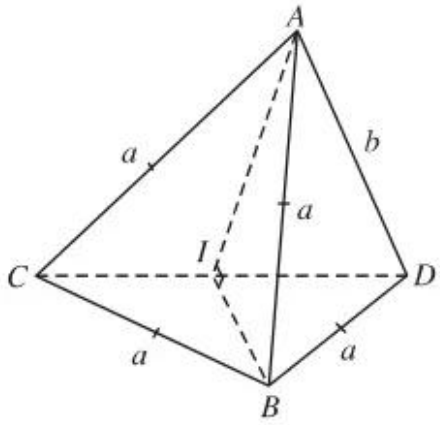
B - LỜI GIẢI - HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

§1. Mặt cầu, khối cầu

1. (h.46, h.47)

a) Gọi I là trung điểm của CD, do $BC = BD = a$ nên $BI \perp CD$. Mặt khác mp(BCD) $\perp$ mp(ACD) nên $BI \perp$ mp(ACD).

Xét các tam giác vuông AIB và DIB có cạnh góc vuông BI chung, $BA = BD$, từ đó $AI = ID$. Vậy ACD là tam giác vuông tại A.



Hình 46

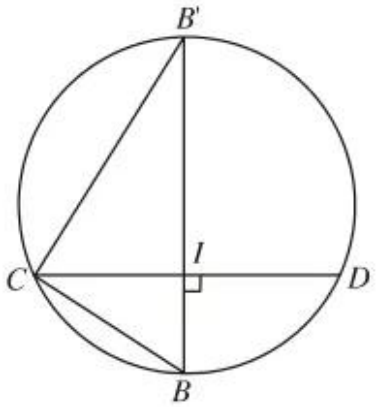
b) Từ chứng minh trên, ta thấy tâm của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ thuộc BI, do đó, bán kính mặt cầu phải tìm chính là bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD.

Dễ thấy $CB^2 = BI.BB' = 2R.BI$, tức là $R = \dfrac{a^2}{2BI}$.

Mặt khác

$$BI^2 = BC^2 - \frac{CD^2}{4} = a^2 - \frac{a^2 + b^2}{4} = \frac{3a^2 - b^2}{4}$$

$$\Rightarrow \quad BI = \frac{1}{2}\sqrt{3a^2 - b^2},\ 0 < b < a\sqrt{3}.$$



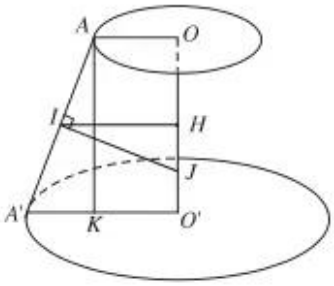
Hình 47

Như vậy $R = \dfrac{a^2}{\sqrt{3a^2 - b^2}}$, do đó diện tích mặt cầu phải tìm bằng $\dfrac{4\pi a^4}{3a^2 - b^2}$ với $0 < b < a\sqrt{3}$.

2. (h.48) Giả sử $R \le R'$. Vì $OO' \perp (P)$ nên mọi điểm thuộc OO' cách đều các điểm của đường tròn $(O\ ;\ R)$, đồng thời cách đều các điểm của đường tròn $(O'\ ;\ R')$.

Xét mp(R) qua OO' và cắt hai mặt phẳng (P), (Q) theo hai giao tuyến OA, $O'A'$,

$A \in (O\ ;\ R)$, $A' \in (O'\ ;\ R')$. Trong mp(R), đường trung trực của AA' cắt OO' tại J. Khi đó, mặt cầu tâm J, bán kính JA đi qua cả hai đường tròn $(O\ ;\ R)$ và $(O'\ ;\ R')$. Gọi S là diện tích mặt cầu đó thì



Hình 48

$S = 4\pi.JA^2 = 4\pi(OA^2 + JO^2) = 4\pi(R^2 + JO^2)$.

Kẻ IH song song với AO $(H \in OO')$ thì $OH = \dfrac{h}{2}$. Từ $OH + JH = JO$, suy ra $\dfrac{h}{2} + JH = JO$. Kẻ AK song song với OO' $(K \in O'A')$ thì có $\dfrac{HJ}{A'K} = \dfrac{IH}{AK}$, từ đó

$$HJ = \frac{\frac{R'+R}{2}.(R'-R)}{h} = \frac{R'^2 - R^2}{2h}.$$

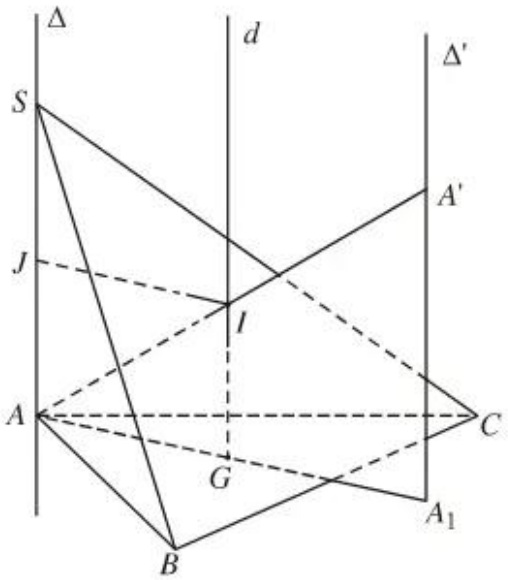
Vậy $JO = \dfrac{h}{2} + \dfrac{R'^2 - R^2}{2h} = \dfrac{h^2 + R'^2 - R^2}{2h}$ và diện tích mặt cầu phải tìm là

$$S = 4\pi\left[R^2 + \frac{\left(h^2 + R'^2 - R^2\right)^2}{4h^2}\right]$$

$$= \pi.\frac{4R^2h^2 + \left(h^2 + R'^2 - R^2\right)^2}{h^2}.$$

3. (h.49)

1) Gọi G là trọng tâm của tam giác đều ABC và d là trục của đường tròn ngoại tiếp ΔABC thì $G \in d$ và $d // \Delta$. Trong mp(Δ, d), đường trung trực của SA cắt d tại điểm I thì I là tâm của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $SABC$ và $R = IA$ là bán kính của mặt cầu đó.



Hình 49

Dễ thấy $GI = \dfrac{1}{2}SA = \dfrac{h}{2}$, $AG = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$, từ đó $IA^2 = \dfrac{h^2}{4} + \dfrac{a^2}{3} = \dfrac{1}{12}\left(4a^2 + 3h^2\right)$.

Vậy mặt cầu đó có diện tích là

$$S = \frac{\pi}{3}\left(4a^2 + 3h^2\right)$$

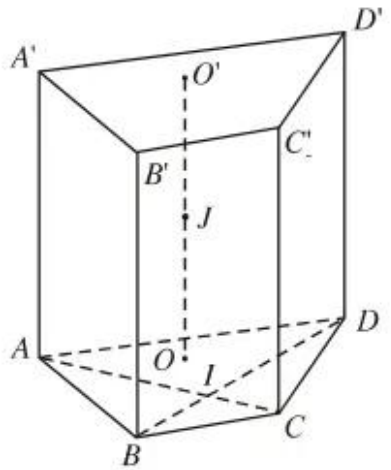
và thể tích là

$$V = \frac{4}{3}\pi.\left(\frac{\sqrt{4a^2 + 3h^2}}{2\sqrt{3}}\right)^3 = \frac{\pi}{18\sqrt{3}}\left(\sqrt{4a^2 + 3h^2}\right)^3.$$

2) Khi S thay đổi trên đường thẳng Δ thì tâm I của mặt cầu ấy thay đổi trên đường thẳng d. Mặt khác $\overrightarrow{AA'} = 2\overrightarrow{AI}$, vậy A' thuộc đường thẳng Δ' song song với Δ và qua điểm A_1 sao cho $\overrightarrow{AA_1} = 2\overrightarrow{AG}$, tức là A' thuộc đường thẳng cố định Δ'.

4. (h.50) Vì $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{IB}.\overrightarrow{ID}$ nên $ABCD$ là tứ giác nội tiếp đường tròn. Mặt khác, hình lăng trụ đã cho là lăng trụ đứng nên hình lăng trụ đó có mặt cầu ngoại tiếp.

Kí hiệu O, O' lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp đáy $ABCD$ và $A'B'C'D'$ của hình lăng trụ và gọi J là trung điểm của OO' thì J là tâm mặt cầu phải tìm và bán kính của mặt cầu là JA.



Hình 50

Mặt khác $JA^2 = JO^2 + AO^2 = \frac{h^2}{4} + AO^2$.

Từ đó, bán kính mặt cầu đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi bán kính đường tròn ngoại tiếp đáy $ABCD$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Ta có $h^2 = -\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IC} = -\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{ID} = AO^2 - IO^2 \Rightarrow AO^2 = h^2 + IO^2$.

Từ đó, AO^2 đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi IO nhỏ nhất, điều này xảy ra khi và chỉ khi $O \equiv I$, lúc đó $AO^2 = h^2$ và giá trị nhỏ nhất của bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ bằng $JA = \frac{h\sqrt{5}}{2}$.

5. (h.51)

1) Vì $\widehat{BSC} = 90^o$ nên $SB^2 + SC^2 = BC^2 = a^2$.

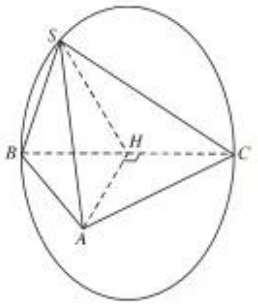
Gọi H là trung điểm của BC thì

$SH = \frac{1}{2}BC = \frac{a}{2}$ và $AH \perp BC$.

Mặt khác, $(P) \perp$ mp(ABC) và cắt mặt phẳng này theo giao tuyến BC nên $AH \perp (P)$.

Từ đó $SA^2 = SH^2 + AH^2 = \dfrac{a^2}{4} + \dfrac{3a^2}{4} = a^2$.

Vậy $\quad SA^2 + SB^2 + SC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$.



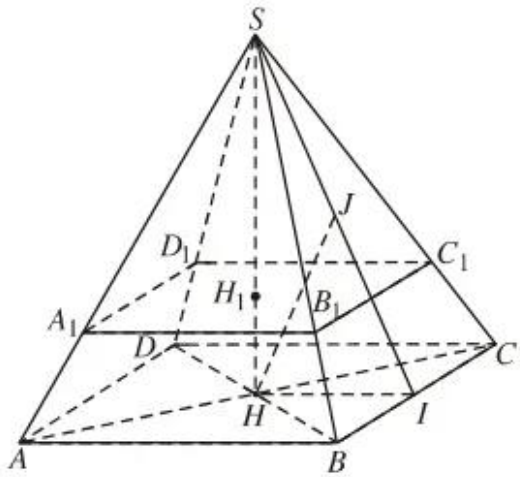
Hình 51

2) Vì $HB = HC = HS$, $AH \perp$ mp(SBC) nên đường thẳng AH là trục của đường tròn ngoại tiếp ΔSBC. Do đó, tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $SABC$ thuộc AH. Mặt khác, ABC là tam giác đều nên tâm mặt cầu đó chính là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và bán kính mặt cầu bằng bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Điều ấy khẳng định rằng mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $SABC$ là cố định.

6. (h.52)

1) Gọi I là trung điểm của BC thì $HI = \dfrac{a}{2} = SH$. Gọi J là trung điểm của SI thì $HJ \perp SI$, mặt khác $HJ \perp BC$, vậy $HJ \perp$ mp(SBC) đồng thời $HJ = \dfrac{SI}{2} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{a}{2}\sqrt{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$.

Tương tự, ta có khoảng cách từ H tới các mặt bên của hình chóp đã cho cũng bằng $\dfrac{a\sqrt{2}}{4}$. Như vậy, mặt cầu tâm H, bán kính $R = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$ là mặt cầu tiếp xúc với các mặt bên của hình chóp $S.ABCD$.



Hình 52

2) Gọi H_1 là giao điểm của (P) và SH thì $HH_1 = x$, $0 < HH_1 < R$ và thiết diện của hình chóp với (P) là hình vuông $A_1B_1C_1D_1$. Khi ấy

$$\frac{S_{A_1B_1C_1D_1}}{S_{ABCD}} = \left(\frac{\frac{a}{2} - x}{\frac{a}{2}}\right)^2 = \frac{(a-2x)^2}{a^2}.$$

Từ đó $S_{A_1B_1C_1D_1} = (a-2x)^2$.

Ta có (P) cắt mặt cầu nêu trên theo đường tròn bán kính r được tính bởi $r^2 = R^2 - x^2$ hay $r^2 = \frac{a^2}{8} - x^2 = \frac{a^2 - 8x^2}{8}$, từ đó diện tích hình tròn thu được là $\frac{1}{8}\pi(a^2 - 8x^2)$. Vậy

$$S_{td} = (a-2x)^2 - \frac{1}{8}\pi(a^2 - 8x^2) = \frac{1}{8}\left[8(a-2x)^2 - \pi\left(a^2 - 8x^2\right)\right].$$

Ta có $S_{td} = \pi R^2 = \frac{1}{8}\pi a^2 \Leftrightarrow 8(a-2x)^2 - \pi a^2 + 8\pi x^2 = \pi a^2$

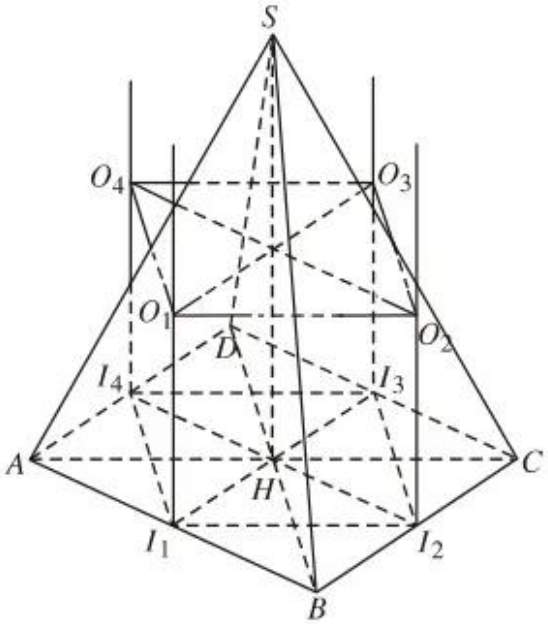
$$\Leftrightarrow 4\left[(a-2x)^2 + \pi x^2\right] = \pi a^2$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4a - \pi a}{8 + 2\pi} \left(\text{vì } 0 < x < R = \frac{a\sqrt{2}}{4}\right).$$

7. (h.53a,b)

1) Gọi I_1 là trung điểm của AB và O_1 là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABH$ thì $I_1O_1 \,//\, SH$ và $I_1O_1 = \frac{1}{2}SH$.

Tương tự như trên, nếu I_2, I_3, I_4 thứ tự là trung điểm của BC, CD, DA và O_2, O_3, O_4 thứ tự là tâm của mặt cầu ngoại tiếp các hình chóp $S.HBC$, $S.HCD$, $S.HDA$ thì $I_2O_2 = \frac{1}{2}SH$, $I_3O_3 = \frac{1}{2}SH$, $I_4O_4 = \frac{1}{2}SH$ và I_2O_2, I_3O_3, I_4O_4 cùng song song với SH.



Hình 53a

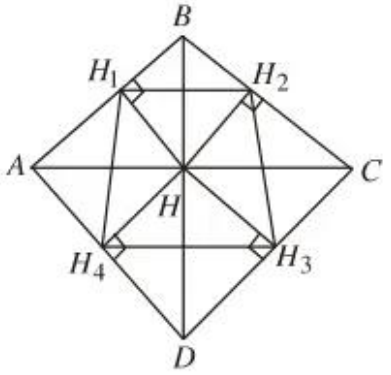
Dễ thấy $I_1I_2 \,//\, O_1O_2$ và $I_1I_2 \,//\, AC$,

$I_2I_3 \,//\, O_2O_3$ và $I_2I_3 \,//\, BD$,

$I_3I_4 \,//\, O_3O_4$ và $I_3I_4 \,//\, AC$,

$I_4I_1 \,//\, O_4O_1$ và $I_4I_1 \,//\, BD$.

Kết hợp với $AC \perp BD$, ta có $O_1O_2O_3O_4$ là hình chữ nhật.



Hình 53b

2) Dễ thấy $\widehat{HH_1H_2} = \widehat{HBH_2} = \widehat{HBC}$,

$\widehat{HH_1H_4} = \widehat{HAH_4} = \widehat{HAD}$,

$\widehat{HH_3H_2} = \widehat{HCH_2} = \widehat{HCB}$,

$\widehat{HH_3H_4} = \widehat{HDH_4} = \widehat{HDA}$.

Từ đó

$$\widehat{HH_1H_2} + \widehat{HH_1H_4} + \widehat{HH_3H_2} + \widehat{HH_3H_4} = \widehat{HBC} + \widehat{HCB} + \widehat{HAD} + \widehat{HDA} = 180^\circ.$$

Vậy $H_1H_2H_3H_4$ là tứ giác nội tiếp đường tròn. Từ đó hình chóp $S.H_1H_2H_3H_4$ có mặt cầu ngoại tiếp.

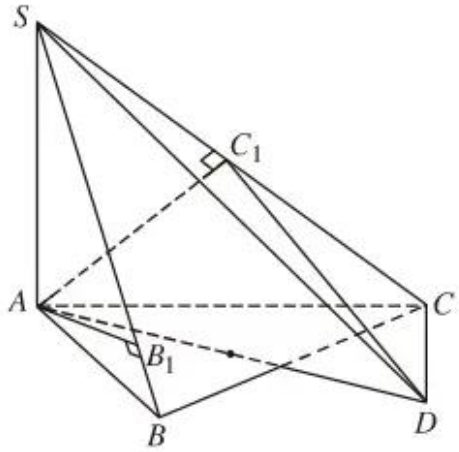
Diện tích thiết diện của hình cầu đó và mặt phẳng $(ABCD)$ là diện tích hình tròn ngoại tiếp tứ giác $H_1H_2H_3H_4$.

Vì $\widehat{BAC} = \alpha$, $\widehat{BDC} = \beta$ nên $\widehat{H_1H_4H_3} = \alpha + \beta$. Khi ấy $\dfrac{H_1H_3}{\sin(\alpha+\beta)} = 2R$ (R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tứ giác $H_1H_2H_3H_4$), từ đó $R = \dfrac{a}{2\sin(\alpha+\beta)}$.

Vậy diện tích hình thu được là

$$4\pi R^2 = \frac{\pi a^2}{\sin^2(\alpha+\beta)}.$$

8. (h.54) Gọi AD là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, khi đó $CD \perp AC$, mặt khác $CD \perp SA$, từ đó $CD \perp$ mp(SAC), vậy $CD \perp AC_1$. Theo giả thiết, $AC_1 \perp SC$ nên $AC_1 \perp C_1D$.



Hình 54

Tương tự như trên, ta cũng có $\widehat{ABD} = 90^\circ$, $\widehat{AB_1D} = 90^\circ$. Vậy AD là đường kính của mặt cầu đi qua các điểm A, B, C, B_1, C_1.

Bán kính R của mặt cầu đó cũng là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, do đó $\dfrac{BC}{\sin A} = 2R$, mặt khác

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos A \text{ hay } BC = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc.\cos\alpha},$$

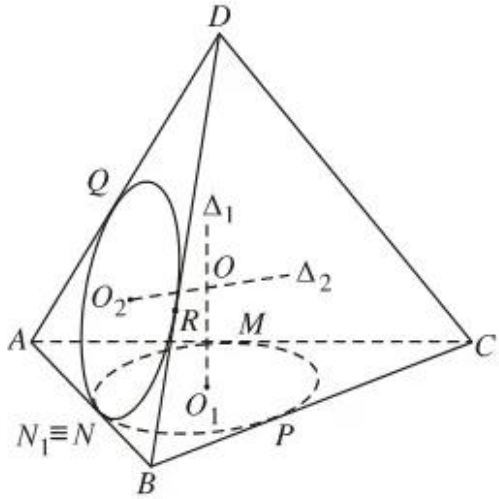
vậy $\quad R = \dfrac{\sqrt{b^2 + c^2 - 2bc.\cos\alpha}}{2\sin\alpha}$.

Chú ý. Có thể chứng minh các điểm A, B, C, B_1, C_1 cùng thuộc một mặt cầu như sau :

Xét các tam giác vuông SAB, SAC, ta có $SA^2 = SB.SB_1$, $SA^2 = SC.SC_1$, từ đó $SB.SB_1 = SC.SC_1$, suy ra B, C, B_1, C_1 cùng thuộc một đường tròn. Như vậy, hình chóp $A.BCC_1B_1$ với đáy BCC_1B_1 có đường tròn ngoại tiếp nên hình chóp đó có mặt cầu ngoại tiếp, tức là các điểm A, B, C, C_1, B_1 cùng thuộc một mặt cầu.

9. (h.55) Gọi O_1 là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC và các điểm tiếp xúc của đường tròn đó với các cạnh là M, N, P. Gọi Δ_1 là trục của đường tròn này thì Δ_1 chứa tâm của các mặt cầu tiếp xúc với ba cạnh AB, BC, CA.

Tương tự, nếu gọi Δ_2 là trục của đường tròn nội tiếp tam giác ABD thì Δ_2 chứa tâm của các mặt cầu tiếp xúc với ba cạnh của tam giác ABD. Kí hiệu điểm tiếp xúc của ba cạnh ấy với đường tròn nội tiếp ΔABD là N_1, Q, R (N_1 thuộc AB).



Hình 55

Khi ấy, vì

$$AN = \frac{AB + AC - BC}{2},\ AN_1 = \frac{AB + AD - BD}{2}$$

mà $AC + BD = AD + BC$ nên $AN = AN_1$, từ đó $N \equiv N_1$.

Suy ra $AB \perp \text{mp}(O_1NO_2)$. Mặt khác, $\Delta_1 \perp AB$ và cắt mp(ABC) tại O_1, Δ_2 vuông góc với AB và cắt mp(ABD) tại O_2 nên Δ_1, Δ_2 cùng nằm trong

mp(O_1NO_2). Từ đó Δ_1 cắt Δ_2 tại điểm O, đó là điểm cách đều năm cạnh AB, AC, BC, AD, BD của tứ diện $ABCD$ hay

$$OM = ON = OP = OQ = OR. \quad (1)$$

Hoàn toàn tương tự như trên, ta cũng có Δ_2 cắt Δ_3 (Δ_3 là trục của đường tròn nội tiếp tam giác ACD) tại O' và

$$O'M = O'N = O'Q = O'R = O'S$$
(2)

(S là điểm tiếp xúc của cạnh CD với đường tròn nội tiếp ΔACD).

Từ (1), (2) ta có O, O' cùng là tâm của mặt cầu đi qua bốn điểm M, N, Q, R mà M, N, Q, R không đồng phẳng, vậy $O \equiv O'$. Đó là tâm mặt cầu tiếp xúc với sáu cạnh của tứ diện, bán kính mặt cầu đó là ON.

10. (h.56a,b)

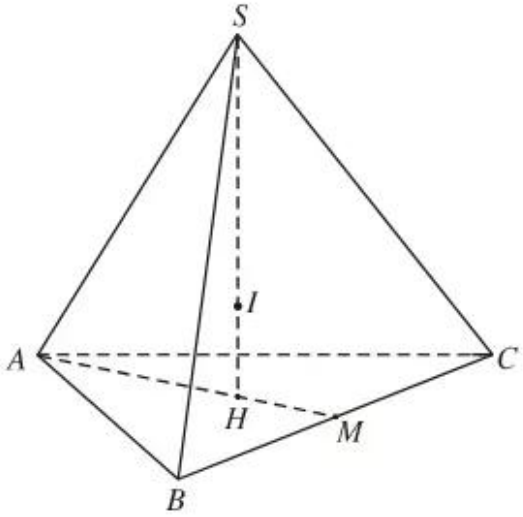
1) Vì các cạnh của hình chóp tiếp xúc với mặt cầu nên

$$SA + BC = SB + AC = SC + AB.$$

Mặt khác, tâm I của mặt cầu thuộc đường cao SH nên dễ thấy $\widehat{ISA} = \widehat{ISB} = \widehat{ISC}$, tức là $\widehat{HSB} = \widehat{HSA} = \widehat{HSC}$, từ đó

$$SA = SB = SC.$$

Vậy $AB = BC = CA$, từ đó $S.ABC$ là hình chóp đều.

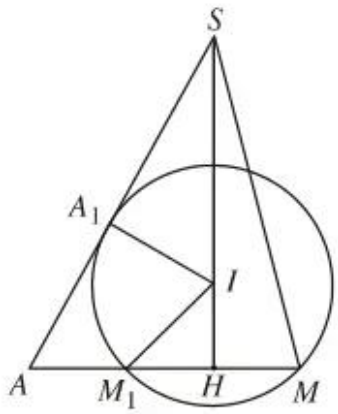


Hình 56a

2) Đặt $SH = h$. Gọi M là trung điểm của BC thì mp(SAM) cắt mặt cầu theo đường tròn lớn, đường tròn này tiếp xúc với SA tại A_1, đi qua điểm M và cắt AM tại M_1, dễ thấy $AM_1 = M_1H = HM$.

Vì $\Delta SA_1I \backsim \Delta SHA$ nên $\dfrac{A_1I}{SI} = \dfrac{AH}{SA}$,

từ đó $\dfrac{r}{r\sqrt{3}} = \dfrac{AH}{\sqrt{h^2 + AH^2}}$.



Hình 56b

Từ $AH = 2M_1H$ suy ra

$$AH^2 = 4M_1H^2 = 4(IM_1^2 - IH^2)$$

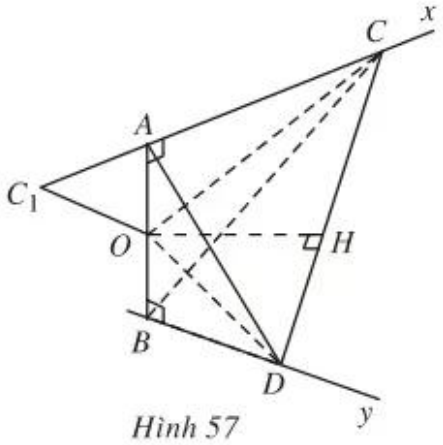
$$= 4\left[r^2 - \left(h - r\sqrt{3}\right)^2\right].$$

Vậy $$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{r^2 - \left(h - r\sqrt{3}\right)^2}}{\sqrt{h^2 + 4\left[r^2 - \left(h - r\sqrt{3}\right)^2\right]}}$$

$$\Leftrightarrow 9h^2 - 16rh\sqrt{3} + 16r^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow h = \frac{4r}{\sqrt{3}} \text{ (do } h > IS > r).$$

11. (h.57)



Hình 57

1) Vì $AC \perp AB$, $AC \perp BD$ nên $AC \perp AD$. Tương tự như trên, ta có $CB \perp BD$. Vậy CD là đường kính của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

Dễ thấy $CD^2 = CA^2 + AB^2 + BD^2$

$$= a^2 + b^2 + c^2,$$

tức là

$$CD = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Vậy tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ là trung điểm của CD và bán kính mặt cầu bằng $\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

2) Gọi C_1 là điểm thuộc tia đối của tia Ax sao cho $AC_1 = BD$. Gọi O là trung điểm của AB thì

$$OC_1^2 = AC_1^2 + \frac{AB^2}{4},$$

$$OD^2 = BD^2 + \frac{AB^2}{4},$$

do đó $OC_1 = OD$.

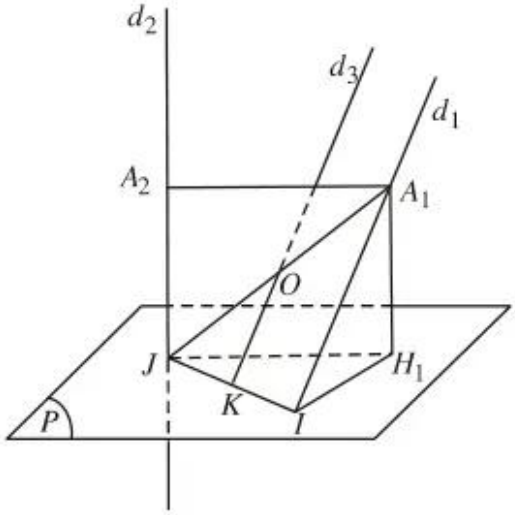
Mặt khác $CD = AC + BD$, từ đó $CD = CC_1$.

Vậy hai tam giác OC_1C và ODC bằng nhau, suy ra $OA = OH$ (trong đó OA, OH lần lượt là đường cao của hai tam giác đó). Điều này khẳng định khoảng cách từ O đến CD bằng $\frac{AB}{2}$, tức là mặt cầu đường kính AB tiếp xúc với CD.

12. (h.58)

1) Vì (P) đi qua I và $(P) \perp d_2$, $IJ \perp d_2$ nên $IJ \subset (P)$.

Vì H_1 là hình chiếu của A_1 trên (P) nên $\widehat{A_1IH_1} = \alpha$ và $A_1H_1 \parallel d_2$. Do mp(Q) song song với mp(P) và (Q) cắt d_1, d_2 tại A_1, A_2 nên $A_1A_2 \parallel JH_1$. Suy ra $JH_1A_1A_2$ là hình chữ nhật.



Hình 58

Mặt khác $\widehat{JIA_1} = 90^o$, vậy các điểm I, J, A_1, A_2, H_1 cùng thuộc một mặt cầu, tâm mặt cầu là trung điểm O của JA_1, bán kính của mặt cầu là $R = \frac{1}{2}JA_1$.

Ta có $JA_1^2 = IJ^2 + IA_1^2 = a^2 + \frac{h^2}{\sin^2\alpha}$,

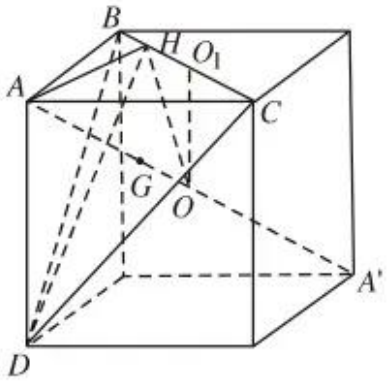
từ đó $R = \frac{1}{2\sin\alpha}\sqrt{a^2\sin^2\alpha + h^2}$.

Diện tích mặt cầu là $S = \frac{\pi}{\sin^2\alpha}\left(a^2\sin^2\alpha + h^2\right)$.

2) Khi mặt phẳng (Q) thay đổi thì A_1 luôn thuộc d_1 mà $\overrightarrow{JO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{JA_1}$, vậy O thuộc đường thẳng d_3 đi qua trung điểm K của IJ và d_3 song song với d_1. Xét mặt phẳng (R) chứa IJ và vuông góc với d_3 thì (R) cắt mặt cầu nêu trên theo đường tròn tâm K, mà K là trung điểm của IJ nên IJ là đường kính của đường tròn. Đường tròn này cố định, từ đó ta có mặt cầu đi qua các điểm I, J, A_1, A_2, H_1 luôn qua một đường tròn cố định.

13. (h.59)

1) Dễ thấy các đỉnh của hình hộp chữ nhật dựng trên ba cạnh AB, AC, AD cũng thuộc mặt cầu đã cho. Khi ấy tâm O của mặt cầu là trung điểm của đường chéo AA' của hình hộp, tức là hình hộp nêu trên có một đường chéo cố định là AA'.



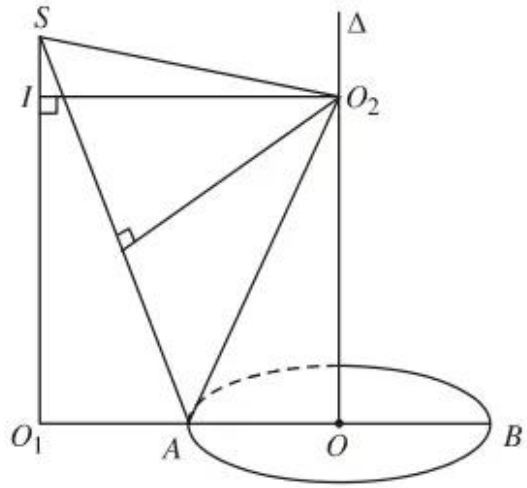
Hình 59

Mặt khác AA' cắt mp(BCD) tại trọng tâm G của tam giác BCD và $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AA'}$. Vậy mp($BCD$) luôn luôn đi qua điểm cố định G nói trên.

2) Vì $DH \perp BC$, $DA \perp$ mp(ABC) nên $AH \perp BC$.

Gọi O_1 là trung điểm của BC thì $OO_1 \perp (BCA) \Rightarrow OO_1 \perp AH$, từ đó $AH \perp HO$. Điều này khẳng định điểm H thuộc mặt cầu đường kính AO, mặt cầu này cố định vì A, O cố định.

14. (h.60) Gọi Δ là trục của đường tròn đã cho thì $\Delta \,//\, SO_1$. Trong mp(SO_1, Δ), đường trung trực của SA cắt Δ tại O_2 thì O_2 là tâm mặt cầu đi qua đường tròn đã cho và điểm S, bán kính mặt cầu này bằng $O_2A = O_2S$. Xét các tam giác vuông O_2AO và O_2IS (ở đó $O_2I \,//\, AO_1$), ta có



Hình 60

$$O_2S^2 = 4R^2 + (2R - OO_2)^2$$

$$O_2A^2 = R^2 + OO_2^2.$$

Từ đó

$$4R^2 + (2R - OO_2)^2 = R^2 + OO_2^2, \text{ suy ra } OO_2 = \frac{7R}{4}.$$

Vậy bán kính mặt cầu là $\sqrt{R^2 + \frac{49}{16}R^2} = \frac{R\sqrt{65}}{4}$

và thể tích khối cầu phải tìm là $\frac{65}{48}\sqrt{65}\pi R^3$.

15. Trước hết, ta nhận xét rằng hình hộp nội tiếp mặt cầu phải là hình hộp chữ nhật. Từ đó, nếu kí hiệu ba kích thước của hình hộp đó là x, y, z thì $x^2 + y^2 + z^2 = 4R^2$.

1) Thể tích khối hộp chữ nhật là $V = xyz$, từ đó $V^2 = x^2y^2z^2$. Vậy V đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $x^2 = y^2 = z^2 = \frac{4R^2}{3}$ hay $x = y = z = \frac{2R}{\sqrt{3}}$, tức hình hộp đó là hình lập phương với cạnh bằng $\frac{2R}{\sqrt{3}}$.

2) Tổng độ dài các cạnh của hình hộp là $T = 4(x + y + z)$, từ đó

$$T^2 = 16(x + y + z)^2 \leq 16.3\,(x^2 + y^2 + z^2) = 192R^2.$$

Như vậy, tổng độ dài các cạnh của hình hộp đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $x = y = z = \frac{2R}{\sqrt{3}}$ hay hình hộp đó là hình lập phương có cạnh bằng $\frac{2R}{\sqrt{3}}$.

16. (h.61) Dễ thấy $R = \frac{SA^2}{2SH}$, từ đó nếu kí hiệu cạnh đáy và chiều cao của hình chóp lần lượt là a và h thì

$$R = \frac{a^2 + 3h^2}{6h}, \qquad (1)$$

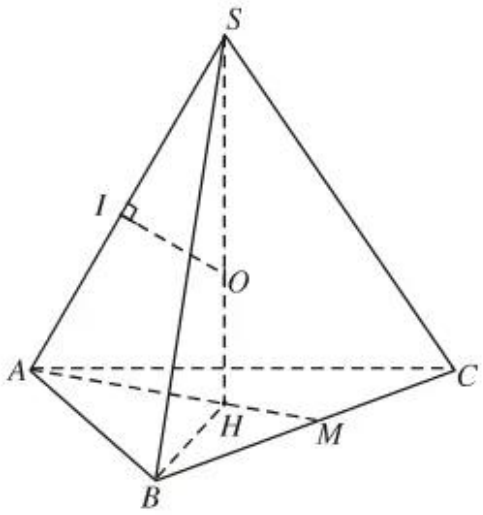
$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.h. \qquad (2)$$

Từ (1), (2) ta có

$$V_{S.ABC} = \frac{\sqrt{3}}{12}h(6Rh - 3h^2)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{12}h.3h(2R - h)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}h.h(2R - h).$$



Hình 61

Mặt khác $h < 2R$ nên $V_{S.ABC}$ lớn nhất khi và chỉ khi $h.h(2R - h)$ lớn nhất. Điều này xảy ra khi và chỉ khi $h = \frac{4R}{3}$. Khi đó

$$a^2 = 3h(2R - h) = 4R\left(2R - \frac{4R}{3}\right) = \frac{8R^2}{3}, \text{ tức là } a = \frac{2R\sqrt{6}}{3}.$$

Dễ thấy trong trường hợp này, $SABC$ là tứ diện đều có cạnh bằng $\frac{2R\sqrt{6}}{3}$.

• Mở rộng bài toán cho hình chóp n–giác đều cạnh a.

Ta cũng có $R = \frac{SA^2}{2SH}$, trong đó SA là một cạnh bên và SH là đường cao của hình chóp, từ đó $R = \dfrac{a^2 + 4h^2\sin^2\frac{\pi}{n}}{8h\sin^2\frac{\pi}{n}}$, suy ra $a^2 = 4h(2R - h)\sin^2\frac{\pi}{n}$.

Gọi S là diện tích đáy của hình chóp n–giác đều cạnh a thì $S = \frac{na^2}{4}\cot\frac{\pi}{n}$. Khi ấy, thể tích V của khối chóp bằng

$$\begin{aligned} V &= \frac{na^2}{12}\cot\frac{\pi}{n}.h \\ &= \frac{n}{12}\cot\frac{\pi}{n}.h.4h\sin^2\frac{\pi}{n}.(2R - h) \\ &= \frac{n}{3}\cot\frac{\pi}{n}\sin^2\frac{\pi}{n}.h.h(2R - h) \\ &= \frac{n}{6}\cot\frac{\pi}{n}\sin^2\frac{\pi}{n}.h.h(4R - 2h). \end{aligned}$$

Vậy V lớn nhất khi và chỉ khi $h = \frac{4R}{3}$ và từ đó

$$a^2 = \sin^2\frac{\pi}{n}.\frac{16R}{3}\left(2R - \frac{4R}{3}\right) = \sin^2\frac{\pi}{n}.\frac{32R^2}{9},$$

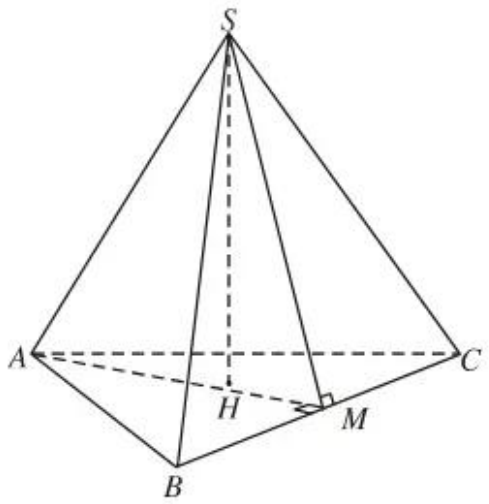
tức là $a = \frac{4R\sqrt{2}}{3}\sin\frac{\pi}{n}$.

Như thế, trong số các hình chóp n–giác đều nội tiếp một mặt cầu bán kính R cho trước thì hình chóp n–giác đều có chiều cao $h = \frac{4R}{3}$ và cạnh đáy $a = \frac{4R\sqrt{2}}{3}\sin\frac{\pi}{n}$ có thể tích lớn nhất.

17. (h.62) Kí hiệu cạnh đáy của hình chóp là a, chiều cao là h, thể tích khối chóp là V, diện tích toàn phần là S_{tp} thì $r = \frac{3V}{S_{tp}}$, tức là $S_{tp} = \frac{3V}{r}$. Vậy S_{tp} nhỏ nhất khi và chỉ khi V nhỏ nhất. Mặt khác, cũng từ hệ thức $S_{tp} = \frac{3V}{r}$, ta có hệ thức liên hệ giữa a, h và r là

$$r = \frac{ah}{a + \sqrt{a^2 + 12h^2}} \qquad (1)$$

$\left(V = \frac{1}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.h = \frac{\sqrt{3}}{12}a^2.h\right)$.



Hình 62

Gọi M là trung điểm của BC và đặt $\widehat{SMH} = \varphi$ (đó là góc giữa mp(SBC) và mp(ABC), cũng là góc giữa mặt bên và mặt đáy của hình chóp). Khi ấy,

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{6}\tan\varphi. \qquad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta có $a = \frac{6r(\cos\varphi + 1)}{\sqrt{3}\sin\varphi}$, từ đó thay vào (2), ta có $h = \frac{r(\cos\varphi + 1)}{\cos\varphi}$.

Suy ra $a^2 = 12r^2\,\frac{1 + \cos\varphi}{1 - \cos\varphi}$.

Vậy $\quad V = \frac{\sqrt{3}}{12}.12r^2.\frac{1 + \cos\varphi}{1 - \cos\varphi}.r.\frac{1 + \cos\varphi}{\cos\varphi}$

$$= \sqrt{3}.r^3\frac{(1 + \cos\varphi)^2}{\cos\varphi(1 - \cos\varphi)} = \sqrt{3}r^3\frac{(1 + t)^2}{t(1 - t)} \text{ với } 0 < t = \cos\varphi < 1.$$

Xét hàm số $f(t) = \frac{(1 + t)^2}{t(1 - t)}$, $0 < t < 1$, thì V nhỏ nhất khi và chỉ khi $f(t)$ nhỏ nhất.

Ta có $f'(t) = \dfrac{2(1+t)t(1-t) - (1+t)^2(1-2t)}{t^2(1-t)^2} = \dfrac{2(t-t^3) - (1-3t^2-2t^3)}{t^2(1-t)^2}$

$= \dfrac{3t^2+2t-1}{t^2(1-t)^2}$.

$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{3}$. Xét bảng biến thiên sau

t	0		$\frac{1}{3}$		1
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$		↘		↗	

Vậy $f(t)$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $t = \dfrac{1}{3}$, tức là $\cos\varphi = \dfrac{1}{3}$. Khi đó $h = 4r$, $\tan\varphi = 2\sqrt{2}$, từ đó $a = 2r\sqrt{6}$.

Vậy khi $a = 2r\sqrt{6}$, $h = 4r$ thì diện tích toàn phần của hình chóp đạt giá trị nhỏ nhất.

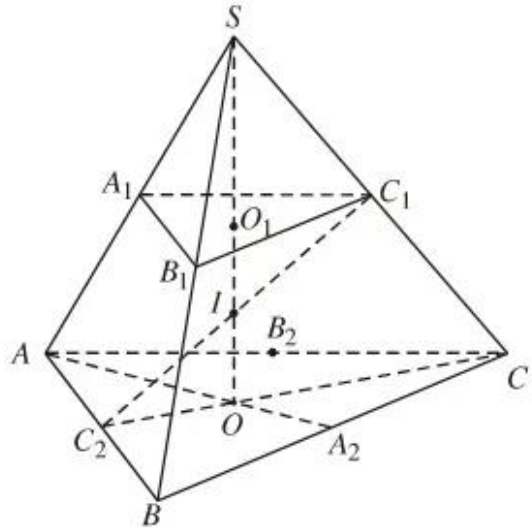
18. (h.63)

1) Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là trung điểm của SA, SB, SC và A_2, B_2, C_2 lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. Vì AB, AC là hai tiếp tuyến với mặt cầu tại B_2, C_2 nên $AB_2 = AC_2$. Suy ra $AB = AC$.

Tương tự ta có $BA = BC$.

Vậy $AB = AC = BC$, nghĩa là ABC là tam giác đều.

Gọi O là tâm của tam giác đều ABC thì O cũng là tâm của tam giác đều $A_2B_2C_2$. Kí hiệu O_1 là giao điểm của SO và mp$(A_1B_1C_1)$ thì O_1 cũng là tâm của tam giác đều $A_1B_1C_1$ (vì phép vị tự tâm S, tỉ số $\dfrac{1}{2}$ biến tam giác ABC thành tam giác $A_1B_1C_1$). Do mp$(A_1B_1C_1)$ song song với mp(ABC) nên O_1O đi qua tâm I của mặt cầu, đồng thời O_1O vuông góc với cả hai mặt phẳng đó, từ đó $SA = SB = SC$. Vậy $S.ABC$ là hình chóp đều.



Hình 63

2) Dễ thấy tâm I của mặt cầu là trung điểm của O_1O và bán kính r của mặt cầu bằng IC_2. Ta có $IC_2^2 = IO^2 + OC_2^2 = \frac{h^2}{16} + \frac{a^2}{12}$.

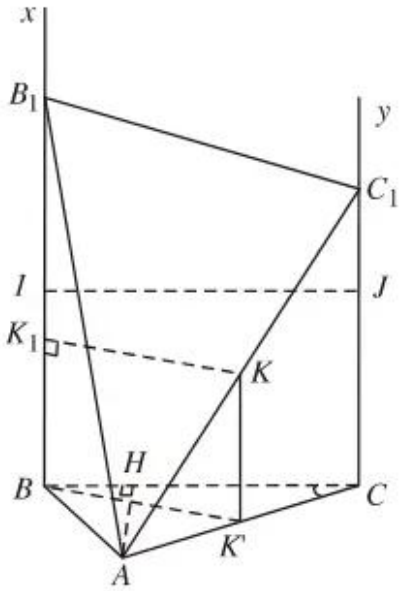
Vậy diện tích mặt cầu đó bằng

$$4\left(\frac{h^2}{16} + \frac{a^2}{12}\right)\pi = \pi\left(\frac{h^2}{4} + \frac{a^2}{3}\right).$$

19. (h.64)

1) • Gọi I là trung điểm của BB_1 thì mặt cầu đường kính BB_1 tiếp xúc với Cy tại J khi và chỉ khi $IJ = \frac{1}{2}BB_1$. Mặt khác, dễ thấy $IJ = BC = 2a$. Vậy $BB_1 = 4a$. Hệ thức này xác định vị trí điểm B_1.

• Gọi K là trung điểm của AC_1 thì mặt cầu đường kính AC_1 tiếp xúc với Bx khi và chỉ khi khoảng cách từ điểm K đến Bx bằng $\frac{1}{2}AC_1$, tức là $KK_1 = \frac{1}{2}AC_1$ hay $BK' = \frac{1}{2}AC_1$, trong đó K' là trung điểm của AC.



Hình 64

Dễ thấy $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$, từ đó

$$BK'^2 = a^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{7a^2}{4} \Rightarrow BK' = \frac{a\sqrt{7}}{2}.$$

Như vậy, mặt cầu đường kính AC_1 tiếp xúc với Bx khi và chỉ khi $AC_1 = a\sqrt{7}$, từ đó $CC_1^2 = 7a^2 - 3a^2 = 4a^2$, tức là $CC_1 = 2a$. Hệ thức này xác định vị trí điểm C_1. (Khi đó $J \equiv C_1$).

2) • Khi $BB_1 = 4a$, $CC_1 = 2a$ thì BB_1C_1C là hình thang vuông tại B, C với hai đáy có độ dài khác nhau nên BB_1C_1C không có đường tròn ngoại tiếp. Vậy đa diện $ABCC_1B_1$ không có mặt cầu ngoại tiếp.

• Dễ thấy $A.BCC_1B_1$ là hình chóp đỉnh A, đáy là BCC_1B_1 và mp(ABC) vuông góc với mp(BCC_1B_1). Từ đó

$$V_{A.BCC_1B_1} = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}(BB_1 + CC_1).BC.AH$$

(AH là đường cao của tam giác vuông ABC)

hay $V_{A.BCC_1B_1} = \frac{1}{6}(4a + 2a).\ AB.\ AC = \frac{1}{6}.6a.a.a\sqrt{3} = a^3\sqrt{3}.$