x}{a}\right)^2.$$

$$\frac{V_{S.MCD}}{V_{S.ACD}} = \frac{SM}{SA}.\frac{SC}{SC}.\frac{SD}{SD} = \frac{SM}{SA} = \frac{a-x}{a} \Rightarrow \frac{V_{S.MCD}}{V_{S.ABCD}} = \frac{a-x}{2a}.$$

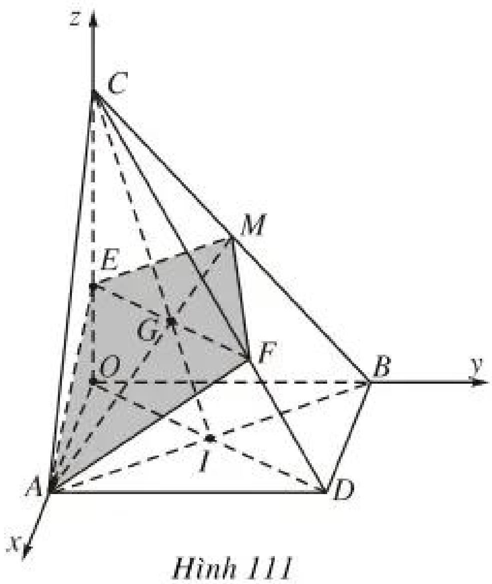
$$\frac{V_{S.MNCD}}{V_{S.ABCD}} = \frac{V_{S.MCN}+V_{S.MCD}}{V_{S.ABCD}} = \frac{V_{S.MCN}}{V_{S.ABCD}} + \frac{V_{S.MCD}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{2}\left(\frac{a-x}{a}\right)^2 + \frac{a-x}{2a}.$$

Từ đó ta có $\dfrac{V_{S.MNCD}}{V_{S.ABCD}} = \dfrac{2}{9} \Leftrightarrow 9x^2 - 27ax + 14a^2 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{7}{3}a \text{ (loại vì theo giả thiết } x < a) \\ x = \frac{2}{3}a. \end{array}\right.$$

7. (h.111).

a) *Cách 1*. Giả sử I là giao điểm của OD và AB, F là giao điểm của mp(P) với CD. Khi đó dễ thấy ba đường thẳng EF, AM và CI đồng quy tại trọng tâm G của tam giác ABC.



Hình 111

Đặt $\overrightarrow{OE} = k.\overrightarrow{OC}$.

Từ giả thiết $GA \perp GE$, ta có $\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GE} = 0$.

Mặt khác $\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GE} = (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OG}).(\overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OG})$

$$= \left[\overrightarrow{OA} - \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})\right].\left[k.\overrightarrow{OC} - \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})\right]$$

$$= -\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}^2 + \frac{1}{9}\overrightarrow{OA}^2 + \frac{1}{9}\overrightarrow{OB}^2 + \frac{1}{9}\overrightarrow{OC}^2 - \frac{1}{3}k\overrightarrow{OC}^2$$

(vì $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OA} = 0$)

$$= -\frac{1}{3}a^2 + \frac{1}{9}a^2 + \frac{2}{9}a^2 + \frac{1}{9}c^2 - \frac{k}{3}c^2 \text{ (vì } OA = a,\ OB = a\sqrt{2},\ OC = c).$$

Vậy $\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GE} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{9}c^2 - \dfrac{k}{3}c^2 = 0 \Leftrightarrow k = \dfrac{1}{3}$. Vậy $OE = \dfrac{1}{3}c$.

Cách 2. Chọn hệ toạ độ Đề-các vuông góc $Oxyz$ như hình 111 thì
$A=(a\ ;\ 0\ ;\ 0)$, $B=\left(0\ ;a\sqrt{2}\ ;0\right)$, $D=(a\ ;a\sqrt{2}\ ;0)$, $C=(0\ ;0\ ;c)$,
$M=\left(0\ ;\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\ ;\dfrac{c}{2}\right)$. Sử dụng giả thiết của bài toán, ta lập được phương trình của mặt phẳng (P) là

$$c\sqrt{2}(x-a)-cy+3a\sqrt{2}z=0.$$

Giao điểm của (P) với trục Oz là $E=\left(0\ ;0\ ;\dfrac{c}{3}\right)$, suy ra $OE=\dfrac{c}{3}$.

b) Vì $\overrightarrow{OE}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OC}$, giao tuyến EF của (P) với (OCD) song song với OD nên $\overrightarrow{DF}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{DC}$. Ta có

$$\frac{V_{C.AEF}}{V_{C.AOD}}=\frac{CE}{CO}\cdot\frac{CF}{CD}=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{9},$$

$$\frac{V_{C.MEF}}{V_{C.BOD}}=\frac{CM}{CB}\cdot\frac{CE}{CO}\cdot\frac{CF}{CD}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{9}.$$

Vậy $V_{C.AEMF}=\left(\dfrac{4}{9}+\dfrac{2}{9}\right)\dfrac{1}{2}V_{C.AOBD}=\dfrac{1}{3}V_{C.AOBD}$, từ đó $\dfrac{V_{C.AEMF}}{V_{AEMFDBO}}=\dfrac{1}{2}$.

c) *Cách 1*. Tứ giác lồi $AEMF$ có các đường chéo AM, EF vuông góc nên có diện tích :

$$S_{AEMF}=\frac{1}{2}AM.EF$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{AO^2+OJ^2+JM^2}\cdot\frac{2}{3}OD\ \text{(J là trung điểm của OB)}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+\frac{a^2}{2}+\frac{c^2}{4}}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{a^2+2a^2}=\frac{\sqrt{3}}{6}a\sqrt{6a^2+c^2}.$$

Vậy khoảng cách từ C đến mp(P) là

$$d(C\ ,(P))=\frac{3V_{C.AEMF}}{S_{AEMF}}=\frac{a^2c\dfrac{\sqrt{2}}{3}}{\dfrac{\sqrt{3}}{6}a\sqrt{6a^2+c^2}}=\frac{2ac\sqrt{6}}{3\sqrt{6a^2+c^2}}.$$

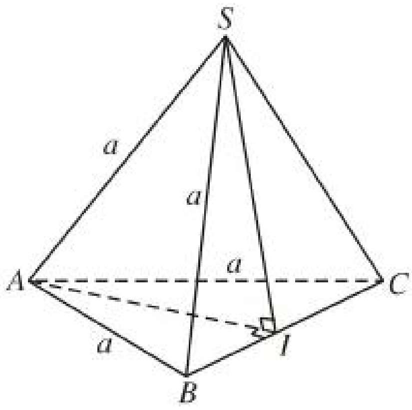
Cách 2. Sử dụng cách 2 của câu a), ta tính được khoảng cách từ điểm $C(0\ ;\ 0\ ;\ c)$ đến mp(P) có phương trình $c\sqrt{2}(x-a)-cy+3a\sqrt{2}z=0$ là

$$d(C,(P))=\frac{\left|-ac\sqrt{2}+3ac\sqrt{2}\right|}{\sqrt{2c^2+c^2+18a^2}}=\frac{2ac\sqrt{6}}{3\sqrt{c^2+6a^2}}.$$

8. (h.112a)

1. Gọi I là trung điểm của BC, ta có $AI \perp BC$. Do $(SBC) \perp (ABC)$ nên $AI \perp \text{mp}(SBC)$, suy ra ΔSAI vuông tại I.

Các tam giác vuông SAI, BAI có IA chung, $AB = AS$, do đó $IB = IS$, mặt khác $IB = IC$, suy ra tam giác SBC vuông ở S.

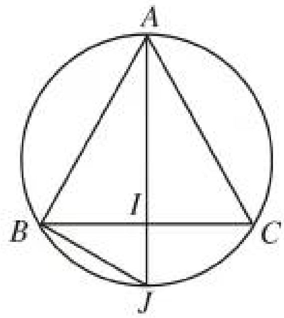


Hình 112a

2. Vì $IB = IC = IS$ và $AI \perp (SBC)$ nên tâm O của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ thuộc đường thẳng AI, suy ra O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác cân ABC và bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp $S.ABC$ cũng là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Gọi J là giao điểm thứ hai của AI (h.112b) và đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC thì $AJ = 2R$ và $AB^2 = AI.AJ$ hay $a^2 = AI.2R$

$$\Rightarrow R = \frac{a^2}{2AI}. \quad (1)$$



Hình 112b

Mặt khác

$$BC^2 = SB^2 + SC^2 = a^2 + \frac{9a^2}{4} = \frac{13a^2}{4}$$

và $AI^2 = AB^2 - BI^2 = a^2 - \dfrac{BC^2}{4} = a^2 - \dfrac{13a^2}{16} = \dfrac{3a^2}{16} \Rightarrow AI = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. (2)

Thay (2) vào (1) ta có $R = \dfrac{2a}{\sqrt{3}}$.

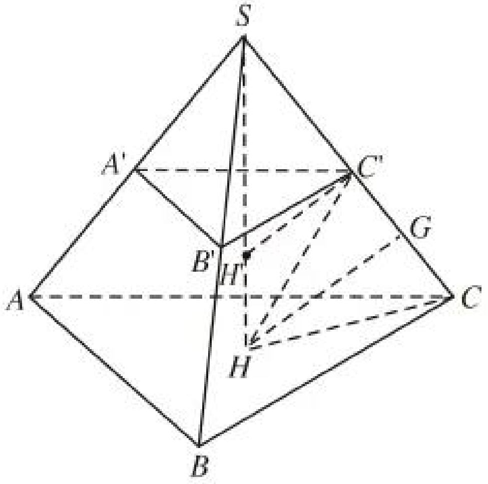
Vậy thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là $\frac{4}{3}\pi.\frac{8a^3}{3\sqrt{3}} = \frac{32\pi a^3}{9\sqrt{3}}$.

9. (h.113)

1. Vì A, B, A', B' cùng thuộc một mặt cầu và $A'B'//AB$ nên $ABB'A'$ là hình thang cân, từ đó $SA = SB$. Lập luận tương tự ta có $SB = SC$.

Vậy $SA = SB = SC$.

Suy ra đường cao SH của hình chóp $S.ABC$ chính là trục của tam giác ABC. Do đó, tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ thuộc SH.



Hình 113

2. Ta sẽ chứng minh H chính là tâm của mặt cầu đi qua các điểm A, B, C, A', B', C'. Thật vậy, do $SH \perp$ mp(ABC) nên $\widehat{SCH} = 60^o$, từ đó $HC = \frac{1}{2}SC$,

mặt khác $C'S = C'C$ nên $HC' = \frac{1}{2}SC$.

Từ chứng minh trên ta có $HA = HB = HC = HC' = HA' = HB'$, tức H là tâm của mặt cầu đi qua A, B, C, A', B', C'.

Gọi G là trung điểm của $C'C$ thì $HG \perp SC$. Kẻ $C'H'$ song song với GH $(H' \in SH)$ thì $H'S = H'C$, từ đó H' là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ và $H'S$ là bán kính mặt cầu ngoại tiếp $S.ABC$.

Ta có $H'S^2 = H'C'^2 + SC'^2$, mặt khác

$$H'C' = \frac{2}{3}HG,\ HG = \frac{R\sqrt{3}}{2},\ SC' = \frac{SC}{2} = R.$$

Từ đó $H'S^2 = \left(\frac{2}{3}.\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2 + R^2 = \frac{R^2}{3} + R^2 = \frac{4R^2}{3}$.

Vậy diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là $\frac{16\pi R^2}{3}$.

10. (h.114)

1. Ta có $AC \perp mp(SAB)$ nên $AC \perp SB$, từ đó $SB \perp B_1C$ tức là $\widehat{BB_1C} = 90^o$.

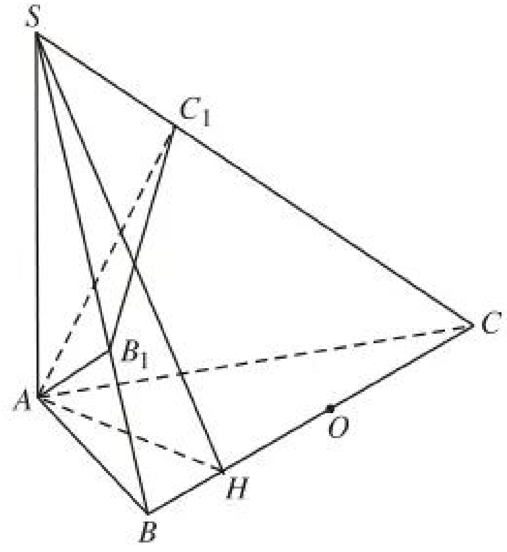
Tương tự ta cũng có $\widehat{BC_1C} = 90^o$.

Vậy tâm mặt cầu đi qua B, C, A, B_1, C_1 là trung điểm O của BC.

Ta có $AO = \frac{1}{2}BC$,

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = b^2 + c^2.$$

Từ đó bán kính mặt cầu bằng $\frac{\sqrt{b^2 + c^2}}{2}$.



Hình 114

2. Ta có

$$\frac{V_{S.AB_1C_1}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA}{SA}.\frac{SB_1}{SB}.\frac{SC_1}{SC} = \frac{SB_1.SB}{SB^2}.\frac{SC_1.SC}{SC^2} = \frac{SA^2}{SB^2}.\frac{SA^2}{SC^2} = \frac{h^4}{\left(h^2+c^2\right)\left(h^2+b^2\right)}.$$

Vậy tỉ số thể tích của hai tứ diện SAB_1C_1 và $SABC$ bằng

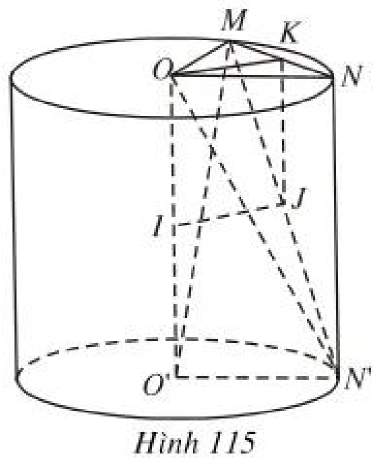
$$\frac{h^4}{\left(h^2+b^2\right)\left(h^2+c^2\right)}.$$

11. (h.115)

1. Hai tam giác vuông $OO'N'$ và $O'OM$ có OO' chung và $O'N' = OM$ nên chúng bằng nhau, từ đó $IM = IN'$. Mặt khác $JM = JN'$ nên $IJ \perp MN'$.

Cũng dễ thấy các tam giác OMN' và $O'N'M$ bằng nhau, từ đó $OJ = O'J$; mặt khác $IO = IO'$ nên $IJ \perp OO'$.

Vậy IJ là đường vuông góc chung của OO' và MN'.



Hình 115

Gọi K là trung điểm của MN thì $OK = \frac{R\sqrt{3}}{2}$ và $IJ = OK$, tức là độ dài IJ không đổi.

2. Từ $IJ = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$ và $JI \perp OO'$ suy ra điểm J thuộc mặt trụ có trục là OO' và bán kính mặt trụ bằng $\dfrac{R\sqrt{3}}{2}$. Mặt khác từ $IJ \perp MN'$, $IJ \perp OO'$ suy ra $IJ \perp \text{mp}(MNN')$, tức là mp(MNN') tiếp xúc với mặt trụ cố định có trục là OO', bán kính $\dfrac{R\sqrt{3}}{2}$.

12. (h.116)

1. Gọi I là trung điểm của AM thì $OI \perp AM$ và $SI \perp AM$, từ đó $\widehat{SIO} = \beta$. Gọi H là hình chiếu của O trên SI thì $OH \perp \text{mp}(SAM)$, từ đó $OH = a$.

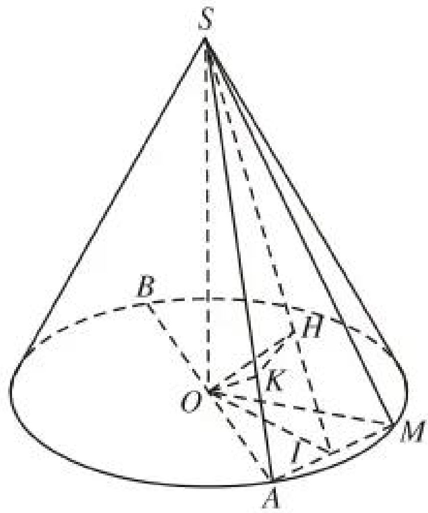
Ta có $OI = \dfrac{OH}{\sin\beta} = \dfrac{a}{\sin\beta}$.

$$OM = \frac{OI}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{a}{\sin\beta\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

$$SO = OI\tan\beta = \frac{a}{\sin\beta}.\tan\beta = \frac{a}{\cos\beta}.$$

Từ đó thể tích khối nón đã cho là

$$V = \frac{\pi a^3}{3\cos^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\beta\cos\beta}.$$



Hình 116

2. Ta có $S_{\Delta SAM} = \dfrac{1}{2}SA.SM\sin\widehat{ASM} = \dfrac{1}{2}SA^2\sin\widehat{ASM}$.

Vì SA không đổi nên $S_{\Delta SAM}$ lớn nhất $\Leftrightarrow$ $\sin\widehat{ASM}$ lớn nhất.

Dễ thấy $\widehat{ASB} \geq \widehat{ASM}$ (B là điểm đối xứng của A qua O). Vậy có hai trường hợp :

a) $0 < \widehat{ASB} < 90^\circ$. Khi đó $\sin\widehat{ASM} \leq \sin\widehat{ASB}$, từ đó $\sin\widehat{ASM}$ lớn nhất khi và chỉ khi M trùng với B.

b) $90^\circ \leq \widehat{ASB} < 180^\circ$. Khi đó $\sin\widehat{ASM}$ lớn nhất khi và chỉ khi $\widehat{ASM} = 90^\circ$. Vậy có hai vị trí của M trên đường tròn đáy hình nón để diện tích tam giác SAM lớn nhất, đó là hai điểm M sao cho $\widehat{ASM} = 90^\circ$.

3. Vì $OH \perp$ mp(SAM) nên $OH \perp SA$. Vậy H thuộc mp(P) đi qua O và vuông góc với SA tại K. Ta có (P) là mặt phẳng cố định, ngoài ra $\widehat{OHK} = 90^{\circ}$, tức là H thuộc đường tròn đường kính OK trong mặt phẳng (P) nêu trên, tất nhiên đường tròn này cố định.

13. 1. $\overrightarrow{CA} = (1\ ;\ 0\ ;\ 1)$, $\overrightarrow{CB} = (1\ ;\ 1\ ;\ -1)$, $\overrightarrow{CD} = (1\ ;\ 1\ ;\ 0)$

$\Rightarrow \left[\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right] = (-1\ ;\ 2\ ;\ 1) \Rightarrow \left[\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right].\overrightarrow{CD} = 1 \neq 0$

$\Rightarrow A, B, C, D$ không đồng phẳng hay A, B, C, D là bốn đỉnh của một khối tứ diện.

2. $V_{ABCD} = \dfrac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right].\overrightarrow{CD}\right| = \dfrac{1}{6}$.

3. Vectơ chỉ phương của đường cao tứ diện hạ từ đỉnh D có thể lấy là vectơ pháp tuyến của mp(ABC) hay vectơ $\left[\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right] = (-1\ ;\ 2\ ;\ 1)$.

Vậy đường cao đó có phương trình chính tắc là $\dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-1}{1}$.

4. Phương trình mặt cầu (S) ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ có dạng

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0.$$

Do A, B, C, D thuộc (S) nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 2a + 4c - d - 5 = 0 \\ 2a + 2b - d - 2 = 0 \\ 2c - d - 1 = 0 \\ 2a + 2b + 2c - d - 3 = 0. \end{cases}$$

Giải hệ ta có : $a = \dfrac{3}{2},\ b = -\dfrac{1}{2},\ c = \dfrac{1}{2},\ d = 0.$

Vậy phương trình mặt cầu (S) là

$$x^2 + y^2 + z^2 - 3x + y - z = 0.$$

Suy ra (S) có tâm là $I\left(\dfrac{3}{2}\ ;\ -\dfrac{1}{2}\ ;\ \dfrac{1}{2}\right)$ và bán kính $R = \dfrac{\sqrt{11}}{2}$.

5. Mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu (S) tại A có vectơ pháp tuyến là

$$\overrightarrow{AI} = \left(\frac{1}{2}\ ;\ -\frac{1}{2}\ ;\ -\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}(1\ ;\ -1\ ;\ -3).$$

Vậy phương trình mặt phẳng cần tìm là

$$(x-1) - (y-0) - 3(z-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - y - 3z + 5 = 0.$$

6. Ta viết phương trình mp(BCD), đó là mặt phẳng đi qua $C(0\ ;\ 0\ ;\ 1)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = \left[\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}\right] = (1\ ;\ -1\ ;\ 0)$.

Vậy mp(BCD) có phương trình : $x - y = 0$.

Đường thẳng qua A và vuông góc với mp(BCD) có phương trình là

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -t \\ z = 2. \end{cases}$$

Gọi K là giao điểm của đường thẳng này với mp(BCD), toạ độ của K là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -t \\ z = 2 \\ x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow K = \left(\frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ 2\right).$$

Vì A' là điểm đối xứng với A qua mp(BCD) nên ta có

$$\begin{cases} x_{A'} + x_A = 2x_K \\ y_{A'} + y_A = 2y_K \\ z_{A'} + z_A = 2z_K \end{cases} \Rightarrow A' = (0\ ;\ 1\ ;\ 2).$$

7. Dễ dàng nhận thấy BD song song với mp(xOz) mà mp(xOz) chứa AC nên

$$d(AC, BD) = d(B, (xOz)) = 1.$$

14. 1. Phương trình tham số của d : $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 3 + t. \end{cases}$

Toạ độ giao điểm A của đường thẳng d với mp(P) thoả mãn hệ :

$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 3 + t \\ x + 2y - z + 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow t = \frac{1}{3} \Rightarrow A = \left(-\frac{1}{3}\ ;\ \frac{-2}{3}\ ;\ \frac{10}{3}\right).$$

2. Gọi α là góc giữa đường thẳng d và mp(P). d có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_d}(2\,;1\,;1)$, (P) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P}(1\,;2\,;-1)$ nên

$$\sin\alpha = \frac{\left|\overrightarrow{u_d}.\overrightarrow{n_P}\right|}{\left|\overrightarrow{u_d}\right|.\left|\overrightarrow{n_P}\right|} = \frac{|2 + 2 - 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}\,.\sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 30^{\circ}.$$

3. Vì (Q) là mặt phẳng chứa d và vuông góc với mp(P) nên mp(Q) chứa điểm $(-1 ; -1 ; 3) \in d$ và có vectơ pháp tuyến là

$$\left[\overrightarrow{n_d}, \overrightarrow{n_P}\right] = (-3 ; 3 ; 3)$$

Suy ra phương trình mp(Q) là : $x - y - z + 3 = 0$.

4. d' chính là đường thẳng giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q). Vì vậy, điểm $(x ; y ; z) \in d'$ khi và chỉ khi $(x;y;z)$ thoả mãn hệ

$$\begin{cases} x + 2y - z + 5 = 0 \\ x - y - z + 3 = 0, \end{cases}$$

hay d' có phương trình tham số là :

$$\begin{cases} x = -\dfrac{11}{3} + t \\ y = -\dfrac{2}{3} \\ z = t. \end{cases}$$

5. Gọi Δ là đường thẳng nằm trong mp(P), đi qua điểm $A\left(-\dfrac{1}{3} ; -\dfrac{2}{3} ; \dfrac{10}{3}\right)$ và vuông góc với đường thẳng d. Khi đó, Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u} = \dfrac{1}{3}\left[\overrightarrow{u_d}, \overrightarrow{n_P}\right] = (-1 ; 1 ; 1)$ nên Δ có phương trình chính tắc là

$$\frac{x + \frac{1}{3}}{-1} = y + \frac{2}{3} = z - \frac{10}{3}.$$

6. Vì $I \in d$ nên $I = (-1 + 2t ; -1 + t ; 3 + t)$.

Mặt cầu tâm I tiếp xúc với mp(P) và có bán kính $R = \sqrt{6}$ khi và chỉ khi $d\left(I,(P)\right) = \sqrt{6}$ hay

$$\frac{|-1 + 2t - 2 + 2t - 3 - t + 5|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \sqrt{6}$$

$$\Leftrightarrow |3t - 1| = 6 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 3t - 1 = 6 \\ 3t - 1 = -6 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{7}{3} \\ t = -\dfrac{5}{3} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} I = \left(\dfrac{11}{3} ; \dfrac{4}{3} ; \dfrac{16}{3}\right) \\ I = \left(-\dfrac{13}{3} ; \dfrac{-8}{3} ; \dfrac{4}{3}\right). \end{array}\right.$$

Vậy có hai mặt cầu thoả mãn yêu cầu đặt ra là :

$$(S_1):\left(x-\frac{11}{3}\right)^2+\left(y-\frac{4}{3}\right)^2+\left(z-\frac{16}{3}\right)^2=6,$$

$$(S_2):\left(x+\frac{13}{3}\right)^2+\left(y+\frac{8}{3}\right)^2+\left(z-\frac{4}{3}\right)^2=6.$$

7. *Cách 1*. Ta tìm hai điểm phân biệt thuộc đường thẳng d.

Cho $t = 0$, ta được $M(-1 ; -1 ; 3) \in d$, $t = 1$, ta được $N(1 ; 0 ; 4) \in d$.

Giả sử mặt phẳng (R) cần tìm có phương trình $Ax + By + Cz + D = 0$ với $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

Vì $M, N \in \text{mp}(R)$ nên

$$\begin{cases}-A-B+3C+D=0\\ A+4C+D=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}C=-(2A+B)\\ D=7A+4B.\end{cases}$$

Do đó $\overrightarrow{n_R}=(A\,;B\,;-2A-B)$.

Ta có $\overrightarrow{n_P}=(1;2;-1)$.

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (R) và (P) ($0^\circ \le \varphi \le 90^\circ$) thì :

$$\cos\varphi=\frac{|A+2B+2A+B|}{\sqrt{6}\sqrt{A^2+B^2+(2A+B)^2}}=\frac{3}{\sqrt{6}}\frac{|A+B|}{\sqrt{5A^2+2B^2+4AB}}.$$

Trường hợp $A+B=0$, ta có $\varphi=90^\circ$ là góc lớn nhất trong các góc có thể có giữa hai mặt phẳng (P) và (R), loại.

Trường hợp $A+B\neq 0$, ta có

$$\cos\varphi=\frac{3}{\sqrt{6}}\sqrt{\frac{(A+B)^2}{2(A+B)^2+3A^2}}=\frac{3}{\sqrt{6}}.\sqrt{\frac{1}{2+3\left(\frac{A}{A+B}\right)^2}}\le\frac{3}{\sqrt{6}}.\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

suy ra $\varphi \ge 30^\circ$.

Dấu = xảy ra khi $A=0$. Khi đó $B\neq 0$ (vì nếu $B=0$ thì $C=0$, vô lí).

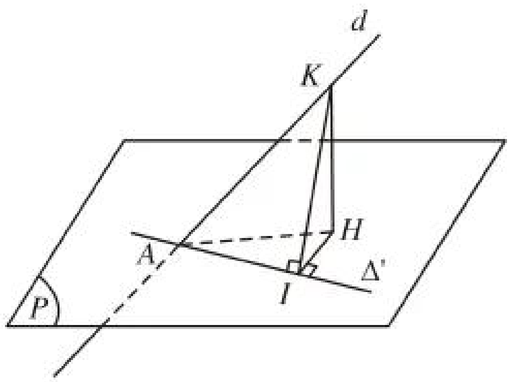
Ta chọn $B=1$ thì $C=-(2A+B)=-1, D=7A+4B=4$.

Vậy mp(R) chứa đường thẳng d và tạo với mp(P) một góc nhỏ nhất (bằng 30°) có phương trình là :

$$y-z+4=0.$$

Cách 2. (h.117) Xét mặt phẳng (Q) thay đổi đi qua đường thẳng d, cắt mp(P) theo giao tuyến Δ'. Vì $A = d \cap (P)$ nên $A \in \Delta'$.

Lấy một điểm K cố định trên d $(K \neq A)$. Gọi H là hình chiếu của K trên mp(P), I là hình chiếu của H trên Δ' thì HI và KI cùng vuông góc với Δ' nên $\widehat{KIH}$ là góc giữa mp(P) và mp(Q).



Hình 117

Ta có $\tan\widehat{KIH} = \dfrac{KH}{HI}$ mà KH không đổi khi (Q) thay đổi và $HI \leq HA$ nên $\widehat{KIH}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow \tan\widehat{KIH}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow HI$ lớn nhất $\Leftrightarrow I$ trùng A hay $\Delta' \perp d$ tại A, tức là Δ' trùng Δ (Δ nói ở câu 5).

Vậy mp(R) chứa đường thẳng d và tạo với mp(P) một góc nhỏ nhất khi và chỉ khi mp(R) chứa d và Δ (Δ nằm trên (P), đi qua A và vuông góc với d).

Ta có $\left[\overrightarrow{u_d}, \overrightarrow{u_\Delta}\right] = (0\,;-3\,;3)$ nên (R) có vectơ pháp tuyến là $(0\ ;\ 1\ ;\ -1)$.

Vì $\text{mp}(R)$ đi qua $A\left(-\dfrac{1}{3};-\dfrac{2}{3};\dfrac{10}{3}\right)$ nên có phương trình là

$$y + \frac{2}{3} - \left(z - \frac{10}{3}\right) = 0 \text{ hay } y - z + 4 = 0.$$

15. 1. Đường thẳng AB đi qua $A(3\ ;\ 3\ ;\ 1)$, có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{AB} = (-3\,;-1\,;0)$ nên có phương trình :

$$\begin{cases} x = 3 - 3t \\ y = 3 - t \\ z = 1. \end{cases}$$

2. Ta nhận thấy $A \in$ mp(P) nên hình chiếu vuông góc của AB trên mp(P) là đường thẳng AH, trong đó H là hình chiếu của điểm B trên mp(P).

Đường thẳng BH qua $B(0\ ;\ 2\ ;\ 1)$ và vuông góc với mp(P) nên có phương trình

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2 + t \\ z = 1 + t, \end{cases}$$

do đó toạ độ $(x ; y ; z)$ của điểm H thoả mãn hệ : $\begin{cases} x = t \\ y = 2 + t \\ z = 1 + t \\ x + y + z - 7 = 0. \end{cases}$

Giải hệ ta được $t = \dfrac{4}{3} \Rightarrow H = \left(\dfrac{4}{3} ; \dfrac{10}{3} ; \dfrac{7}{3}\right)$.

Phương trình đường thẳng AH là

$$\begin{cases} x = 3 + 5t \\ y = 3 - t \\ z = 1 - 4t. \end{cases}$$

3. Đường thẳng d nằm trong mp(P), đồng thời nằm trong mặt phẳng trung trực (π) của đoạn AB. Gọi I là trung điểm AB, ta có $I = \left(\dfrac{3}{2} ; \dfrac{5}{2} ; 1\right)$.

Mặt phẳng (π) đi qua I và có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{BA} = (3 ; 1 ; 0)$ nên có phương trình :

$$(\pi) : 3x + y - 7 = 0.$$

Vậy d là giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (π). Do đó d có phương trình :

$$\begin{cases} x = t \\ y = 7 - 3t \\ z = 2t. \end{cases}$$

4. Vì $AB \perp$ mp(π) và $d \subset$ mp(π) nên nếu trong mp(π), kẻ đường thẳng IM vuông góc với d ($M \in d$) thì IM chính là đường vuông góc chung của AB và d.

Ta có $M = (t ; 7 - 3t ; 2t) \Rightarrow \overrightarrow{IM} = \left(t - \dfrac{3}{2} ; \dfrac{9}{2} - 3t ; 2t - 1\right)$.

Đường thẳng d có vectơ chỉ phương là $\vec{u}_d = (1 ; -3 ; 2)$.

$IM \perp d \Leftrightarrow \overrightarrow{IM} . \vec{u}_d = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{17}{14}. \Rightarrow \overrightarrow{IM} = \left(-\dfrac{4}{14} ; \dfrac{12}{14} ; \dfrac{20}{14}\right)$.

Vậy đường vuông góc chung của AB và d là đường thẳng qua I và có vectơ chỉ phương $\dfrac{14}{4}\overrightarrow{IM} = (-1 ; 3 ; 5)$, đường thẳng đó có phương trình :

$$\begin{cases} x = \dfrac{3}{2} - t \\ y = \dfrac{5}{2} + 3t \\ z = 1 + 5t. \end{cases}$$

5. *Cách 1.* $K \in AB \Rightarrow K = (3 - 3t\ ;\ 3 - t\ ;\ 1)$.

$$\mathrm{d}(K,(P)) = \mathrm{d}(B,(P)) \Leftrightarrow \frac{|3 - 3t + 3 - t + 1 - 7|}{\sqrt{3}} = \frac{|0 + 2 + 1 - 7|}{\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow |-4t| = |-4| \Leftrightarrow |t| = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -1. \end{array}\right.$$

Với $t = 1, K = (0\ ;\ 2\ ;\ 1)$ nên $K \equiv B$ (loại).

Với $t = -1,\ K = (6\ ;\ 4\ ;\ 1)$.

Vậy $K(6\ ;\ 4\ ;\ 1)$ là điểm phải tìm.

Cách 2. Vì $A \in (P)$ nên $d(K,(P)) = d(B,(P))$ khi và chỉ khi A là trung điểm của KB. Từ đó suy ra $K = (6\ ;\ 4\ ;\ 1)$.

6. Với $C \in d$ thì $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AB.CI$, AB không đổi nên S_{ABC} nhỏ nhất khi và chỉ khi IC nhỏ nhất, tức C là hình chiếu của I trên d.

Vì $C \in d$ nên $C = (t\ ;\ 7 - 3t\ ;\ 2t)$, suy ra $\overrightarrow{IC} = \left(t - \dfrac{3}{2}, 7 - 3t - \dfrac{5}{2}, 2t - 1\right)$.

Ta có $IC \perp d \Leftrightarrow \overrightarrow{IC}.\overrightarrow{u_d} = 0 \Leftrightarrow t - \dfrac{3}{2} - 3\left(7 - 3t - \dfrac{5}{2}\right) + 2(2t - 1) = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{17}{14}$.

Vậy điểm C cần tìm là $C = \left(\dfrac{17}{14}; \dfrac{47}{14}; \dfrac{34}{14}\right)$ (chính là điểm M ở câu 4).

16. 1. Đường thẳng d_1 đi qua điểm $M_1(0\ ;\ 2\ ;\ -4)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1}(1\ ;\ -1\ ;\ 2)$. Đường thẳng d_2 đi qua điểm $M_2(-8\ ;\ 6\ ;\ 10)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_2}(2\ ;\ 1\ ;\ -1)$.

Ta có $\left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right] = (-1; 5; 3)$, $\overrightarrow{M_1M_2} = (-8; 4; 14) \Rightarrow \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right].\overrightarrow{M_1M_2} = 70 \neq 0$

$\Rightarrow d_1, d_2$ chéo nhau.

2. Gọi (α) là mặt phẳng chứa d_2 và song song với d_1. Khi đó mp(α) qua điểm $M_2(-8\ ;\ 6\ ;\ 10)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right] = (-1\ ;\ 5\ ;\ 3)$

$\Rightarrow (\alpha) :\ x - 5y - 3z + 68 = 0$.

3. $d(d_1, d_2) = d(M_1,(\alpha)) = \dfrac{|0 - 10 + 12 + 68|}{\sqrt{1 + 25 + 9}} = \dfrac{70}{\sqrt{35}} = 2\sqrt{35}$.

4. Viết lại phương trình đường thẳng d_1, d_2 dưới dạng tham số. Từ đó :

$M \in d_1$ nên $M = (t \,;\, 2 - t \,;\, -4 + 2t)$,

$N \in d_2$ nên $N = \left(-8+2t' \,;\, 6+t' \,;\, 10-t'\right)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = (-8 + 2t' - t \,;\, 4 + t' + t \,;\, 14 - t' - 2t).$$

Đường thẳng MN sẽ là đường thẳng d phải tìm khi $MN \,//\, Ox$ hay hai vectơ $\overrightarrow{MN}$ và $\vec{i}(1 \,;\, 0 \,;\, 0)$ cùng phương, nghĩa là

$$\begin{cases} t' + t = -4 \\ t' + 2t = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 18 \\ t' = -22. \end{cases}$$

Vậy $M = (18 \,;\, -16 \,;\, 32)$ và đường thẳng d phải tìm có phương trình tham số :

$$d : \begin{cases} x = 18 + t \\ y = -16 \\ z = 32. \end{cases}$$

5. $A \in d_1 \Rightarrow A = (t \,;\, 2 - t \,;\, -4 + 2t)$,

$B \in d_2 \Rightarrow B = (-8 + 2t' \,;\, 6 + t' \,;\, 10 - t')$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = (-8 + 2t' - t \,;\, 4 + t' + t \,;\, 14 - t' - 2t).$$

$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{u_1} \Leftrightarrow 6t + t' = 16$,

$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{u_2} \Leftrightarrow t + 6t' = 26$.

Giải hệ $\begin{cases} 6t + t' = 16 \\ t + 6t' = 26 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t' = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = (2\,;0\,;0) \\ B = (0\,;10\,;6). \end{cases}$

Suy ra mặt cầu đường kính AB có tâm $I = \left(1\,;5\,;3\right)$, bán kính bằng $\sqrt{35}$.
Phương trình của nó là :

$$(x-1)^2 + (y-5)^2 + (z-3)^2 = 35.$$

17. 1. Ta có $AB^2 = a^2 + b^2, BC^2 = b^2 + c^2, CA^2 = c^2 + a^2$

$\Rightarrow AB^2 + BC^2 - CA^2 = 2b^2 > 0 \Rightarrow AB^2 + BC^2 > CA^2 \Rightarrow \widehat{B}$ nhọn.

Tương tự, ta suy ra các góc $\widehat{A}, \widehat{C}$ nhọn.

2. Mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ có tâm $I\left(\frac{a}{2};\frac{b}{2};\frac{c}{2}\right)$, bán kính $R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

3. Phương trình mp(ABC) : $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

Đường thẳng d đi qua gốc toạ độ O và vuông góc với mp(ABC) có phương trình là

$$\begin{cases} x = \frac{1}{a}t \\ y = \frac{1}{b}t \\ z = \frac{1}{c}t. \end{cases}$$

Suy ra toạ độ giao điểm H của đường thẳng d với mp(ABC) là

$$H = \left(\frac{ab^2c^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2} ; \frac{ba^2c^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2} ; \frac{ca^2b^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}\right).$$

4. Vì H là trung điểm của OO' nên $\overrightarrow{OO'} = 2\overrightarrow{OH}$, suy ra

$$O' = \left(\frac{2ab^2c^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2} ; \frac{2ba^2c^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2} ; \frac{2ca^2b^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}\right).$$

5. Ta có : $S_1 = S_{OAB} = \frac{1}{2}ab$, $S_2 = S_{OBC} = \frac{1}{2}bc$, $S_3 = S_{OCA} = \frac{1}{2}ca$

$$\Rightarrow S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = \frac{1}{4}(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2).$$

Mặt khác, $V_{OABC} = \frac{1}{6}abc = \frac{1}{3}S_{ABC}.OH$,

mà $OH = d(O,(ABC)) = \frac{abc}{\sqrt{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2}}$

nên $\frac{1}{36}a^2b^2c^2 = \frac{1}{9}S^2.OH^2$

$$\Rightarrow S^2 = \frac{1}{4}(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 \text{ (đpcm)}.$$

6. M là trung điểm của AB nên $M = \left(\frac{a}{2}\ ;\ \frac{b}{2}\ ;\ 0\right) \Rightarrow \overrightarrow{OM} = \left(\frac{a}{2}\ ;\ \frac{b}{2}\ ;\ 0\right)$.

N là trung điểm của BC nên $N = \left(0\ ;\ \frac{b}{2}\ ;\ \frac{c}{2}\right) \Rightarrow \overrightarrow{ON} = \left(0\ ;\ \frac{b}{2}\ ;\ \frac{c}{2}\right)$.

P là trung điểm của CA nên $P = \left(\frac{a}{2}\ ;\ 0\ ;\ \frac{c}{2}\right) \Rightarrow \overrightarrow{OP} = \left(\frac{a}{2}\ ;\ 0\ ;\ \frac{c}{2}\right)$.

Các mặt phẳng (OMN) và (OMP) có các vectơ pháp tuyến lần lượt là

$$\overrightarrow{n_{(OMN)}} = \left[\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}\right] = \left(\frac{bc}{4}; \frac{-ac}{4}; \frac{ab}{4}\right),$$

$$\overrightarrow{n_{(OMP)}} = \left[\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OP}\right] = \left(\frac{bc}{4}; -\frac{ac}{4}; -\frac{ab}{4}\right).$$

Do đó mp$(OMN) \perp$ mp$(OMP) \Leftrightarrow \overrightarrow{n_{(OMN)}}.\overrightarrow{n_{(OMP)}} = 0$

$$\Leftrightarrow a^2b^2 = b^2c^2 + a^2c^2 \Leftrightarrow \frac{1}{c^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \text{ (đpcm).}$$

7. $P(x_o; y_o; z_o) \in$ mp$(ABC) \Leftrightarrow \frac{x_o}{a} + \frac{y_o}{b} + \frac{z_o}{c} = 1$.

$$\frac{AP^2}{AO^2} = \frac{(x_o - a)^2 + y_o^2 + z_o^2}{a^2} = \frac{x_o^2 + y_o^2 + z_o^2}{a^2} - \frac{2x_o}{a} + 1 = \frac{OP^2}{a^2} - \frac{2x_o}{a} + 1.$$

Tương tự, $\frac{BP^2}{BO^2} = \frac{OP^2}{b^2} - \frac{2y_o}{b} + 1$, $\frac{CP^2}{CO^2} = \frac{OP^2}{c^2} - \frac{2z_o}{c} + 1$.

Suy ra

$$\frac{AP^2}{AO^2} + \frac{BP^2}{BO^2} + \frac{CP^2}{CO^2} = OP^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) - 2\left(\frac{x_o}{a} + \frac{y_o}{b} + \frac{z_o}{c}\right) + 3$$

$$= OP^2.\frac{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2}{a^2b^2c^2} + 1$$

$$= \frac{OP^2}{OH^2} + 1 = \frac{HP^2 + OH^2}{OH^2} + 1$$

$$= \frac{HP^2}{OH^2} + 2 \text{ (đpcm).}$$