Chương II MẶT CẦU, MẶT TRỤ, MẶT NÓN

A - CÁC KIẾN THỨC CƠ BẢN VÀ ĐỀ BÀI

§1. Mặt cầu, khối cầu

I - CÁC KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Mặt cầu $S(O\ ;R)$ là tập hợp $\{M \mid OM = R\}$. Khối cầu $S(O\ ;R)$ là tập hợp $\{M \mid OM \leq R\}$.

Mặt cầu là hình tròn xoay sinh bởi một đường tròn khi quay quanh đường thẳng chứa một đường kính của đường tròn đó.

Khối cầu là hình tròn xoay sinh bởi một hình tròn khi quay quanh đường thẳng chứa một đường kính của hình tròn đó.

2. Giao của mặt cầu $S(O\ ;R)$ và mặt phẳng (P) phụ thuộc vào R và khoảng cách d từ O đến (P). Giả sử H là hình chiếu của O trên mp(P). Khi đó :

– Nếu $d < R$ thì giao là đường tròn nằm trên (P) có tâm H, bán kính $r = \sqrt{R^2 - d^2}$.

– Nếu $d = R$ thì mp(P) tiếp xúc với mặt cầu $S(O\ ;R)$ tại H.

– Nếu $d > R$ thì mp(P) không cắt mặt cầu $S(O\ ;R)$.

3. Giao của mặt cầu $S(O\ ;R)$ và đường thẳng Δ phụ thuộc vào R và khoảng cách d từ O tới Δ. Giả sử H là hình chiếu của O trên Δ. Khi đó :

– Nếu $d < R$ thì đường thẳng Δ cắt mặt cầu tại hai điểm phân biệt.

– Nếu $d = R$ thì Δ tiếp xúc với mặt cầu tại H. Các đường thẳng tiếp xúc với mặt cầu tại H nằm trên tiếp diện với mặt cầu tại H.

– Nếu $d > R$ thì Δ không cắt mặt cầu.

4. Về các tiếp tuyến của mặt cầu cùng đi qua một điểm A nằm ngoài mặt cầu :

– Các đoạn thẳng nối A với các tiếp điểm bằng nhau.

– Tập hợp các tiếp điểm là một đường tròn.

5. Hình cầu bán kính R có diện tích bằng $4\pi R^2$, có thể tích bằng $\frac{4}{3}\pi R^3$.

II - ĐỀ BÀI

1. Cho tứ diện $ABCD$, biết $AB = BC = AC = BD = a$, $AD = b$, hai mặt phẳng (ACD) và (BCD) vuông góc với nhau.

a) Chứng minh rằng tam giác ACD vuông.

b) Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

2. Cho hai đường tròn $(O\ ;\ R)$ và $(O'\ ;\ R')$ nằm trên hai mặt phẳng song song (P) và (Q) sao cho OO' vuông góc với (P). Đặt $OO' = h$. Chứng minh rằng có mặt cầu đi qua hai đường tròn trên, tính diện tích mặt cầu đó.

3. Cho tam giác đều ABC cạnh a. Xét đường thẳng Δ đi qua A và vuông góc với mp(ABC). Gọi S là điểm bất kì trên Δ, S khác A.

1) Khi $SA = h$ (h cho trước), hãy tính diện tích và thể tích của hình cầu ngoại tiếp tứ diện $SABC$.

2) Gọi A' là điểm đối xứng với điểm A qua tâm mặt cầu nói trên. Chứng minh rằng khi S thay đổi trên Δ thì A' thuộc một đường thẳng cố định.

4. Cho hình lăng trụ đứng có chiều cao h không đổi, đáy là tứ giác $ABCD$, trong đó A, B, C, D thay đổi và $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{IB}.\overrightarrow{ID} = -h^2$, với I là giao điểm hai đường chéo. Hãy xác định giá trị nhỏ nhất của bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ đó.

5. Cho tam giác đều ABC cạnh a. Gọi (P) là mặt phẳng qua cạnh BC và vuông góc với mp(ABC). Gọi $(\mathscr{C})$ là đường tròn đường kính BC trong mp(P) và S là điểm bất kì thuộc $(\mathscr{C})$. Khi S thay đổi trên $(\mathscr{C})$, chứng minh rằng :

1) $SA^2 + SB^2 + SC^2$ không đổi ;

2) Tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $SABC$ là điểm cố định (nếu S khác B, C).

6. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, chiều cao SH bằng $\frac{a}{2}$.

1) Chứng minh rằng tồn tại mặt cầu tâm H tiếp xúc với tất cả các mặt bên của hình chóp. Tính bán kính R của mặt cầu đó.

2) Gọi (P) là mặt phẳng song song với mp($ABCD$) và cách mp($ABCD$) một khoảng x ($0 < x < R$). Gọi S_{td} là diện tích thiết diện tạo bởi mp(P) và hình chóp bỏ đi phần nằm trong mặt cầu. Hãy xác định x để $S_{td} = \pi R^2$.

7. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là tứ giác có hai đường chéo vuông góc với nhau tại H và SH là đường cao của hình chóp đã cho.

1) Chứng minh rằng bốn tâm mặt cầu ngoại tiếp các hình chóp $S.HAB$, $S.HBC$, $S.HCD$, $S.HDA$ là bốn đỉnh của một hình chữ nhật.

2) Gọi H_1, H_2, H_3, H_4 là hình chiếu của H lần lượt trên AB, BC, CD, DA. Chứng minh rằng hình chóp $S.H_1H_2H_3H_4$ có mặt cầu ngoại tiếp. Tính diện tích của thiết diện của mặt cầu ấy khi cắt bởi mp($ABCD$) nếu biết $H_1H_3 = a$, $\widehat{BAC} = \alpha$, $\widehat{BDC} = \beta$.

8. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp$ mp(ABC), $AB = c$, $AC = b$, $\widehat{BAC} = \alpha$. Gọi B_1, C_1 lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SB, SC. Chứng minh rằng các điểm A, B, C, B_1, C_1 cùng thuộc một mặt cầu và tính bán kính của mặt cầu đó theo b, c, α.

9. Chứng minh rằng nếu tứ diện $ABCD$ có tính chất

$$AB + CD = AC + BD = AD + BC$$

thì có mặt cầu tiếp xúc với các cạnh của tứ diện $ABCD$.

10. Cho hình chóp $S.ABC$. Biết rằng có một mặt cầu bán kính r tiếp xúc với các cạnh của hình chóp và tâm I của mặt cầu nằm trên đường cao SH của hình chóp.

1) Chứng minh rằng $S.ABC$ là hình chóp đều.

2) Tính đường cao của hình chóp biết rằng $IS = r\sqrt{3}$.

11. Cho hai tia Ax, By chéo nhau và vuông góc với nhau, AB là đường vuông góc chung, $AB = a$. Lấy các điểm C và D lần lượt thuộc Ax và By.

1) Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ theo a, b, c, ở đó $b = AC$, $c = BD$.

2) Khi C, D thay đổi trên Ax, By sao cho $AC + BD = CD$, chứng tỏ rằng CD luôn tiếp xúc với mặt cầu đường kính AB.

12. Cho hai đường thẳng chéo nhau d_1, d_2 nhận IJ là đường vuông góc chung ($I \in d_1$, $J \in d_2$), $IJ = a$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm I và vuông góc với d_2, đặt α là góc giữa d_1 và (P). Xét một mặt phẳng (Q) song song với (P) cắt d_1, d_2 lần lượt tại A_1, A_2. Gọi H_1 là hình chiếu của A_1 trên (P).

1) Chứng minh rằng các điểm I, J, A_1, A_2, H_1 cùng thuộc một mặt cầu. Chỉ rõ tâm của mặt cầu đó và tính diện tích mặt cầu theo a, α và khoảng cách h giữa hai mặt phẳng (P), (Q).

2) Chứng minh rằng khi mp(Q) thay đổi thì tâm mặt cầu nói trên luôn thuộc một đường thẳng cố định và mặt cầu ấy luôn đi qua một đường tròn cố định.

13. Cho mặt cầu tâm O bán kính R và A là điểm cố định thuộc mặt cầu. Ba tia At_1, At_2, At_3 thay đổi, đôi một vuông góc với nhau và cắt mặt cầu tại các điểm B, C, D.

1) Chứng minh rằng hình hộp dựng trên ba cạnh AB, AC, AD có một đường chéo cố định và mp(BCD) luôn luôn đi qua một điểm cố định.

2) Chứng minh rằng hình chiếu H của điểm D trên đường thẳng BC thuộc một mặt cầu cố định.

14. Cho đường tròn đường kính $AB = 2R$ nằm trong mặt phẳng (P). Gọi O_1 là điểm đối xứng với O qua A. Lấy điểm S sao cho SO_1 vuông góc với (P) và $SO_1 = 2R$. Tính thể tích của khối cầu đi qua đường tròn đã cho và điểm S.

15. Trong số các hình hộp nội tiếp một mặt cầu bán kính R cho trước, tìm hình hộp thoả mãn một trong các tính chất sau :

1) Thể tích hình hộp đạt giá trị lớn nhất ;

2) Tổng độ dài các cạnh của hình hộp đạt giá trị lớn nhất.

16. Trong số các hình chóp tam giác đều nội tiếp một mặt cầu bán kính R cho trước, hãy xác định hình chóp có thể tích lớn nhất. Mở rộng bài toán cho hình chóp n−giác đều.

17. Trong số các hình chóp tam giác đều ngoại tiếp một mặt cầu bán kính r cho trước, tìm hình chóp có diện tích toàn phần nhỏ nhất.

18. Cho hình chóp $S.ABC$. Biết rằng có một mặt cầu tiếp xúc với ba cạnh của tam giác ABC tại trung điểm của mỗi cạnh, đồng thời mặt cầu đó đi qua trung điểm của các cạnh bên SA, SB, SC.

1) Chứng minh rằng $S.ABC$ là hình chóp đều.

2) Tính diện tích mặt cầu, biết cạnh đáy và chiều cao của hình chóp lần lượt là a và h.

19. Cho tam giác ABC vuông ở A, $BC = 2a$, $\widehat{ACB} = 30^{\circ}$. Xét hai tia Bx, Cy cùng hướng và cùng vuông góc với mp(ABC).

1) Xác định vị trí điểm B_1 trên Bx sao cho mặt cầu đường kính BB_1 tiếp xúc với Cy.

Xác định điểm C_1 trên Cy sao cho mặt cầu đường kính AC_1 tiếp xúc với Bx.

2) Với các điểm B_1, C_1 tìm được ở trên, hỏi đa diện $ABCC_1B_1$ có mặt cầu ngoại tiếp không ? Hãy tính thể tích của khối đa diện đó.