Chương III PHƯƠNG PHÁP TOẠ ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

A - CÁC KIẾN THỨC CƠ BẢN VÀ ĐỀ BÀI

§1. Hệ toạ độ trong không gian

I – CÁC KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. *Hệ toạ độ trong không gian*

Hệ gồm ba trục Ox, Oy, Oz đôi một vuông góc được gọi là hệ trục toạ độ vuông góc trong không gian.

Nếu ta lấy ba vectơ đơn vị $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ lần lượt nằm trên Ox, Oy, Oz thì :

$$\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1, \quad \vec{i}.\vec{j} = \vec{j}.\vec{k} = \vec{k}.\vec{i} = 0.$$

2. *Toạ độ của vectơ và của điểm*

$$\vec{u} = (x; y; z) \Leftrightarrow \vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$M = (x\ ;\ y\ ;\ z) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\ .$$

Nếu $A = (x_A\ ;\ y_A\ ;\ z_A)$, $B = (x_B\ ;\ y_B\ ;\ z_B)$ thì $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A\ ;\ y_B - y_A\ ;\ z_B - z_A)$.

3. *Vectơ bằng nhau. Toạ độ của vectơ tổng, vectơ hiệu*

Cho $\vec{u}\,(x_1\ ;\ y_1\ ;\ z_1)$, $\vec{v}\ (x_2\ ;\ y_2\ ;\ z_2)$. Khi đó

$$\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow x_1 = x_2,\ y_1 = y_2,\ z_1 = z_2.$$

$$\vec{u} \pm \vec{v} = (x_1 \pm x_2\ ;\ y_1 \pm y_2\ ;\ z_1 \pm z_2)$$

$$k\vec{u} = (kx_1\ ;\ ky_1\ ;\ kz_1),\ k \in$$

$$m\vec{u} + n\vec{v} = (mx_1 + nx_2\ ;\ my_1 + ny_2\ ;\ mz_1 + nz_2),\ \ m, n \in \quad .$$

4. *Hai vectơ cùng phương*

Hai vectơ $\vec{u}(x_1;y_1;z_1)$ và $\vec{v}(x_2;y_2;z_2)$ cùng phương $(\vec{u} \neq \vec{0})$

$\Leftrightarrow \exists k \in \quad : \vec{v} = k\vec{u}$, tức là

$$\begin{cases} x_2 = kx_1 \\ y_2 = ky_1 \\ z_2 = kz_1 \end{cases} \text{ hay } \frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1} = \frac{z_2}{z_1}.$$

5. *Tích vô hướng của hai vectơ*

Cho hai vectơ $\vec{u}(x_1 ; y_1 ; z_1)$, $\vec{v}(x_2 ; y_2 ; z_2)$. Khi đó :

$$\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos(\vec{u},\vec{v}) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u}^2} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$$

$$AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

$$\cos(\vec{u},\vec{v}) = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}.\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} \text{ với } \vec{u} \neq \vec{0},\ \vec{v} \neq \vec{0}$$

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0.$$

6. *Tích có hướng của hai vectơ*

Trong không gian $Oxyz$ cho hai vectơ $\vec{u}(x_1 ; y_1 ; z_1)$, $\vec{v}(x_2 ; y_2 ; z_2)$. Tích có hướng của hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$, kí hiệu là $[\vec{u},\vec{v}]$, được xác định bởi

$$[\vec{u},\vec{v}] = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right).$$

Tính chất :

$$[\vec{u},\vec{v}] \perp \vec{u},\ [\vec{u},\vec{v}] \perp \vec{v}$$

$$|[\vec{u},\vec{v}]| = |\vec{u}|.|\vec{v}|\sin(\vec{u},\vec{v})$$

$$\vec{u},\ \vec{v} \text{ cùng phương} \Leftrightarrow [\vec{u},\vec{v}] = \vec{0}$$

$$\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w} \text{ đồng phẳng} \Leftrightarrow [\vec{u},\vec{v}].\vec{w} = 0.$$

7. *Các ứng dụng của tích có hướng*

Diện tích tam giác : $S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right|$

Thể tích khối hộp : $V_{ABCD.\,A'B'C'D'} = \left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right].\overrightarrow{AA'}\right|$

Thể tích tứ diện : $V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right|$.

8. *Mặt cầu*

Mặt cầu tâm $I(a\ ;\ b\ ;\ c)$, bán kính R có phương trình

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2.$$

Ngược lại, phương trình

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0 \qquad (*)$$

là phương trình của một mặt cầu nếu có điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 > d$.

Khi đó $I(-a\ ;\ -b\ ;\ -c)$ là tâm của mặt cầu và $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$ là bán kính của mặt cầu.

Nếu $a^2 + b^2 + c^2 = d$, phương trình (*) xác định một điểm duy nhất

$$I(-a\ ;\ -b\ ;\ -c).$$

Nếu $a^2 + b^2 + c^2 < d$, không có điểm nào thoả mãn phương trình (*).

Chú ý. Trong cuốn sách này, khi nói đến các vectơ $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ mà không nói gì thêm, ta hiểu đó lần lượt là các vectơ đơn vị trên các trục Ox, Oy, Oz trong hệ trục toạ độ $Oxyz$.

II – ĐỀ BÀI

1. Cho ba vectơ $\vec{u}(1\ ;\ 2\ ;\ 3)$, $\vec{v}(2\ ;\ 2\ ;\ -1)$, $\vec{w}(4\ ;\ 0\ ;\ -4)$. Tìm toạ độ của vectơ $\vec{x}$, biết :

a) $\vec{x} = \vec{u} - \vec{v}$;

b) $\vec{x} = \vec{u} - \vec{v} + 2\vec{w}$;

c) $\vec{x} = 2\vec{u} + 4\vec{v} - \vec{w}$;

d) $\vec{x} = 5\vec{u} - 3\vec{v} - \frac{1}{2}\vec{w}$;

e) $2\vec{x} - 3\vec{u} = \vec{w}$;

g) $2\vec{u} + \vec{v} - \vec{w} + 3\vec{x} = \vec{0}$;

2. Cho $\vec{u} = (3 ; 2 ; -5)$. Trong các vectơ sau đây, vectơ nào cùng phương với $\vec{u}$?

$\vec{a} = (-6 ; -4 ; 10)$, $\vec{b} = \left(2; \frac{4}{3}; -\frac{10}{3}\right)$,

$\vec{c} = (6 ; 4 ; 10)$, $\vec{d} = (1 ; -4 ; 2)$.

3. Cho vectơ $\vec{u}$ có điểm đầu là $(1 ; -1 ; 3)$ và điểm cuối là $(-2 ; 3 ; 5)$.

Trong các vectơ sau đây, vectơ nào cùng phương với $\vec{u}$?

$\vec{a} = -6\vec{i} + 8\vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{b} = 4\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}$.

4. a) Cho $\vec{u} = (3 ; -5 ; 6)$, biết toạ độ điểm đầu của $\vec{u}$ là $(0 ; 6 ; 2)$. Tìm toạ độ điểm cuối của $\vec{u}$.

b) Cho $\vec{v} = (1 ; 1 ; 1)$, biết toạ độ điểm cuối của $\vec{v}$ là $(2 ; 1 ; 4)$. Tìm toạ độ điểm đầu của $\vec{v}$.

5. Bộ ba điểm A, B, C nào sau đây thẳng hàng ?

a) $A = (1 ; 3 ; 1)$, $B = (0 ; 1 ; 2)$, $C = (0 ; 0 ; 1)$;

b) $A = (1 ; 1 ; 1)$, $B = (-4 ; 3 ; 1)$, $C = (-9 ; 5 ; 1)$;

c) $A = (0 ; -2 ; 5)$, $B = (3 ; 4 ; 4)$, $C = (2 ; 2 ; 1)$;

d) $A = (1 ; -1 ; 5)$, $B = (0 ; -1 ; 6)$, $C = (3 ; -1 ; 5)$;

e) $A = (1 ; 2 ; 4)$, $B = (2 ; 5 ; 0)$, $C = (0 ; 1 ; 5)$.

6. a) Cho ba điểm $A(2 ; 5 ; 3)$, $B(3 ; 7 ; 4)$, $C(x ; y ; 6)$.

Tìm x, y để A, B, C thẳng hàng.

b) Cho hai điểm $A(-1 ; 6 ; 6)$, $B(3 ; -6 ; -2)$.

Tìm điểm M thuộc mp(Oxy) sao cho $MA + MB$ nhỏ nhất.

7. Chứng minh bốn điểm $A(1 ; -1 ; 1)$, $B(1 ; 3 ; 1)$, $C(4 ; 3 ; 1)$, $D(4 ; -1 ; 1)$ là các đỉnh của một hình chữ nhật.

Tính độ dài các đường chéo, xác định toạ độ của tâm hình chữ nhật đó. Tính côsin của góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BD}$.

8. a) Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ biết $A(x_1 ; y_1 ; z_1)$, $C(x_3 ; y_3 ; z_3)$, $B'(x'_2 ; y'_2 ; z'_2)$, $D'(x'_4 ; y'_4 ; z'_4)$. Tìm toạ độ các đỉnh còn lại.

b) Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Biết $A(1 ; 0 ; 1)$, $B(2 ; 1 ; 2)$, $D(1 ; -1 ; 1)$, $C'(4 ; 5 ; -5)$. Tìm toạ độ các đỉnh còn lại.

9. Tính tích có hướng $[\vec{u},\vec{v}]$, biết

a) $\vec{u} = (1 ; 2 ; -3)$, $\vec{v} = (-4 ; 1 ; 2)$;

b) $\vec{u} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{v} = -\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$;

c) $\vec{u} = (0 ; 1 ; -2)$, $\vec{v} = (3 ; 0 ; -4)$;

d) $\vec{u} = 4\vec{i} + \vec{k}$, $\vec{v} = 2\vec{i} - \vec{j}$;

10. Tính $[\vec{u},\vec{v}].\vec{w}$ biết

a) $\vec{u} = (0 ; 3 ; 2)$; $\vec{v} = (-4 ; 1 ; -3)$; $\vec{w} = (1 ; -2 ; 2)$;

b) $\vec{u} = 4\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$; $\vec{v} = \vec{j} + 5\vec{k}$; $\vec{w} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$;

c) $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$; $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$; $\vec{w} = \vec{i}$.

11. Chứng tỏ bốn điểm sau đây là bốn đỉnh của một hình bình hành và tính diện tích của hình bình hành đó : $(1 ; 1 ; 1)$, $(2 ; 3 ; 4)$, $(6 ; 5 ; 2)$, $(7 ; 7 ; 5)$.

12. Chứng tỏ tám điểm sau đây là tám đỉnh của một hình hộp và tính thể tích của hình hộp đó : $(0 ; 0 ; 0)$, $(3 ; 0 ; 0)$, $(0 ; 5 ; 1)$, $(3 ; 5 ; 1)$, $(2 ; 0 ; 5)$, $(5 ; 0 ; 5)$, $(2 ; 5 ; 6)$, $(5 ; 5 ; 6)$.

13. a) Tìm trên trục Oy điểm cách đều hai điểm $A(3 ; 1 ; 0)$, $B(-2 ; 4 ; 1)$.

b) Tìm trên mặt phẳng (Oxz) điểm cách đều ba điểm

$$A(1 ; 1 ; 1), B(-1 ; 1 ; 0), C(3 ; 1 ; -1).$$

14. Cho hai điểm $A(2 ; -1 ; 7)$, $B(4 ; 5 ; -2)$. Đường thẳng AB cắt mp(Oyz) tại điểm M. Điểm M chia đoạn thẳng AB theo tỉ số nào ? Tìm toạ độ điểm M.

15. Xét sự đồng phẳng của ba vectơ $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ trong mỗi trường hợp sau :

a) $\vec{u}(1 ; -1 ; 1)$, $\vec{v}(0 ; 1 ; 2)$, $\vec{w}(4 ; 2 ; 3)$;

b) $\vec{u}(4 ; 3 ; 4)$, $\vec{v}(2 ; -1 ; 2)$, $\vec{w}(1 ; 2 ; 1)$;

c) $\vec{u} = 4\vec{i} + 2\vec{j} + 5\vec{k}$, $\vec{v} = 3\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{w} = 2\vec{i} + \vec{k}$;

d) $\vec{u}(-3 ; 1 ; -2)$, $\vec{v}(1 ; 1 ; 1)$, $\vec{w}(-2 ; 2 ; 1)$;

16. a) Cho $\vec{u}(2 ; -1 ; 1)$, $\vec{v}(m ; 3 ; -1)$, $\vec{w}(1 ; 2 ; 1)$.

Tìm m để ba vectơ đồng phẳng.

b) Cho $\vec{u}(1 ; 2 ; 3)$, $\vec{v}(2 ; 1 ; m)$, $\vec{w}(2 ; m ; 1)$.

Tìm m để ba vectơ trên không đồng phẳng.

c) Cho $\vec{u}(1 ; 1 ; 2)$, $\vec{v}(-1 ; 3 ; 1)$. Tìm vectơ đơn vị đồng phẳng với $\vec{u}$, $\vec{v}$ và tạo với $\vec{u}$ góc 45°.

17. Cho ba vectơ $\vec{u}(3 ; 7 ; 0)$, $\vec{v}(2 ; 3 ; 1)$, $\vec{w}(3 ; -2 ; 4)$.

a) Chứng minh $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ không đồng phẳng.

b) Biểu thị vectơ $\vec{a}(-4 ; -12 ; 3)$ theo ba vectơ $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$.

18. Trong không gian cho ba tia Ox, Oy, Oz. Chứng minh rằng nếu tia Ox vuông góc với tia phân giác của góc $\widehat{yOz}$ thì $\widehat{xOy} + \widehat{xOz} = 180^{\circ}$.

19. a) Cho hai vectơ $\vec{a}(1 ; m ; -1)$ và $\vec{b}(2 ; 1 ; 3)$. Tìm m để $\vec{a} \perp \vec{b}$.

b) Cho hai vectơ $\vec{a}(1 ; \log_3 5 ; m)$ và $\vec{b}(3 ; \log_5 3 ; 4)$. Tìm m để $\vec{a} \perp \vec{b}$.

c) Cho hai vectơ $\vec{a}(2;\sqrt{3};1)$ và $\vec{b}(\sin 5t ; \cos 3t ; \sin 3t)$. Tìm t để $\vec{a} \perp \vec{b}$.

d) Cho vectơ $\vec{a}(2\sqrt{2};-1;4)$. Tìm vectơ $\vec{b}$ cùng phương với $\vec{a}$, biết rằng $|\vec{b}| = 10$.

e) Cho $\vec{a} = (2 ; -1 ; 0)$. Tìm vectơ $\vec{b}$ cùng phương với $\vec{a}$, biết rằng $\vec{a}.\vec{b} = 10$.

20. a) Tìm vectơ đơn vị vuông góc với trục Ox và vuông góc với vectơ $\vec{a}(3 ; 6 ; 8)$.

b) Cho vectơ $\vec{a}(1 ; -2 ; 3)$. Tìm toạ độ vectơ $\vec{b}$ cùng phương với vectơ $\vec{a}$ biết $\vec{b}$ tạo với trục Oy một góc nhọn và $|\vec{b}| = \sqrt{14}$.

c) Vectơ $\vec{u}$ có độ dài bằng 2, tạo với vectơ $\vec{a}(1 ; 1 ; 1)$ góc 30°, tạo với vectơ $\vec{b}(1 ; 1 ; 0)$ góc 45°. Tìm toạ độ của vectơ $\vec{u}$.

d) Vectơ $\vec{u}$ vuông góc với hai vectơ $\vec{a}(1 ; 1 ; 1)$ và $\vec{b}(1 ; -1 ; 3)$, $\vec{u}$ tạo với trục Oz một góc tù và $|\vec{u}| = 3$. Tìm toạ độ của vectơ $\vec{u}$.

21. Trong không gian $Oxyz$ cho bốn điểm $A(1 ; 1 ; 0)$, $B(0 ; 2 ; 1)$, $C(1 ; 0 ; 2)$, $D(1 ; 1 ; 1)$.

a) Chứng minh bốn điểm đó không đồng phẳng. Tính thể tích tứ diện $ABCD$.

b) Tìm toạ độ trọng tâm của tam giác ABC, trọng tâm của tứ diện $ABCD$.

c) Tính diện tích các mặt của tứ diện $ABCD$.

d) Tính độ dài các đường cao của tứ diện $ABCD$.

e) Tính góc giữa hai đường thẳng AB và CD.

g) Viết phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

22. Trong không gian $Oxyz$ cho ba điểm $A(1 ; 0 ; 0)$, $B(0 ; 0 ; 1)$ và $C(2 ; 1 ; 1)$.

a) Chứng minh A, B, C là ba đỉnh của một tam giác.

b) Tính chu vi, diện tích tam giác ABC.

c) Tìm toạ độ điểm D để $ABCD$ là hình bình hành.

d) Tính độ dài đường cao h_A của tam giác ABC kẻ từ A.

e) Tính các góc của tam giác ABC.

g) Xác định toạ độ trực tâm tam giác ABC.

h) Xác định toạ độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

23. Trong không gian $Oxyz$ cho tam giác ABC có

$$A = (1 ; 2 ; -1),\ B = (2 ; -1 ; 3),\ C = (-4 ; 7 ; 5).$$

a) Tính độ dài đường cao h_A của tam giác kẻ từ đỉnh A.

b) Tính độ dài đường phân giác trong của tam giác kẻ từ đỉnh B.

24. Chứng minh các tính chất sau đây của tích có hướng :

a) $\left[\vec{a},\vec{b}\right] = -\left[\vec{b},\vec{a}\right]$;

b) $\left[\vec{a},\vec{a}\right] = \vec{0}$;

c) $\left[k\vec{a},\vec{b}\right] = k\left[\vec{a},\vec{b}\right] = \left[\vec{a},k\vec{b}\right]$;

d) $\left[\vec{c},\vec{a}+\vec{b}\right] = \left[\vec{c},\vec{a}\right] + \left[\vec{c},\vec{b}\right]$;

e) $\vec{a}.\left[\vec{b},\vec{c}\right] = \left[\vec{a},\vec{b}\right].\vec{c}$;

g) $\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right|^2 = |\vec{a}|^2.|\vec{b}|^2 - \left(\vec{a}.\vec{b}\right)^2$.

25. Cho tứ diện $ABCD$ có $A(2 ; 1 ; -1)$, $B(3 ; 0 ; 1)$, $C(2 ; -1 ; 3)$ và D thuộc trục Oy. Biết $V_{ABCD} = 5$. Tìm toạ độ đỉnh D.

26. Cho bốn điểm $A(2 ; -1 ; 6)$, $B(-3 ; -1 ; -4)$, $C(5 ; -1 ; 0)$, $D(1 ; 2 ; 1)$.

a) Chứng minh ABC là tam giác vuông. Tính bán kính đường tròn nội tiếp của tam giác.

b) Tính thể tích tứ diện $ABCD$.

c) Viết phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

27. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a.

a) Chứng minh $A'C \perp (AB'D')$.

b) Gọi M là trung điểm của AD, N là trung điểm của BB'. Chứng minh $A'C \perp MN$.

c) Tính côsin của góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{AC'}$.

d) Tính $V_{A'CMN}$.

28. Cho tứ diện $SABC$ có $SC = CA = AB = a\sqrt{2}$, $SC \perp (ABC)$, tam giác ABC vuông tại A. Các điểm $M \in SA$, $N \in BC$ sao cho $AM = CN = t$ $(0 < t < 2a)$.

a) Tính độ dài đoạn MN. Tìm giá trị t để MN ngắn nhất.

b) Khi đoạn MN ngắn nhất, chứng minh MN là đường vuông góc chung của BC và SA.

29. Viết phương trình mặt cầu :

a) Có tâm $I(1 ; 0 ; -1)$, đường kính bằng 8.

b) Có đường kính AB với $A = (-1 ; 2 ; 1)$, $B = (0 ; 2 ; 3)$.

c) Có tâm $O(0 ; 0 ; 0)$ và tiếp xúc với mặt cầu (S) có tâm $(3 ; -2 ; 4)$, bán kính bằng 1.

d) Có tâm $I(3 ; -2 ; 4)$ và đi qua $A(7 ; 2 ; 1)$.

e) Có tâm $I(2 ; -1 ; 3)$ và tiếp xúc với mp(Oxy).

g) Có tâm $I(2 ; -1 ; 3)$ và tiếp xúc với mp(Oxz).

h) Có tâm $I(2 ; -1 ; 3)$ và tiếp xúc với mp(Oyz).

30. Trong các phương trình sau đây, phương trình nào là phương trình của một mặt cầu ? Nếu là phương trình mặt cầu, hãy tìm tâm và tính bán kính của nó.

a) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6y - 8z + 1 = 0$;

b) $x^2 + y^2 + z^2 + 10x + 4y + 2z + 30 = 0$;

c) $x^2 + y^2 + z^2 - y = 0$;

d) $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2x - 3y + 5z - 2 = 0$;

e) $x^2 + y^2 + z^2 - 3x + 4y - 8z + 25 = 0$.

31. a) Viết phương trình mặt cầu đi qua $A(1 ; 2 ; -4)$, $B(1 ; -3 ; 1)$, $C(2 ; 2 ; 3)$ và có tâm nằm trên mp(Oxy).

b) Viết phương trình mặt cầu đi qua hai điểm $A(3 ; -1 ; 2)$, $B(1 ; 1 ; -2)$ và có tâm thuộc trục Oz.

c) Viết phương trình mặt cầu đi qua bốn điểm $A(1 ; 1 ; 1)$, $B(1 ; 2 ; 1)$, $C(1 ; 1 ; 2)$, $D(2 ; 2 ; 1)$.

32. Cho sáu điểm $A(a ; 0 ; 0)$, $B(0 ; b ; 0)$, $C(0 ; 0 ; c)$, $A'(a' ; 0 ; 0)$, $B'(0, b', 0)$, $C'(0 ; 0, c')$ với $aa' = bb' = cc' \neq 0$; $a \neq a'$, $b \neq b'$, $c \neq c'$.

a) Chứng minh có một mặt cầu đi qua sáu điểm nói trên.

b) Chứng minh đường thẳng đi qua gốc toạ độ O và trọng tâm tam giác ABC vuông góc với mặt phẳng $(A'B'C')$.

33. a) Tìm tập hợp tâm các mặt cầu đi qua điểm $A(a ; b ; c)$ cho trước và có bán kính R không đổi.

b) Cho bốn điểm $A(2 ; 0 ; 0)$, $B(0 ; 4 ; 0)$, $C(0 ; 0 ; 6)$, $D(2 ; 4 ; 6)$. Tìm tập hợp các điểm M trong không gian sao cho

$$\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right| = 4.$$

c) Cho ba điểm $A(a ; 0 ; 0)$, $B(0 ; b ; 0)$, $C(0 ; 0, c)$. Tìm tập hợp các điểm M trong không gian sao cho $MA^2 + MB^2 + MC^2 = MO^2$ (O là gốc toạ độ).

34. a) Cho phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 4mx + 4y + 2mz + m^2 + 4m = 0$.

Xác định m để nó là phương trình của một mặt cầu. Khi đó, tìm m để bán kính mặt cầu là nhỏ nhất.

b) Cho phương trình :

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x\cos\alpha - 2y\sin\alpha - 4z - (4 + \sin^2\alpha) = 0.$$

Xác định α để phương trình trên là phương trình của một mặt cầu. Khi đó, tìm α để bán kính mặt cầu là nhỏ nhất, lớn nhất.