§2, §3. Khái niệm về mặt tròn xoay. Mặt trụ, hình trụ và khối trụ

20. 1) Kí hiệu bán kính đáy và chiều cao hình trụ đó lần lượt là R và h. Khi đó

$$S_đ = \pi R^2 = 4\pi a^2,\ S_{xq} = S = 2\pi Rh.$$

Từ các hệ thức trên, ta có $R = 2a$ và $h = \dfrac{S}{4\pi a}$. Như vậy thể tích khối trụ là

$$V = \pi R^2 h = \pi.4a^2.\frac{S}{4\pi a} = Sa.$$

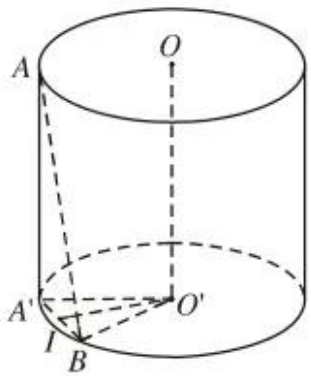
2) Thiết diện qua trục của hình trụ là hình chữ nhật có các kích thước là $2R$ và h. Vậy diện tích thiết diện qua trục là

$$2Rh = 4a.\frac{S}{4\pi a} = \frac{S}{\pi}.$$

21. (h.65)

1) Gọi AA' là một đường sinh của hình trụ thì $AA' = h$ và $AA' \,//\, OO'$, khi ấy $\alpha = \widehat{BAA'}$ là góc giữa AB và OO' và $\cos\alpha = \dfrac{AA'}{AB} = \dfrac{h}{a}$. Điều này khẳng định góc giữa AB và OO' không đổi.

2) Gọi I là trung điểm của $A'B$ thì có $O'I \perp \text{mp}(AA'B)$, mặt khác $OO' \,//\, \text{mp}(AA'B)$, vậy $O'I$ là khoảng cách giữa AB và OO'.



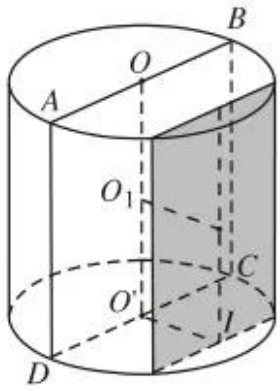
Hình 65

Vì $O'I$ là trung tuyến của tam giác $A'O'B$ có ba cạnh là $A'B = \sqrt{a^2 - h^2}$, $O'A' = O'B = R$ nên $O'I$ có độ dài không đổi. Dễ thấy $O'I = \sqrt{R^2 - \frac{a^2 - h^2}{4}}$.

22. (h.66)

1) Giả sử thiết diện qua trục OO' của hình trụ là hình vuông $ABCD$. Khi đó $AB = AD = 2R$. Gọi O_1 là trung điểm của OO' thì mặt cầu tâm O_1, bán kính O_1B là mặt cầu ngoại tiếp hình trụ.

Dễ thấy $O_1B = R\sqrt{2}$. Vậy diện tích mặt cầu là $4\pi\left(R\sqrt{2}\right)^2 = 8\pi R^2$ và thể tích khối cầu là $\frac{4}{3}\pi\left(R\sqrt{2}\right)^3 = \frac{8}{3}\pi R^3\sqrt{2}$.



Hình 66

2) Mặt phẳng (P) song song với OO' nên cắt hình trụ theo thiết diện là hình chữ nhật có một cạnh bằng AD, cạnh còn lại theo giả thiết bằng R. Vậy diện tích thiết diện của hình trụ cắt bởi (P) là $R.2R = 2R^2$.

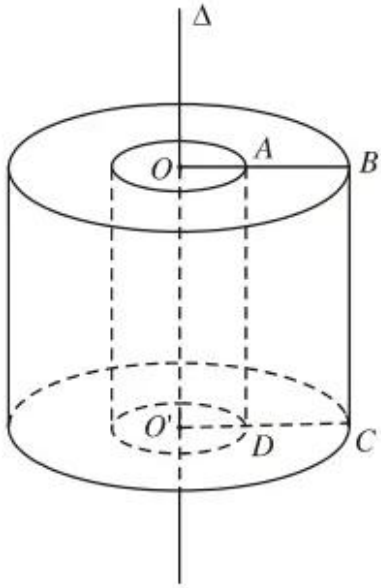
Vì $(P) // OO'$ nên khoảng cách từ tâm O_1 của mặt cầu ngoại tiếp hình trụ đến (P) bằng khoảng cách từ O' đến (P) và bằng $O'I$ (I là trung điểm của dây cung nói trong giả thiết). Ta có $O'I^2 = R^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{3R^2}{4}$. Tức là $O'I = \frac{R\sqrt{3}}{2}$. Vì mp$(P)$ cắt mặt cầu trên theo đường tròn nên bán kính r của đường tròn được tính theo công thức :

$$r^2 = O_1B^2 - O'I^2 = 2R^2 - \frac{3R^2}{4} = \frac{5R^2}{4}.$$

Vậy diện tích thiết diện của mặt cầu ngoại tiếp hình trụ đã cho khi cắt bởi mp(P) là $S = \frac{5\pi R^2}{4}$.

23. (h.67)

1) Kí hiệu O, O' lần lượt là giao điểm của các đường thẳng AB, CD với Δ. Gọi V là thể tích cần tìm, V_2 là thể tích hình trụ tạo nên khi quay hình chữ nhật $OBCO'$ quanh Δ (với $OA < OB$) hoặc hình tạo nên khi quay hình chữ nhật $OADO'$ quanh Δ (với $OA > OB$) ; V_1 là thể tích hình trụ tạo nên khi quay hình chữ nhật $OADO'$ quanh Δ (với $OA < OB$) hoặc hình trụ tạo nên khi quay hình chữ nhật $OBCO'$ quanh Δ (với $OA > OB$). Khi đó $V = V_2 - V_1$.



Hình 67

Từ đó, với $OA < OB$ thì

$$V = \pi OB^2.BC - \pi OA^2.AD = 2a\pi\left[(x+a)^2 - x^2\right] = 2a^2\pi(2x+a)$$

và với $OA > OB$ thì

$$V = \pi OA^2.AD - \pi OB^2.BC = 2a\pi\left[x^2 - (x-a)^2\right] = 2a^2\pi(2x-a).$$

2) Thể tích khối cầu bán kính bằng AB là $\frac{4}{3}\pi a^3$. Theo giả thiết ta có

$$4\pi a^3 = 2\pi a^2(2x+a) \text{ (với } OA < OB)$$

hoặc $$4\pi a^3 = 2\pi a^2(2x-a) \text{ (với } OA > OB).$$

Từ đó $x = \frac{a}{2}$ (với $OA < OB$) hoặc $x = \frac{3a}{2}$ (với $OA > OB$).

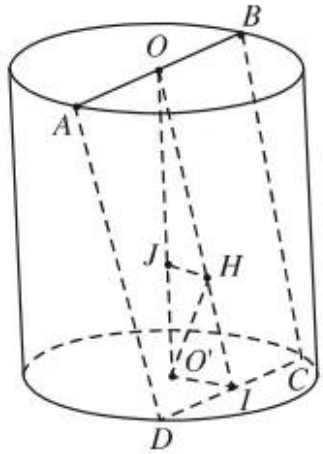
24. (h.68)

1) Gọi I là trung điểm của CD thì $O'I \perp CD$, từ đó $OI \perp CD$. Vậy $\alpha = \widehat{OIO'}$.

Dễ thấy $AB \,//\, CD$, tức là $ABCD$ là hình thang. Mặt khác $OI \perp CD$ nên $OI \perp AB$. Vậy $ABCD$ là hình thang cân.

Diện tích S của $ABCD$ được tính bởi.

$$S = \frac{1}{2}(AB + CD).\,OI$$



Hình 68

Ta có : $AB = 2R$, $OI = \dfrac{OO'}{\sin\alpha} = \dfrac{h}{\sin\alpha}$,

$$O'I = OO'\cot\alpha \Rightarrow ID = \sqrt{O'D^2 - O'I^2} = \sqrt{R^2 - h^2\cot^2\alpha}$$

$$\Rightarrow CD = 2\sqrt{R^2 - h^2\cot^2\alpha}.$$

Vậy $S = \dfrac{1}{2}\left(2R + 2\sqrt{R^2 - h^2\cot^2\alpha}\right).\dfrac{h}{\sin\alpha} = \left(R + \sqrt{R^2 - h^2\cot^2\alpha}\right).\dfrac{h}{\sin\alpha}$.

2) Trong mặt phẳng $(OO'I)$, kẻ $O'H \perp OI$ thì H là hình chiếu của điểm O' trên mp(P).

Xét tam giác vuông $O'IH$, ta có $O'H = O'I\sin\alpha = h.\cot\alpha.\sin\alpha = h.\cos\alpha$.

Kẻ đường cao HJ của tam giác vuông $O'HO$ thì $O'J.OO' = O'H^2$

$\Rightarrow O'J = \dfrac{O'H^2}{OO'} = h.\cos^2\alpha$, từ đó suy ra J là điểm cố định.

Mặt khác $HJ^2 = O'H^2 - O'J^2 = h^2.\cos^2\alpha - h^2.\cos^4\alpha = h^2\cos^2\alpha\sin^2\alpha$.

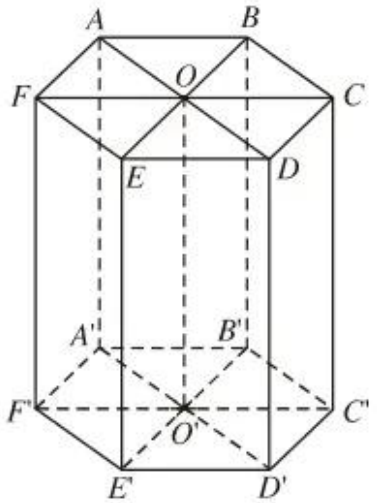
Vậy HJ có độ dài không đổi, từ đó ta có điểm H thuộc đường tròn tâm J, bán kính cho trước, trong mặt phẳng vuông góc với OO' tại J.

Chú ý. Cũng có thể thấy H thuộc mặt trụ $\mathcal{T}$ có trục là OO', bán kính đáy R' cho trước, cụ thể $R' = h.\cos\alpha.\sin\alpha$, đồng thời H thuộc mặt phẳng vuông góc với trục OO' tại điểm J. Từ đó H thuộc đường tròn là giao của mặt trụ $\mathcal{T}$ và mặt phẳng nói trên.

25. (h.69)

1) Hình trụ ngoại tiếp hình lăng trụ đã cho có trục là OO' (O, O' là tâm hai đáy của hình lăng trụ) và đường tròn đáy của hình trụ này là đường tròn ngoại tiếp đáy của hình lăng trụ.

Dễ thấy bán kính đường tròn đáy của hình trụ ngoại tiếp bằng a. Vậy diện tích xung quanh của hình trụ đó là $S_1 = 2\pi ah$, thể tích khối trụ đó là $V_1 = \pi a^2h$.



Hình 69

2) Hình trụ nội tiếp hình lăng trụ đã cho có trục là OO', đường tròn đáy của hình trụ này là đường tròn nội tiếp đáy hình lăng trụ.

Dễ thấy bán kính đường tròn đáy của hình trụ nội tiếp bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Vậy : diện tích toàn phần của hình trụ đó là

$$S_2 = 2\pi.\frac{a\sqrt{3}}{2}.h + 2.\pi\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \pi a\sqrt{3}\left(h + \frac{\sqrt{3}}{2}a\right),$$

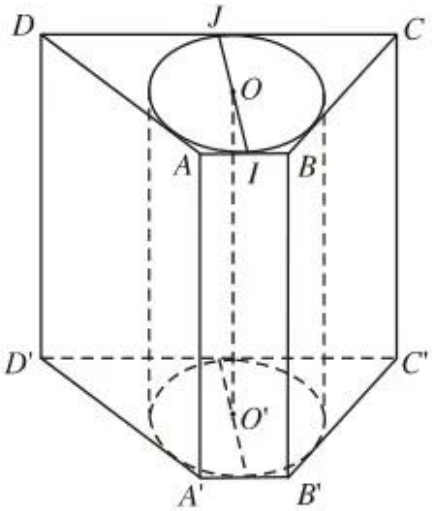
thể tích hình trụ đó là

$$V_2 = \pi\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2.h = \frac{3}{4}\pi a^2 h.$$

26. (h.70a, b)

1) Vì hình lăng trụ đã cho là hình lăng trụ đứng nên chỉ cần chứng minh đáy $ABCD$ có đường tròn nội tiếp.

Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD thì $IJ \perp AB$, $IJ \perp CD$. Gọi O là trung điểm của IJ thì $OI = OJ = \frac{IJ}{2}$. Kẻ $BH \perp CD$.



Hình 70a

Ta có $IJ = BH = \sqrt{BC^2 - HC^2}$

$$= \sqrt{\frac{25a^2}{4} - \left(2a - \frac{a}{2}\right)^2} = 2a.$$

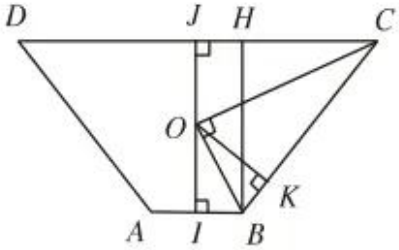
Vậy $OI = OJ = a$.

Mặt khác $OB^2 = OI^2 + IB^2$

$$= a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{4},$$

$$OC^2 = OJ^2 + JC^2$$

$$= a^2 + 4a^2 = 5a^2,$$



Hình 70b

từ đó ta có $BC^2 = OB^2 + OC^2$.

Kẻ đường cao OK của tam giác vuông OBC thì $OK.BC = OB.OC$, suy ra

$$OK = \frac{\frac{a\sqrt{5}}{2}.a\sqrt{5}}{\frac{5a}{2}} = a.$$

Vậy O là tâm đường tròn nội tiếp hình thang cân $ABCD$.

Vậy hình trụ có trục OO' (O, O' là tâm hai đường tròn đáy) và bán kính đáy bằng a chính là hình trụ nội tiếp hình lăng trụ đã cho.

2) Diện tích toàn phần của hình trụ đó là

$$S = 2\pi a^2 + 2\pi ah = 2\pi a(a + h)$$

và thể tích hình trụ đó là

$$V = \pi a^2 h.$$

Chú ý. Có thể giải thích $ABCD$ có đường tròn nội tiếp bởi điều kiện

$$AB + CD = BC + AD.$$

27. (h.71)

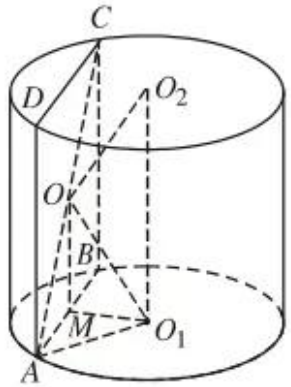
Vì $ABCD$ là hình chữ nhật nên O là trung điểm của AC.

Gọi M là trung điểm của AB thì $O_1M \perp AB$, $OM \perp AB$ và theo giả thiết, $AO = AO_1$.

Hai tam giác vuông MAO và MAO_1 có MA chung, $OA = O_1A$ nên $OM = O_1M$.

Từ đó $\widehat{OO_1M} = 45^o$, do đó $\widehat{OO_1O_2} = 45^o$.

Dễ thấy ΔO_1OO_2 cân tại O, vậy $\widehat{O_1OO_2} = 90^o$.



Hình 71

28. (h.72)

1) Từ $S_{xq} = 2\pi R.OO_1$ (R là bán kính đáy)

$$S_{tp} = 2\pi R(R + OO_1),$$

ta có $\dfrac{S_{tp}}{S_{xq}} = \dfrac{R}{OO_1} + 1 = \dfrac{1}{2} + 1 = \dfrac{3}{2}$.

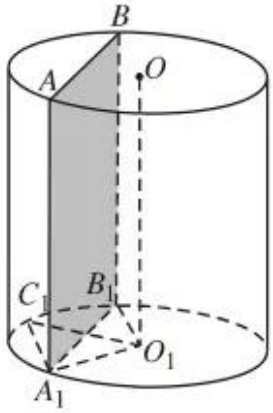
Vậy $S_{tp} = \dfrac{3}{2}.4\pi = 6\pi$.

2) Ta có $4\pi = S_{xq} = 2\pi R.OO_1 = 2\pi.R.2R$

$$\Rightarrow R = 1.$$

Thể tích khối trụ là

$$V = \pi R^2.OO_1 = 2\pi R^3 = 2\pi.$$



Hình 72

3) Gọi A_1C_1 là một cạnh của n–giác đều nội tiếp đáy hình trụ thì

$\widehat{A_1O_1C_1} = \dfrac{2\pi}{n}$ và diện tích đáy hình lăng trụ bằng

$$S_n = n.S_{\Delta A_1O_1C_1} = n.\frac{1}{2}R^2\sin\frac{2\pi}{n} = \frac{n}{2}R^2\sin\frac{2\pi}{n} = \frac{n}{2}\sin\frac{2\pi}{n}.$$

$$V_n = S_n.OO_1 = n\sin\frac{2\pi}{n}.$$

4) Đường tròn lớn của hình cầu ngoại tiếp hình trụ là đường tròn ngoại tiếp thiết diện qua trục. Vậy bán kính mặt cầu là $R_C = R\sqrt{2}$ (R là bán kính đáy của hình trụ). Từ đó thể tích khối cầu phải tìm là

$$V_C = \frac{4}{3}\pi(R_C)^3 = \frac{8\pi\sqrt{2}}{3}.$$

5) Với thiết diện ABB_1A_1 như hình vẽ, ta có $\widehat{A_1O_1B_1} = 120^o$, từ đó

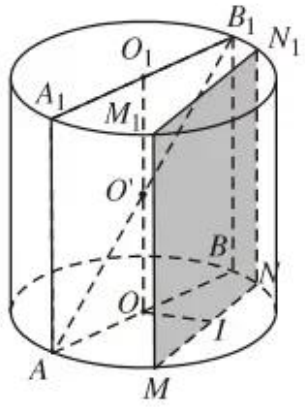
$$A_1B_1 = 2R\sin 120^o = R\sqrt{3}.$$

Vậy $\quad A_1B_1 = \sqrt{3}$.

Do đó diện tích thiết diện là : $A_1B_1.\,AA_1 = \sqrt{3}.2 = 2\sqrt{3}$.

29. (h.73) Gọi O' là trung điểm của trục O_1O của hình trụ thì O' là tâm mặt cầu đã cho. Kí hiệu h và r lần lượt là chiều cao và bán kính đáy của hình trụ thì diện tích thiết diện qua trục là

$$S_{td} = 2r.h.$$



Hình 73

Mặt khác $R^2 = O'A^2 = r^2 + \dfrac{h^2}{4} \Rightarrow r^2 = R^2 - \dfrac{h^2}{4}$.

Từ đó $S_{td} = h\sqrt{4R^2 - h^2} = \sqrt{h^2(4R^2 - h^2)}$.

Vậy S_{td} lớn nhất khi và chỉ khi $h = R\sqrt{2}$.

Khi đó $r = \sqrt{R^2 - \dfrac{1}{4}.2R^2} = \dfrac{R\sqrt{2}}{2} = \dfrac{h}{2}$, tức là thiết diện qua trục là hình vuông.

1) $V = \pi r^2h = 2\pi r^2.r = 2\pi r^3 = \dfrac{\pi R^3\sqrt{2}}{2}$,

$S_{tp} = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 3\pi R^2$.

2) • Dễ thấy diện tích đáy của hình lăng trụ n–giác đều nội tiếp hình trụ là $\frac{n}{2}r^2\sin\frac{2\pi}{n}$. Vậy thể tích hình lăng trụ đó là

$$V_{l.trụ} = \frac{n}{2}r^2\sin\frac{2\pi}{n}.2r = nr^3\sin\frac{2\pi}{n} = \frac{nR^3}{2\sqrt{2}}\sin\frac{2\pi}{n}.$$

• Xét đa giác đều n cạnh ngoại tiếp đường tròn đáy hình trụ thì độ dài cạnh của đa giác bằng $2r\tan\frac{\pi}{n}$, từ đó diện tích đáy hình lăng trụ là

$$S_{đáy} = n.\frac{1}{2}2r.\tan\frac{\pi}{n}.r = nr^2\tan\frac{\pi}{n}.$$

Vậy thể tích hình lăng trụ n–giác đều ngoại tiếp hình trụ là

$$nr^2\tan\frac{\pi}{n}.2r = 2nr^3.\tan\frac{\pi}{n} = \frac{nR^3}{\sqrt{2}}\tan\frac{\pi}{n}.$$

3) Giả sử thiết diện là MNN_1M_1 thì MNN_1M_1 là hình chữ nhật. Gọi I là trung điểm của MN thì

$$OI = \frac{R}{2} \text{ và } IM = \sqrt{r^2 - \frac{R^2}{4}} = \sqrt{\frac{R^2}{2} - \frac{R^2}{4}} = \frac{R}{2}.$$

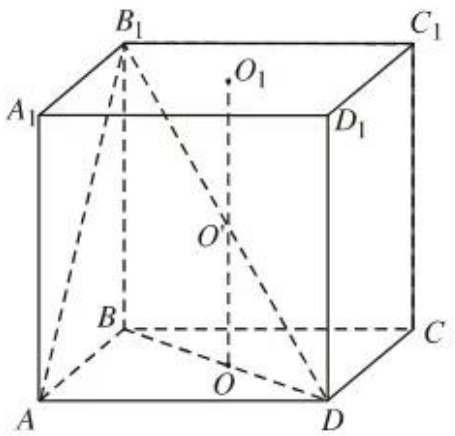
Vậy diện tích thiết diện MNN_1M_1 là

$$MN.NN_1 = 2IM.h = R.R\sqrt{2} = R^2.\sqrt{2}.$$

30. (h.74) Vì hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ nội tiếp hình trụ nên $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ là hình hộp chữ nhật, trục hình trụ là OO_1 (đoạn nối tâm hai đáy của hình hộp) và khoảng cách từ OO_1 đến mặt phẳng (ABB_1A_1) bằng nửa AD. Từ đó $AD = 3a$.

BD là đường kính của đường tròn đáy hình trụ nên $BD = 5a$, suy ra

$AB^2 = BD^2 - AD^2 = 16a^2$, tức là $AB = 4a$.



Hình 74

Dễ thấy $\widehat{DB_1A}$ là góc giữa B_1D và mặt phẳng (ABB_1A_1), theo giả thiết thì $\widehat{DB_1A} = 30^o$, từ đó $B_1D = 2AD = 6a$.

Vậy $BB_1^2 = B_1D^2 - BD^2 = 36a^2 - 25a^2 = 11a^2$, tức là $BB_1 = a\sqrt{11}$.

Do đó thể tích hình hộp đã cho là

$$V = AB.\,AD.\,BB_1 = 4a.3a.\,a\sqrt{11} = 12a^3\sqrt{11}.$$

Gọi O' là trung điểm của OO_1 thì O' là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ và bán kính của mặt cầu đó là $R = \frac{1}{2}B_1D = 3a$.

Từ đó thể tích hình cầu phải tìm là

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi.27.a^3 = 36\pi a^3.$$