§2. Phép đối xứng qua mặt phẳng và sự bằng nhau của các khối đa diện

5. Giả sử (α) là mặt phẳng đối xứng của tứ diện đều *ABCD*, tức là phép đối xứng qua mp(α), kí hiệu D_α, biến tập hợp $\{A, B, C, D\}$ thành chính nó. Vì D_α không thể biến mỗi đỉnh thành chính nó (vì khi đó D_α là phép đồng nhất) nên phải có một đỉnh, chẳng hạn *A*, biến thành một đỉnh khác, chẳng hạn *B*. Khi đó, (α) là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng *AB* (hiển nhiên (α) đi qua *C* và *D*).

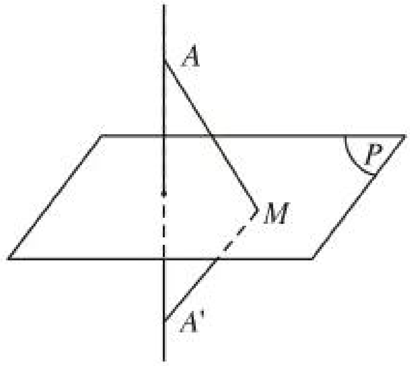
Như vậy, tứ diện đều *ABCD* có 6 mặt phẳng đối xứng, đó là các mặt phẳng trung trực của các cạnh.

6. Gọi *I* là trung điểm của *AB* thì mp(*ICD*) là mặt phẳng trung trực của *AB* nên mặt phẳng đó chia tứ diện đều *ABCD* thành hai tứ diện bằng nhau : tứ diện *AICD* và tứ diện *BICD*. Gọi *J* là trung điểm *CD* thì mp(*JAB*) là mặt phẳng đối xứng của tứ diện *AICD* nên nó chia tứ diện đó thành hai tứ diện bằng nhau : tứ diện *CAIJ* và tứ diện *DAIJ*. Cố nhiên mp(*JAB*) cũng là mặt phẳng đối xứng của tứ diện *BICD* nên nó chia tứ diện đó thành hai tứ diện bằng nhau : tứ diện *CBIJ* và tứ diện *DBIJ*.

Chú ý rằng phép đối xứng qua đường thẳng *IJ* biến tứ diện *CAIJ* thành tứ diện *DBIJ* nên hai tứ diện đó bằng nhau.

Tóm lại ta có bốn hình tứ diện bằng nhau : *CAIJ*, *DAIJ*, *CBIJ*, *DBIJ*.

7. (h.4) Phép dời hình f biến mọi điểm M nằm trên (P) thành chính nó. Với điểm A không nằm trên (P), ta gọi A' là ảnh của A qua f. Khi đó, nếu $M \in (P)$ thì $MA = MA'$. Vậy (P) là mặt phẳng trung trực của AA', tức A' đối xứng với A qua (P). Vậy f là phép đối xứng qua mp(P).



Hình 4

8. Phép đồng nhất e biến hai điểm M, N bất kì lần lượt thành M, N. Vì $MN = MN$ nên e là phép dời hình.

9. Giả sử phép dời hình f biến mỗi điểm A, B, C, D thành chính nó, tức là $f(A) = A$, $f(B) = B$, $f(C) = C$, $f(D) = D$. Ta chứng minh rằng f biến điểm M bất kì thành M. Thật vậy giả sử $M' = f(M)$ và M' khác M. Khi đó, vì phép dời hình không làm thay đổi khoảng cách giữa hai điểm nên $AM = AM'$, $BM = BM'$, $CM = CM'$, $DM = DM'$, suy ra bốn điểm A, B, C, D cùng nằm trên mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng MM', điều đó trái với giả thiết $ABCD$ là hình tứ diện. Vậy M' trùng với M và do đó, f là phép đồng nhất.

10. Giả sử có hai phép dời hình f_1 và f_2 đều biến các điểm A, B, C, D lần lượt thành các điểm A', B', C', D'. Nếu f_1 và f_2 khác nhau thì có ít nhất một điểm M sao cho nếu $M_1 = f_1(M)$ và $M_2 = f_2(M)$ thì M_1 và M_2 là hai điểm phân biệt. Khi đó, vì f_1 và f_2 đều là phép dời hình nên $A'M_1 = AM$ và $A'M_2 = AM$, vậy $A'M_1 = A'M_2$, tương tự $B'M_1 = B'M_2$, $C'M_1 = C'M_2$, $D'M_1 = D'M_2$, do đó bốn điểm A', B', C', D' cùng nằm trên mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng M_1M_2, trái với giả thiết $A'B'C'D'$ là hình tứ diện. Vậy với mọi điểm M, ta đều có $f_1(M) = f_2(M)$, tức là hai phép dời hình f_1 và f_2 trùng nhau.

11. Giả sử (S) là mặt cầu tâm O bán kính R và f là phép dời hình bất kì. Gọi $O' = f(O)$ và (S') là mặt cầu tâm O' bán kính R. Nếu $M \in (S)$ và $f(M) = M'$ thì $O'M' = OM = R$ nên $M' \in (S')$. Ngược lại, nếu $M' \in (S')$ và $M' = f(M)$ thì $OM = O'M' = R$ nên $M \in (S)$. Như vậy, phép dời hình f biến mặt cầu (S) thành mặt cầu (S') có cùng bán kính.

12. Ta có $f(A) = A$, $f(B) = B$. Giả sử điểm M thuộc đường thẳng AB và $f(M) = M'$. Khi đó, M' thuộc đường thẳng AB và $AM = AM'$, $BM = BM'$. Suy ra M' trùng M, tức là f biến M thành chính nó.

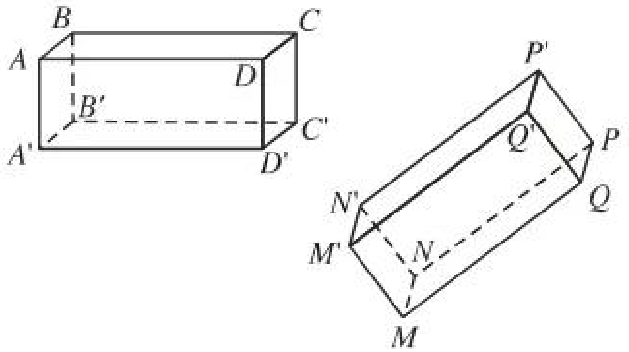
13. Vì $f(A) = A$, $f(B) = B$ và $f(C) = C$ nên f biến mp(ABC) thành mp(ABC). Bởi vậy, nếu M thuộc mp(ABC) và $f(M) = M'$ thì M' thuộc mp(ABC) và $AM = AM'$, $BM = BM'$, $CM = CM'$. Nếu M' và M phân biệt thì ba điểm A, B, C cùng thuộc đường thẳng trung trực của đoạn thẳng MM' (xét trên mp(ABC)), trái với giả thiết ABC là tam giác. Vậy $f(M) = M$.

14. a) Theo giả thiết $f(A) = B$ và $f(B) = C$, $f(C) = A$. Bởi vậy $f(M) = M$ khi và chỉ khi $MA = MB = MC$. Suy ra tập hợp các điểm M là trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

b) Theo giả thiết $f(A) = B$, $f(B) = A$, $f(C) = D$. Bởi vậy $f(M) = M$ khi và chỉ khi $MA = MB$ và $MC = MD$, tức là M đồng thời nằm trên hai mặt phẳng trung trực của AB và CD. Suy ra tập hợp các điểm M là đường thẳng đi qua trung điểm của AB và CD.

c) Theo giả thiết $f(A) = B$, $f(B) = C$, $f(C) = D$. Bởi vậy $f(M) = M$ khi và chỉ khi $MA = MB = MC = MD$. Suy ra tập hợp các điểm M gồm một điểm duy nhất là trọng tâm của tứ diện $ABCD$.

15. a) Giả sử hai hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ và $MNPQ.M'N'P'Q'$ có $AB = MN$, $AD = MQ$, $AA' = MM'$ (h.5). Ta thấy rằng khi đó, hai tứ diện $ABDA'$ và $MNQM'$ có các cạnh tương ứng bằng nhau nên có phép dời hình f biến A, B, D, A' lần lượt thành các điểm M, N, Q, M'.



Hình 5

Khi đó vì f biến tam giác ABD thành tam giác MNQ nên f biến điểm C thành điểm P. Cũng tương tự như thế, f biến B' thành N', biến D' thành Q' và biến C' thành P'. Vậy f biến hình hộp thứ nhất thành hình hộp thứ hai, do đó hai hình hộp bằng nhau.

b) Hiển nhiên đường chéo của hai hình lập phương bằng nhau khi và chỉ khi cạnh của chúng bằng nhau, do đó theo a), hai hình lập phương đó bằng nhau.