B - LỜI GIẢI - HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

§1. Hệ toạ độ trong không gian

1. a) $\vec{x} = (1 - 2 ; 2 - 2 ; 3 + 1) = (-1 ; 0 ; 4)$.

b) $\vec{x} = (-1 + 8 ; 0 + 0 ; 4 - 8) = (7 ; 0 ; -4)$.

c) $\vec{x} = (2 + 8 - 4 ; 4 + 8 - 0 ; 6 - 4 + 4) = (6 ; 12 ; 6)$.

d) $\vec{x} = (5 - 6 - 2 ; 10 - 6 + 0 ; 15 + 3 + 2) = (-3 ; 4 ; 20)$.

e) $2\vec{x} = 3\vec{u} + \vec{w} \Rightarrow \vec{x} = \frac{3}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{w}$.

$$\Rightarrow \vec{x} = \left(\frac{3}{2} + 2 \; ; \; 3 + 0 \; ; \; \frac{9}{2} - 2\right) = \left(\frac{7}{2} \; ; \; 3 \; ; \; \frac{5}{2}\right).$$

g) $3\vec{x} = -2\vec{u} - \vec{v} + \vec{w} = (-2 - 2 + 4 \; ; -4 - 2 + 0 \; ; -6 + 1 - 4)$

$\Rightarrow 3\vec{x} = (0 \; ; -6 \; ; -9) \Rightarrow \vec{x} = (0 \; ; -2 \; ; -3)$.

2. $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương với $\vec{u}$.

3. Ta có $\vec{u} = (-3 \; ; 4 \; ; 2)$, $\vec{a} = (-6 \; ; 8 \; ; 4)$, $\vec{b} = (0 \; ; 4 \; ; 2)$, $\vec{c} = (1 \; ; -4 \; ; 2)$.

Chỉ có vectơ $\vec{a}$ cùng phương với vectơ $\vec{u}$.

4. a) Gọi toạ độ điểm cuối là $(x \; ; y \; ; z)$. Ta có

$$(x - 0 \; ; y - 6 \; ; z - 2) = (3 \; ; -5 \; ; 6)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 0 = 3 \\ y - 6 = -5 \\ z - 2 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \\ z = 8. \end{cases}$$

Đáp số : $(3 \; ; 1 \; ; 8)$.

b) $(1 \; ; 0 \; ; 3)$.

5. a) $\overrightarrow{CA} = (1 \; ; 3 \; ; 0)$, $\overrightarrow{CB} = (0 \; ; 1 \; ; 1)$.

Cách 1 : A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \exists k$ để $\overrightarrow{CA} = k.\overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \exists k$ để $\begin{cases} 1 = k.0 \\ 3 = k.1 \\ 0 = k.1. \end{cases}$

Điều này không xảy ra.

Vậy A, B, C không thẳng hàng.

Cách 2 : $\left[\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right] = \left(\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\right) = (3 \; ; -1 \; ; 1) \neq \vec{0}$

$\Rightarrow A, B, C$ không thẳng hàng.

b) $\overrightarrow{CA} = (10 \; ; -4 \; ; 0)$, $\overrightarrow{CB} = (5 \; ; -2 \; ; 0) \Rightarrow \overrightarrow{CA} = 2\overrightarrow{CB} \Rightarrow A, B, C$ thẳng hàng.

Cách khác : $\left[\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right] = \left(\begin{vmatrix} -4 & 0 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 0 & 10 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 10 & -4 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} \right) = (0\ ;\ 0\ ;\ 0) = \vec{0}$

$\Rightarrow A, B, C$ thẳng hàng.

c) Không thẳng hàng.

d) $\overrightarrow{CA} = (-2\ ;\ 0\ ;\ 0)$, $\overrightarrow{CB} = (-3\ ;\ 0\ ;\ 1) \Rightarrow A, B, C$ không thẳng hàng.

e) Không thẳng hàng.

6. a) A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = k \\ y - 5 = 2k \\ 3 = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 11 \\ k = 3. \end{cases}$$

Vậy với $x = 5, y = 11$ thì A, B, C thẳng hàng.

b) Vì $z_A = 6$, $z_B = -2 \Rightarrow z_A \,.\, z_B < 0 \Rightarrow A, B$ ở hai phía của mp(Oxy).

Vậy $MA + MB$ nhỏ nhất khi A, B, M thẳng hàng hay

$\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}$ cùng phương $\Leftrightarrow \left[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}\right] = \vec{0}$.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (4\ ;\ -12\ ;\ -8)$.

Giả sử $M(x\ ;\ y\ ;\ 0) \in$ mp(Oxy) thì $\overrightarrow{AM} = (x + 1\ ;\ y - 6\ ;\ -6)$.

$$\left[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}\right] = \left(\begin{vmatrix} y-6 & -6 \\ -12 & -8 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} -6 & x+1 \\ -8 & 4 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} x+1 & y-6 \\ 4 & -12 \end{vmatrix} \right)$$

$$= (-8y - 24\ ;\ 8x - 16\ ;\ -12x - 4y + 12).$$

Ta có : $\left[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}\right] = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} -8y - 24 = 0 \\ 8x - 16 = 0 \\ -12x - 4y + 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -3. \end{cases}$

Vậy $MA + MB$ ngắn nhất khi $M = (2\ ;\ -3\ ;\ 0)$.

7. Ta có $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = (0\ ;\ 4\ ;\ 0)$, vậy $ABCD$ là hình bình hành.

Lại có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = 0 \Rightarrow \widehat{BAD} = 90^{\circ}$. Vậy $ABCD$ là hình chữ nhật.

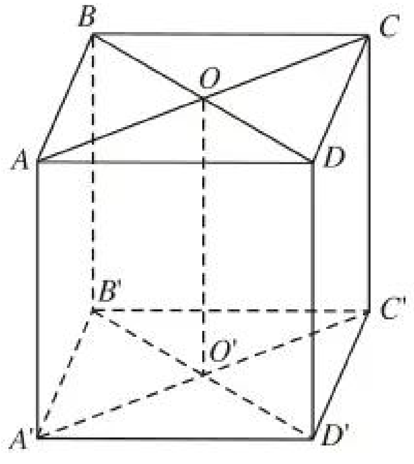
Vì $\overrightarrow{AC} = (3\ ;\ 4\ ;\ 0)$ nên độ dài đường chéo của hình chữ nhật là

$$AC = \left|\overrightarrow{AC}\right| = BD = 5.$$

Tâm O của hình chữ nhật là trung điểm của đường chéo AC nên $O = \left(\frac{5}{2} ; 1 ; 1\right)$.

$$\cos\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}\right) = \frac{9-16}{\sqrt{25}.\sqrt{25}} = \frac{-7}{25}.$$

8. (h.96) a) Đặt $O = AC \cap BD$, $O' = A'C' \cap B'D'$.



Hình 96

Ta có : $O = \left(\frac{x_1 + x_3}{2} ; \frac{y_1 + y_3}{2} ; \frac{z_1 + z_3}{2}\right)$,

$$O' = \left(\frac{x'_2 + x'_4}{2}, \frac{y'_2 + y'_4}{2}, \frac{z'_2 + z'_4}{2}\right).$$

Từ $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{OO'}$, $\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{OO'}$,

$\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{OO'}$, $\overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{OO'}$

suy ra :

$$A' = \left(\frac{x_1 + x'_2 + x'_4 - x_3}{2} ; \frac{y_1 + y'_2 + y'_4 - y_3}{2} ; \frac{z_1 + z'_2 + z'_4 - z_3}{2}\right),$$

$$C' = \left(\frac{x'_2 + x'_4 - x_1 + x_3}{2} ; \frac{y'_2 + y'_4 - y_1 + y_3}{2} ; \frac{z'_2 + z'_4 - z_1 + z_3}{2}\right),$$

$$B = \left(\frac{x_1 + x_3 + x'_2 - x'_4}{2} ; \frac{y_1 + y_3 + y'_2 - y'_4}{2} ; \frac{z_1 + z_3 + z'_2 - z'_4}{2}\right),$$

$$D = \left(\frac{x_1 + x_3 - x'_2 + x'_4}{2} ; \frac{y_1 + y_3 - y'_2 + y'_4}{2} ; \frac{z_1 + z_3 - z'_2 + z'_4}{2}\right).$$

b) Ta có $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$. Đặt $C = (x ; y ; z)$, ta có

$$\begin{cases} x - 1 = (2-1) + (1-1) \\ y - 0 = (1-0) + (-1-0) \\ z - 1 = (2-1) + (1-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow C = (2 ; 0 ; 2).$$

Mặt khác $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{CC'} \Rightarrow A' = (3 ; 5 ; -6)$

$\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} \Rightarrow B' = (4 ; 6 ; -5)$

$\overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{CC'} \Rightarrow D' = (3 ; 4 ; -6)$.

9. a) $[\vec{u},\vec{v}]=\left(\begin{vmatrix}2 & -3\\ 1 & 2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-3 & 1\\ 2 & -4\end{vmatrix};\begin{vmatrix}1 & 2\\ -4 & 1\end{vmatrix}\right)=(7\ ;10\ ;9).$

b) $\vec{u}=(3\ ;2\ ;-1)$, $\vec{v}=(-1\ ;-3\ ;1)$

$\Rightarrow[\vec{u},\vec{v}]=\left(\begin{vmatrix}2 & -1\\ -3 & 1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 1 & -1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}3 & 2\\ -1 & -3\end{vmatrix}\right)=(-1\ ;-2\ ;-7).$

c) $[\vec{u},\vec{v}]=\left(\begin{vmatrix}1 & -2\\ 0 & -4\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-2 & 0\\ -4 & 3\end{vmatrix};\begin{vmatrix}0 & 1\\ 3 & 0\end{vmatrix}\right)=(-4\ ;-6\ ;-3).$

d) $\vec{u}=(4\ ;0\ ;1)$, $\vec{v}=(2\ ;-1\ ;0)$

$\Rightarrow[\vec{u},\vec{v}]=\left(\begin{vmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{vmatrix};\begin{vmatrix}1 & 4\\ 0 & 2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}4 & 0\\ 2 & -1\end{vmatrix}\right)=(1\ ;2\ ;-4).$

10. a) $[\vec{u},\vec{v}]=\left(\begin{vmatrix}3 & 2\\ 1 & -3\end{vmatrix};\begin{vmatrix}2 & 0\\ -3 & -4\end{vmatrix};\begin{vmatrix}0 & 3\\ -4 & 1\end{vmatrix}\right)=(-11\ ;-8\ ;12).$

$\Rightarrow[\vec{u},\vec{v}].\vec{w}=(-11).1+(-8)(-2)+12.2=29.$

b) $[\vec{u},\vec{v}].\vec{w}=80.$

c) $[\vec{u},\vec{v}].\vec{w}=1.$

11. Ta gọi $A(1\ ;1\ ;1)$, $B(2\ ;3\ ;4)$; $C\ (7\ ;7\ ;5)$; $D(6\ ;5\ ;2)$.

Khi đó $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}=(1\ ;2\ ;3)$. Vậy $ABCD$ là hình bình hành.

Suy ra $\qquad S_{ABCD}=\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right]\right|.$

Ta có $\overrightarrow{AB}=(1\ ;2\ ;3)$, $\overrightarrow{AD}=(5\ ;4\ ;1)$

$\Rightarrow\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right]=\left(\begin{vmatrix}2 & 3\\ 4 & 1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & 5\end{vmatrix};\begin{vmatrix}1 & 2\\ 5 & 4\end{vmatrix}\right)=(-10\ ;14\ ;-6)$

$\Rightarrow S_{ABCD}=\sqrt{(-10)^2+14^2+(-6)^2}=\sqrt{332}=2\sqrt{83}.$

12. $V_{\text{hộp}}=75.$

13. a) Điểm cần tìm có toạ độ $(0\ ;y\ ;0)$.

Từ giả thiết tính được $y=\dfrac{11}{6}$.

Đáp số : $\left(0;\dfrac{11}{6};0\right)$.

b) Điểm M cần tìm thuộc mp(Oxz) nên $M = (x\ ;\ 0\ ;\ z)$.

Từ giả thiết, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}(x-1)^2+(0-1)^2+(z-1)^2=(x+1)^2+(0-1)^2+z^2\\(x-1)^2+(0-1)^2+(z-1)^2=(x-3)^2+(0-1)^2+(z+1)^2.\end{cases}$$

Giải hệ, ta được $x=\frac{5}{6},\ z=-\frac{7}{6}$. Vậy $M=\left(\frac{5}{6}\ ;0\ ;\ -\frac{7}{6}\right)$.

14. Đường thẳng AB cắt mp(Oyz) tại $M \Rightarrow M = (0\ ;\ y\ ;\ z)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MA}=(2\ ;-1-y\ ;\ 7-z),\ \overrightarrow{MB}=(4\ ;\ 5-y\ ;-2-z).$$

Từ $\overrightarrow{MA}=k\overrightarrow{MB}$, ta có hệ $\begin{cases}2=k.4\\-1-y=k(5-y)\\7-z=k(-2-z)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k=\frac{1}{2}\\y=-7\\z=16.\end{cases}$

15. a) Không đồng phẳng.

b) Đồng phẳng.

c) Đồng phẳng.

d) Không đồng phẳng.

16. a) $[\vec{u},\vec{v}]=\left(\begin{vmatrix}-1&1\\3&-1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}1&2\\-1&m\end{vmatrix};\begin{vmatrix}2&-1\\m&3\end{vmatrix}\right)$

$= (-2\ ;\ m+2\ ;\ m+6)$.

$[\vec{u},\vec{v}].\vec{w}=-2+2m+4+m+6=3m+8.$

$\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow [\vec{u},\vec{v}].\vec{w}=0 \Leftrightarrow 3m+8=0 \Leftrightarrow m=-\frac{8}{3}$.

b) $m \neq 1$ và $m \neq 9$.

c) Gọi vectơ phải tìm là $\vec{w}\,(x\ ;\ y\ ;\ z)$.

Theo giả thiết $|\vec{w}| = x^2+y^2+z^2=1$

$$\cos(\vec{u},\vec{w})=\cos45^{\circ}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\frac{x+y+2z}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow x+y+2z=\sqrt{3}.$$

Mặt khác $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ đồng phẳng nên $\vec{w} = k\vec{u} + l\vec{v}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = k - l \\ y = k + 3l \\ z = 2k + l \end{cases} \Rightarrow 5x + 3y - 4z = 0.$$

Vậy ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y + 2z = \sqrt{3} \\ 5x + 3y - 4z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5z - \dfrac{3\sqrt{3}}{2} \\ y = \dfrac{5\sqrt{3}}{2} - 7z \end{cases}$$

$$\Rightarrow 150z^2 - 100\sqrt{3}\,z + 49 = 0$$

$$\Rightarrow z = \frac{\left(10 \pm \sqrt{2}\right)\sqrt{3}}{30} \Rightarrow x = \frac{\left(1 \pm \sqrt{2}\right)\sqrt{3}}{6}, y = \frac{\left(5 \mp 7\sqrt{2}\right)\sqrt{3}}{30}.$$

Kết luận : Có hai vectơ thoả mãn yêu cầu của bài toán :

$$\left(\frac{\left(1 + \sqrt{2}\right)\sqrt{3}}{6} ; \frac{\left(5 - 7\sqrt{2}\right)\sqrt{3}}{30} ; \frac{\left(10 + \sqrt{2}\right)\sqrt{3}}{30}\right),$$

$$\left(\frac{\left(1 - \sqrt{2}\right)\sqrt{3}}{6} ; \frac{\left(5 + 7\sqrt{2}\right)\sqrt{3}}{30} ; \frac{(10 - \sqrt{2})\sqrt{3}}{30}\right).$$

17. a) $[\vec{u},\vec{v}] = \left(\begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}\right) = (7 ; -3 ; -5)$

$$\Rightarrow [\vec{u},\vec{v}].\vec{w} = 21 + 6 - 20 = 7 \neq 0.$$

Vậy $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ không đồng phẳng.

b) $\vec{a} = m\vec{u} + n\vec{v} + k\vec{w}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3m + 2n + 3k = -4 \\ 7m + 3n - 2k = -12 \\ n + 4k = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -5 \\ n = 7 \\ k = -1. \end{cases}$$

Vậy $\vec{a} = -5\vec{u} + 7\vec{v} - \vec{w}$.

18. Trên Ox, Oy, Oz lần lượt lấy ba điểm A, B, C sao cho :

$$OA = OB = OC = 1.$$

Khi đó vectơ $\vec{u} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ là vectơ chỉ phương của tia phân giác trong của góc yOz. Từ giả thiết ta suy ra :

$$\overrightarrow{OA}.\vec{u} = 0$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA}.\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC} = 0$$
$$\Leftrightarrow OA.OB.\cos\widehat{xOy} + OA.OC.\cos\widehat{xOz} = 0$$
$$\Leftrightarrow \cos\widehat{xOy} + \cos\widehat{xOz} = 0$$
$$\Rightarrow \widehat{xOy} + \widehat{xOz} = 180^{\circ}.$$

19. a) $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = 0 \Leftrightarrow 2 + m - 3 = 0 \Leftrightarrow m = 1.$

b) $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow 3 + \log_3 5.\log_5 3 + 4m = 0 \Leftrightarrow 4 + 4m = 0 \Rightarrow m = -1.$

c) $t = -\dfrac{\pi}{24} + \dfrac{k\pi}{4}$ hoặc $t = \dfrac{2\pi}{3} + l\pi,\ k, l \in \mathbb{Z}.$

d) $\vec{b} = (4\sqrt{2}\,; -2; 8)$ hoặc $\vec{b} = (-4\sqrt{2}\ ; 2\ ;\ -8).$

e) Vì $\vec{b}$ cùng phương với $\vec{a}$ nên $\vec{b} = (2k\ ; -k\ ; 0).$

Ta có $\vec{a}.\vec{b} = 10 \Rightarrow 4k + k = 10 \Rightarrow k = 2.$

Vậy vectơ phải tìm là $\vec{b} = (4\ ; -2\ ; 0).$

20. a) Giả sử $\vec{u}\,(x\ ; y\ ; z)$ là vectơ đơn vị phải tìm. Từ giả thiết ta có hệ :

$$\begin{cases} |\vec{u}| = 1 \\ \vec{u}.\vec{i} = 0 \\ \vec{u}.\vec{a} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x = 0 \\ 3x + 6y + 8z = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x = 0, y = -\dfrac{4}{5}, z = \dfrac{3}{5}$ hoặc $x = 0, y = \dfrac{4}{5}, z = -\dfrac{3}{5}.$

Có hai vectơ $\vec{u}$ với toạ độ là $\left(0\ ; -\dfrac{4}{5}\ ; \dfrac{3}{5}\right), \left(0\ ; \dfrac{4}{5}\ ; -\dfrac{3}{5}\right).$

b) Giả sử $\vec{b}\,(x\ ; y\ ; z)$ là vectơ phải tìm. Từ giả thiết ta có hệ

$$\begin{cases} \vec{b} = k\vec{a} \\ |\vec{b}| = \sqrt{14} \\ \vec{b}.\vec{j} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k \\ y = -2k \\ z = 3k \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14,\ y > 0. \end{cases}$$

Vì $y = -2k > 0$ nên $k < 0$.

Ta có $\begin{cases} k^2 + 4k^2 + 9k^2 = 14 \\ k < 0 \end{cases} \Rightarrow k = -1.$

Vậy $\vec{b} = (-1 ; 2 ; -3)$.

c) $\vec{u} = \left(\dfrac{2-\sqrt{2}}{2} ; \dfrac{2+\sqrt{2}}{2} ; 1\right)$ hoặc $\vec{u} = \left(\dfrac{2+\sqrt{2}}{2} ; \dfrac{2-\sqrt{2}}{2} ; 1\right)$.

d) Giả sử $\vec{u} = (x ; y ; z)$ là vectơ phải tìm. Từ giả thiết của bài toán, ta có hệ :

$$\begin{cases} \vec{u}.\vec{a} = 0 \\ \vec{u}.\vec{b} = 0 \\ |\vec{u}| = 3 \\ \vec{u}.\vec{k} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + 3z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 9 \\ z < 0. \end{cases}$$

Từ hai phương trình đầu của hệ rút ra $x = -2z$, $y = z$, thế vào phương trình thứ ba của hệ, ta có : $6z^2 = 9$.

Vì $z < 0$ nên $z = -\sqrt{\dfrac{3}{2}}$, suy ra $x = 2\sqrt{\dfrac{3}{2}}$, $y = -\sqrt{\dfrac{3}{2}}$.

Vectơ $\vec{u}$ phải tìm là $\vec{u} = \left(2\sqrt{\dfrac{3}{2}} ; -\sqrt{\dfrac{3}{2}} ; -\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right)$.

21. a) $\overrightarrow{AB} = (-1 ; 1 ; 1)$, $\overrightarrow{AC} = (0 ; -1 ; 2)$, $\overrightarrow{AD} = (0 ; 0 ; 1)$.

Ta có : $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD} = 1 \neq 0 \Rightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ không đồng phẳng. Do đó bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng và

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right| = \frac{1}{6}.$$

b) Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC thì $G = \left(\dfrac{2}{3} ; 1 ; 1\right)$.

Gọi G' là trọng tâm của tứ diện $ABCD$ thì $G' = \left(\dfrac{3}{4} ; 1 ; 1\right)$.

c) $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right| = \dfrac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}^2} = \dfrac{\sqrt{14}}{2}.$

$$S_{ACD} = \frac{1}{2}\left\|\left[\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right]\right\| = \frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}^2} = \frac{1}{2}.$$

$$S_{ADB} = \frac{1}{2}\left\|\left[\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}\right]\right\| = \frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$S_{BCD} = \frac{1}{2}\left\|\left[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}\right]\right\| = \frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

d) Từ công thức tính thể tích khối tứ diện $V = \frac{1}{3}Bh$ (B là diện tích đáy, h là chiều cao tương ứng) ta suy ra $h = \frac{3V}{B}$.

Vậy nếu gọi h_A, h_B, h_C, h_D lần lượt là chiều cao hạ từ đỉnh A, B, C, D thì ta có :

$$h_A = \frac{3V}{S_{BCD}} = \frac{3.\frac{1}{6}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad h_B = \frac{3V}{S_{ACD}} = \frac{3.\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = 1,$$

$$h_C = \frac{3V}{S_{ABD}} = \frac{3.\frac{1}{6}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad h_D = \frac{3V}{S_{ABC}} = \frac{3.\frac{1}{6}}{\frac{\sqrt{14}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{14}}.$$

e) Vì $\overrightarrow{AB} = (-1\ ;\ 1\ ;\ 1)$, $\overrightarrow{CD} = (0\ ;\ 1\ ;\ -1)$ nên $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0$, suy ra góc giữa AB và CD bằng 90^o.

g) Gọi $I(x\ ;\ y\ ;\ z)$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$. Khi đó, ta có

$$\begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IA^2 = IC^2 \\ IA^2 = ID^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = x^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = (x-1)^2 + y^2 + (z-2)^2 \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 2y + 2z = 3 \\ -2y + 4z = 3 \\ 2z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \\ z = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Vậy tâm của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ là $I\left(-\frac{3}{2};-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ và bán kính của mặt cầu đó là

$$R = ID = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{35}}{2}.$$

Do đó, phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ là

$$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 + \left(y+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(z-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{35}{4}.$$

22. a) Ta có $\overrightarrow{CA} = (-1\ ;-1\ ;-1)$, $\overrightarrow{CB} = (-2\ ;-1\ ;0)$

$$\Rightarrow \left[\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right] = \left(\begin{vmatrix}-1 & -1\\ -1 & 0\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-1 & -1\\ 0 & -2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-1 & -1\\ -2 & -1\end{vmatrix}\right) = (-1\ ;2\ ;-1) \neq \vec{0}$$

$\Rightarrow \overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$ không cùng phương hay A, B, C không thẳng hàng, tức A, B, C là ba đỉnh của một tam giác.

b) Chu vi tam giác ABC bằng $AB + BC + CA = \sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{3}$.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right]\right| = \frac{1}{2}\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-1)^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

c) Giả sử $D = (x\ ;y\ ;z)$, ta có : $\overrightarrow{AB} = (-1\ ;0\ ;1)$, $\overrightarrow{DC} = (2-x\ ;1-y\ ;1-z)$.

Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases}2-x=-1\\ 1-y=0\\ 1-z=1\end{cases} \Rightarrow D = (3\ ;1\ ;0)$.

d) Gọi h_A là đường cao của tam giác ABC kẻ từ đỉnh A, ta có :

$$h_A = \frac{2S_{ABC}}{BC} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{30}}{5}.$$

e) $\cos A = \dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AC}\right|} = 0 \Rightarrow \widehat{A} = 90^{\circ}$ (tam giác ABC vuông tại A).

$$\cos B = \frac{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BA}\right|.\left|\overrightarrow{BC}\right|} = \frac{2}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{5}.$$

$$\cos C = \frac{\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}}{\left|\overrightarrow{CA}\right|.\left|\overrightarrow{CB}\right|} = \frac{3}{\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{15}}{5}.$$

g) Tam giác ABC vuông tại A nên trực tâm H trùng A. Vậy $H = (1 ; 0 ; 0)$.
Ta có thể làm cách khác như sau :

Gọi $H(x ; y ; z)$ là trực tâm của tam giác ABC, ta có hệ

$$\begin{cases} \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC} = 0 \\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AH} \text{ đồng phẳng} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC} = 0 \\ \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AH} = 0. \end{cases}$$

Ta có : $\overrightarrow{AH} = (x - 1 ; y ; z)$, $\overrightarrow{BC} = (2 ; 1 ; 0)$, $\overrightarrow{BH} = (x ; y ; z - 1)$,

$\overrightarrow{AB} = (-1 ; 0 ; 1)$, $\overrightarrow{AC} = (1 ; 1 ; 1)$

$\Rightarrow \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (-1 ; 2 ; -1)$, $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AH} = 1 - x + 2y - z$.

Vậy ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} 2x - 2 + y = 0 \\ x + y + z - 1 = 0 \\ 1 - x + 2y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 2 \\ x + y + z = 1 \\ x - 2y + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow H = (1 ; 0 ; 0).$$

h) Tam giác ABC vuông tại A nên tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác là trung điểm của cạnh huyền BC. Do đó $I = \left(1 ; \frac{1}{2} ; 1\right)$.

Ta có thể làm cách khác như sau :

Gọi $I(x ; y ; z)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Ta có hệ

$$\begin{cases} AI = BI \\ AI = CI \\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AI} \text{ đồng phẳng} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AI^2 = BI^2 \\ AI^2 = CI^2 \\ \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AI} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x - 1)^2 + y^2 + z^2 = x^2 + y^2 + (z - 1)^2 \\ (x - 1)^2 + y^2 + z^2 = (x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 \\ 1 - x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{2} \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow I = \left(1 ; \frac{1}{2} ; 1\right).$$

23. a) Ta có $\overrightarrow{AB} = (1 ; -3 ; 4)$, $\overrightarrow{AC} = (-5 ; 5 ; 6)$, $\overrightarrow{BC} = (-6 ; 8 ; 2)$

$\Rightarrow \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (-38 ; -26 ; -10)$.

Vậy $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}\sqrt{38^2 + 26^2 + 10^2} = \sqrt{555}$,

$$h_A = \frac{2S_{ABC}}{BC} = \frac{2\sqrt{555}}{\sqrt{104}} = \frac{\sqrt{555}}{\sqrt{26}}.$$

b) Gọi D là chân đường phân giác kẻ từ B, giả sử $D = (x ; y ; z)$.

Ta có $\dfrac{DA}{DC} = \dfrac{BA}{BC} = \dfrac{\sqrt{26}}{\sqrt{104}} = \dfrac{1}{2}$.

Vì D nằm giữa A, C (phân giác trong) nên $\overrightarrow{DA} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{DC}$ hay

$$\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{DA} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(1-x) = x+4 \\ 2(2-y) = y-7 \\ 2(-1-z) = z-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{2}{3} \\ y = \dfrac{11}{3} \\ z = 1. \end{cases}$$

Vậy $D = \left(-\dfrac{2}{3} ; \dfrac{11}{3} ; 1\right) \Rightarrow BD = \dfrac{2\sqrt{74}}{3}$.

24. Giả sử $\vec{a} = (x_1 ; y_1 ; z_1)$, $\vec{b} = (x_2 ; y_2 ; z_2)$, $\vec{c} = (x_3 ; y_3 ; z_3)$

a) $$\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right)$$

$$= (y_1z_2 - y_2z_1 ; z_1x_2 - z_2x_1 ; x_1y_2 - x_2y_1)$$

$$= -(y_2z_1 - y_1z_2 ; z_2x_1 - z_1x_2 ; x_2y_1 - x_1y_2)$$

$$= -\left(\begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} z_2 & x_2 \\ z_1 & x_1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}\right)$$

$$= -\left[\vec{b}, \vec{a}\right].$$

b) Từ câu a) ta có $[\vec{a}, \vec{a}] = -[\vec{a}, \vec{a}]$, suy ra $[\vec{a}, \vec{a}] = \vec{0}$.

c) $k\left[\vec{a},\vec{b}\right] = \left(k\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}; k\begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}; k\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right)$

$= \left(\begin{vmatrix} ky_1 & kz_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} kz_1 & kx_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} kx_1 & ky_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right)$

$= \left[k\vec{a},\vec{b}\right].$

Tương tự : $k\left[\vec{a},\vec{b}\right] = \left[\vec{a},k\vec{b}\right].$

d) $\left[\vec{c},\vec{a}+\vec{b}\right]$

$= \left(\begin{vmatrix} y_3 & z_3 \\ y_1+y_2 & z_1+z_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} z_3 & x_3 \\ z_1+z_2 & x_1+x_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1+x_2 & y_1+y_2 \end{vmatrix}\right)$

$= \left(\begin{vmatrix} y_3 & z_3 \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_3 & z_3 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} z_3 & x_3 \\ z_1 & x_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z_3 & x_3 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right)$

$= \left(\begin{vmatrix} y_3 & z_3 \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} z_3 & x_3 \\ z_1 & x_1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}\right) + \left(\begin{vmatrix} y_3 & z_3 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} z_3 & x_3 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right)$

$= \left[\vec{c},\vec{a}\right] + \left[\vec{c},\vec{b}\right].$

e) $\vec{a}.\left[\vec{b},\vec{c}\right] = x_1\begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} + y_1\begin{vmatrix} z_2 & x_2 \\ z_3 & x_3 \end{vmatrix} + z_1\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}$

$= x_3\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} + y_3\begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} + z_3\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$

$= \left[\vec{a},\vec{b}\right].\vec{c}.$

g) $VP = \left|\vec{a}\right|^2.\left|\vec{b}\right|^2 - \left(\vec{a}.\vec{b}\right)^2 = \left|\vec{a}\right|^2.\left|\vec{b}\right|^2 - \left|\vec{a}\right|^2.\left|\vec{b}\right|^2\cos^2\alpha$

$= \left|\vec{a}\right|^2.\left|\vec{b}\right|^2(1-\cos^2\alpha) = \left|\vec{a}\right|^2.\left|\vec{b}\right|^2\sin^2\alpha$

$= \left\|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right\|^2 = VT$ (ở đây $\alpha = \left(\vec{a},\vec{b}\right)$).

25. Giả sử $D = (0\ ;\ y\ ;\ 0)$ thuộc trục Oy. Ta có :

$\overrightarrow{AB} = (1\ ;\ -1\ ;\ 2)$, $\overrightarrow{AD} = (-2\ ;\ y-1\ ;\ 1)$, $\overrightarrow{AC} = (0\ ;\ -2\ ;\ 4)$

$\Rightarrow \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right] = (0\ ;\ -4\ ;\ -2)$

$\Rightarrow \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD} = -4(y-1) - 2 = -4y + 2.$

Theo giả thiết $V_{ABCD} = 5 \Leftrightarrow \frac{1}{6}\left|-4y + 2\right| = 5$

$$\Leftrightarrow \left|-4y + 2\right| = 30 \Rightarrow y = -7, y = 8.$$

Vậy có hai điểm D trên trục Oy : $(0 ; -7 ; 0)$ và $(0 ; 8 ; 0)$.

26. a) Ta có $\overrightarrow{BA} = (5 ; 0 ; 10)$, $\overrightarrow{CA} = (-3 ; 0 ; 6)$, $\overrightarrow{CB} = (-8 ; 0 ; -4)$.

Do $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = 24 - 24 = 0$ nên ABC là tam giác vuông tại C.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}CA.CB = \frac{1}{2}.3\sqrt{5}.4\sqrt{5} = 30.$$

Ta lại có $p = \frac{1}{2}(AB + BC + CA) = \frac{1}{2}\left(5\sqrt{5} + 3\sqrt{5} + 4\sqrt{5}\right) = 6\sqrt{5}.$

Mặt khác $S = p.r$, suy ra $r = \frac{S}{p} = \frac{30}{6\sqrt{5}} = \sqrt{5}$.

b) Ta có $\left[\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right] = \left(\begin{vmatrix}0 & 10\\0 & 4\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}10 & 5\\4 & 8\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}5 & 0\\8 & 0\end{vmatrix}\right) = (0 ; 60 ; 0)$,

$\overrightarrow{BD} = (4 ; 3 ; 5)$

$\Rightarrow V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right].\overrightarrow{BD}\right| = \frac{1}{6}\left|0.4 + 60.3 + 0.5\right| = 30.$

c) Gọi $I(x ; y ; z)$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

Từ điều kiện $IA^2 = IB^2$, $IA^2 = IC^2$, $IA^2 = ID^2$, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}-10x - 20z + 15 = 0\\6x - 12z + 15 = 0\\-2x + 6y - 10z + 35 = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x = -\frac{1}{2}\\y = -\frac{13}{3}\\z = 1.\end{cases}$$

Vậy mặt cầu cần tìm có tâm $I\left(-\frac{1}{2}; -\frac{13}{3}; 1\right)$ và bán kính là

$$R = IC = \sqrt{\left(5 + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(-1 + \frac{13}{3}\right)^2 + (0 - 1)^2}$$

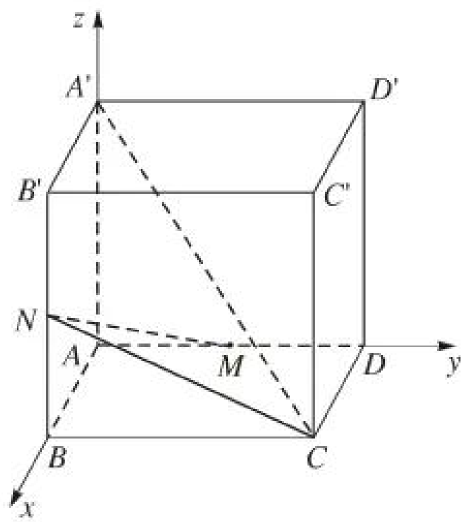
$$= \sqrt{\frac{121}{4} + \frac{100}{9} + 1} = \sqrt{\frac{1525}{36}}.$$

Do đó, phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ là

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{13}{3}\right)^2+(z-1)^2=\frac{1525}{36}.$$

27. Thiết lập hệ trục toạ độ như hình vẽ (h.97). Ta có

$A(0\,;0\,;0)$; $A'(0\,;0\,;a)$; $C'(a\,;a\,;a)$;
$B(a\,;0\,;0)$; $D'(0\,;a\,;a)$; $B'(a\,;0\,;a)$;
$C(a\,;a\,;0)$.



Hình 97

a) Ta có : $\overrightarrow{A'C}=(a\,;a\,;-a)$,

$\overrightarrow{AB'}=(a\,;0\,;a)$, $\overrightarrow{AD'}=(0\,;a\,;a)$,

$\Rightarrow \overrightarrow{A'C}.\overrightarrow{AB'}=0,\ \overrightarrow{A'C}.\overrightarrow{AD'}=0$

$\Rightarrow \overrightarrow{A'C}\perp\overrightarrow{AB'},\ \overrightarrow{A'C}\perp\overrightarrow{AD'}$

$\Rightarrow A'C\perp \text{mp}(AB'D')$.

b) Ta lại có $N\left(a;0;\frac{a}{2}\right), M\left(0;\frac{a}{2};0\right)\Rightarrow \overrightarrow{MN}=\left(a;-\frac{a}{2};\frac{a}{2}\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{A'C}=a^2-\frac{a^2}{2}-\frac{a^2}{2}=0\Rightarrow MN\perp A'C.$

c) $\overrightarrow{AC'}=(a\,;a\,;a)$ nên

$$\cos\left(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{AC'}\right)=\frac{\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AC'}}{\left|\overrightarrow{MN}\right|.\left|\overrightarrow{AC'}\right|}=\frac{a^2-\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{2}}{\sqrt{\frac{3a^2}{2}}.\sqrt{3a^2}}=\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

d) $V_{A'CMN}=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{A'N},\overrightarrow{A'M}\right].\overrightarrow{A'C}\right|.$

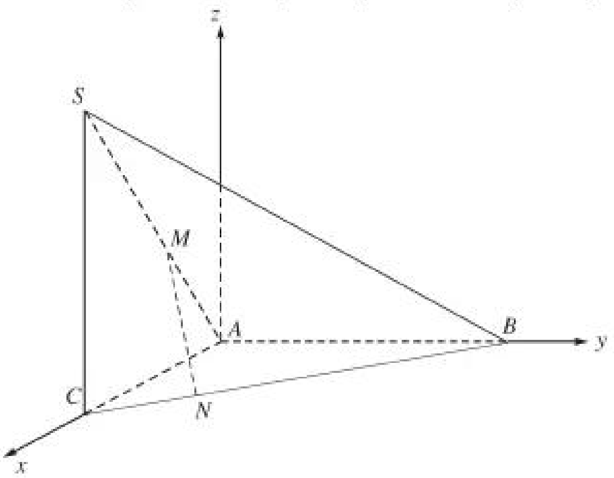
Ta có $\overrightarrow{A'N}=\left(a\,;\,0\,;\,-\frac{a}{2}\right)$, $\overrightarrow{A'M}=\left(0\,;\,\frac{a}{2}\,;\,-a\right)$.

$$\Rightarrow\left[\overrightarrow{A'N},\overrightarrow{A'M}\right]=\left(\begin{vmatrix}0 & -\frac{a}{2}\\ \frac{a}{2} & -a\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-\frac{a}{2} & a\\ -a & 0\end{vmatrix};\begin{vmatrix}a & 0\\ 0 & \frac{a}{2}\end{vmatrix}\right)=\left(\frac{a^2}{4}\,;\,a^2\,;\,\frac{a^2}{2}\right)$$

$$\Rightarrow V_{A'CMN}=\frac{1}{6}\left|\frac{a^3}{4}+a^3-\frac{a^3}{2}\right|=\frac{1}{6}\left|\frac{3a^3}{4}\right|=\frac{a^3}{8}.$$

28. a) Ta chọn hệ trục $Oxyz$ sao cho gốc toạ độ O trùng A, tia Ox chứa AC, tia Oy chứa AB và tia Oz cùng hướng với tia CS (h.98). Khi đó, ta có :

$$A(0\,;0\,;0),\ B\left(0;a\sqrt{2};0\right),\ C\left(a\sqrt{2};0;0\right),\ S\left(a\sqrt{2};0;a\sqrt{2}\right),$$



Hình 98

$$M\left(\frac{t\sqrt{2}}{2};0;\frac{t\sqrt{2}}{2}\right)\ ;\ N\left(a\sqrt{2}-\frac{t\sqrt{2}}{2};\frac{t\sqrt{2}}{2};0\right)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MN}=\left(\sqrt{2}(a-t);\frac{t\sqrt{2}}{2};-\frac{t\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow MN=\sqrt{2(a^2-2at+t^2)+\frac{t^2}{2}+\frac{t^2}{2}}=\sqrt{3t^2-4at+2a^2}$$

$$=\sqrt{3\left(t-\frac{2a}{3}\right)^2+\frac{2a^2}{3}}\geq\frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Dấu = xảy ra khi $t=\dfrac{2a}{3}$ thoả mãn điều kiện $0<t<2a$.

Vậy MN ngắn nhất bằng $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$ khi $t=\dfrac{2a}{3}$.

b) Khi MN ngắn nhất thì :

$$\overrightarrow{MN}=\left(\frac{a\sqrt{2}}{3};\frac{a\sqrt{2}}{3};-\frac{a\sqrt{2}}{3}\right)\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{SA}=0\\ \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{BC}=0\end{cases}$$

$\Rightarrow MN$ là đường vuông góc chung của SA và BC.

29. a) $(x-1)^2+y^2+(z+1)^2=16$.

b) $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=\frac{5}{4}$.

c) $x^2+y^2+z^2=30\pm 2\sqrt{29}$.

d) $(x-3)^2+(y+2)^2+(z-4)^2=41$.

e) $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=9$.

g) $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=1$.

h) $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=4$.

30. a) Tâm $I(1\,;\,3\,;\,4)$, bán kính $R=5$.

b) Phương trình đã cho không là phương trình mặt cầu, nó biểu thị một điểm $(-5\,;\,-2\,;\,-1)$.

c) Tâm $I\left(0\,;\,\frac{1}{2}\,;\,0\right)$, bán kính $R=\frac{1}{2}$.

d) Tâm $I\left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{3}{4}\,;\,-\frac{5}{4}\right)$, bán kính $R=\frac{3\sqrt{6}}{4}$.

e) Không là phương trình mặt cầu.

31. a) Gọi I là tâm mặt cầu. Vì $I\in \text{mp}(Oxy)$ nên $I=(x\,;\,y\,;\,0)$. Theo giả thiết, ta có $AI^2=BI^2=CI^2$, suy ra

$$\begin{cases}(x-1)^2+(y-2)^2+(0+4)^2=(x-1)^2+(y+3)^2+(0-1)^2\\(x-1)^2+(y-2)^2+(0+4)^2=(x-2)^2+(y-2)^2+(0-3)^2\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=-2\\y=1\end{cases}\Rightarrow I=(-2\,;\,1\,;\,0).$$

Bán kính của mặt cầu là

$$R=AI=\sqrt{(-2-1)^2+(1-2)^2+4^2}=\sqrt{26}.$$

Vậy phương trình mặt cầu là :

$$(x+2)^2+(y-1)^2+z^2=26.$$

b) Gọi I là tâm mặt cầu, $I\in Oz$ nên $I=(0\,;\,0\,;\,z)$.

Theo giả thiết $AI^2 = BI^2$, ta có phương trình

$$(-3)^2 + 1^2 + (z-2)^2 = (-1)^2 + (-1)^2 + (z+2)^2$$

$$\Rightarrow 8z = 8 \Rightarrow z = 1.$$

Vậy $I = (0 ; 0 ; 1)$ và $AI = \sqrt{11}$.

Phương trình mặt cầu cần tìm là

$$x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 11.$$

c) Phương trình mặt cầu (S) cần tìm có dạng

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0.$$

Ta có $A \in (S) \Leftrightarrow 2a + 2b + 2c - d = 3,$

$B \in (S) \Leftrightarrow 2a + 4b + 2c - d = 6,$

$C \in (S) \Leftrightarrow 2a + 2b + 4c - d = 6,$

$D \in (S) \Leftrightarrow 4a + 4b + 2c - d = 9.$

Từ đó suy ra $a = \dfrac{3}{2}$, $b = \dfrac{3}{2}$, $c = \dfrac{3}{2}$, $d = 6$.

Vậy phương trình mặt cầu (S) là

$$x^2 + y^2 + z^2 - 3x - 3y - 3z + 6 = 0.$$

32. Trước hết, ta xác định tâm và tính bán kính của mặt cầu đi qua bốn điểm A, A', B, C. Gọi $I(x ; y ; z)$ là tâm của mặt cầu đó, ta có $IA^2 = IA'^2 = IB^2 = IC^2$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x-a)^2 + y^2 + z^2 = (x-a')^2 + y^2 + z^2 \\ (x-a)^2 + y^2 + z^2 = x^2 + (y-b)^2 + z^2 \\ (x-a)^2 + y^2 + z^2 = x^2 + y^2 + (z-c)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2ax + a^2 = -2a'x + a'^2 \\ -2ax + a^2 = -2by + b^2 \\ -2ax + a^2 = -2cz + c^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = \frac{a+a'}{2} \Rightarrow y = \frac{b^2 + aa'}{2b} \text{ và } z = \frac{c^2 + aa'}{2c}.$$

Vậy $I = \left(\dfrac{a+a'}{2} ; \dfrac{b^2+aa'}{2b} ; \dfrac{c^2+aa'}{2c}\right)$.

Gọi R là bán kính mặt cầu, ta có

$$R^2 = IB^2 = \left(\frac{a+a'}{2}\right)^2 + \left(\frac{aa'-b^2}{2b}\right)^2 + \left(\frac{c^2+aa'}{2c}\right)^2.$$

Mặt khác $IB'^2 = \left(\frac{a+a'}{2}\right)^2 + \left(\frac{b^2+aa'}{2b} - b'\right)^2 + \left(\frac{c^2+aa'}{2c}\right)^2$

$$= \left(\frac{a+a'}{2}\right)^2 + \left(\frac{b^2-aa'}{2b}\right)^2 + \left(\frac{c^2+aa'}{2c}\right)^2 \text{ (vì } aa' = bb')$$

$$= IB^2 = R^2.$$

Tương tự $IC'^2 = IC^2 = R^2$.

Vậy B', C' cũng thuộc mặt cầu nói trên.

b) Gọi G là trọng tâm ΔABC, ta có $\overrightarrow{OG} = \left(\frac{a}{3} ; \frac{b}{3} ; \frac{c}{3}\right)$.

Để chứng minh OG vuông góc với mp$(A'B'C')$, ta chỉ cần chứng minh

$$\begin{cases} \overrightarrow{OG}.\overrightarrow{A'B'} = 0 \\ \overrightarrow{OG}.\overrightarrow{A'C'} = 0. \end{cases}$$

Vì $\overrightarrow{A'B'} = (-a' ; b' ; 0)$, $\overrightarrow{A'C'} = (-a' ; 0 ; c')$

nên $\overrightarrow{OG}.\overrightarrow{A'B'} = -\frac{aa'}{3} + \frac{bb'}{3} + 0 = 0,$

$$\overrightarrow{OG}.\overrightarrow{A'C'} = -\frac{aa'}{3} + 0 + \frac{cc'}{3} = 0 \text{ (đpcm).}$$

33. a) Là mặt cầu $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$.

b) Gọi G là trọng tâm tứ diện $ABCD$ thì $G = (1 ; 2 ; 3)$.

Ta có $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MG}$ nên

$$\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right| = 4 \Leftrightarrow 4\left|\overrightarrow{MG}\right| = 4 \Leftrightarrow MG = 1.$$

Vậy tập hợp các điểm $M(x ; y ; z)$ thoả mãn điều kiện đề bài là mặt cầu có phương trình :

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 1.$$

c) Là mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 - ax - by - cz + \frac{a^2+b^2+c^2}{2} = 0$.

34. a) Ta có $a = -2m$, $b = 2$, $c = m$, $d = m^2 + 4m$.

Phương trình đã cho là phương trình của một mặt cầu khi

$$a^2 + b^2 + c^2 - d = (-2m)^2 + 2^2 + m^2 - m^2 - 4m > 0$$

$$\Leftrightarrow (2m-1)^2 + 3 > 0\ \forall m.$$

Vậy phương trình đã cho là phương trình mặt cầu với mọi m. Bán kính mặt cầu là

$$R = \sqrt{(2m-1)^2 + 3} \geq \sqrt{3} \Rightarrow R_{\min} = \sqrt{3} \text{ khi } m = \frac{1}{2}.$$

b) Ta có : $a = \cos\alpha$, $b = -\sin\alpha$, $c = -2$, $d = -(4 + \sin^2\alpha)$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 - d = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha + 4 + 4 + \sin^2\alpha$$

$$= 9 + \sin^2\alpha > 0\ \ (\forall\alpha).$$

Phương trình đã cho là phương trình mặt cầu với mọi α.

Khi đó $R = \sqrt{9 + \sin^2\alpha}$.

Vì $0 \leq \sin^2\alpha \leq 1$ nên $3 \leq R \leq \sqrt{10}$.

Vậy $R_{\min} = 3$ khi $\alpha = k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$,

$$R_{\max} = \sqrt{10} \text{ khi } \alpha = \frac{\pi}{2} + l\pi\ (l \in \mathbb{Z}).$$