§2. Phép đối xứng qua mặt phẳng và sự bằng nhau của các khối đa diện

I - CÁC KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Phép dời hình (trong không gian) là phép biến hình không làm thay đổi khoảng cách giữa hai điểm bất kì.

Phép dời hình biến đường thẳng thành đường thẳng, biến mặt phẳng thành mặt phẳng, ...

Phép tịnh tiến, phép đối xứng trục, phép đối xứng tâm là những phép dời hình.

2. Hai hình đa diện gọi là bằng nhau nếu có phép dời hình biến hình này thành hình kia.

Hai tứ diện bằng nhau khi và chỉ khi các cạnh tương ứng của chúng bằng nhau.

3. Phép đối xứng qua mặt phẳng (P) là phép dời hình biến mỗi điểm M thuộc (P) thành chính nó, biến mỗi điểm M không thuộc (P) thành điểm M' sao cho (P) là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng MM'.

Mặt phẳng (P) được gọi là mặt phẳng đối xứng của hình $\mathscr{H}$ nếu phép đối xứng qua mp(P) biến hình $\mathscr{H}$ thành chính nó.

II - ĐỀ BÀI

5. Tìm tất cả các mặt phẳng đối xứng của hình tứ diện đều $ABCD$.

6. Cho hình tứ diện đều $ABCD$. Chứng minh rằng mặt phẳng trung trực của AB và mặt phẳng trung trực của CD chia tứ diện $ABCD$ thành bốn tứ diện bằng nhau.

7. Cho mặt phẳng (P) và phép dời hình f có tính chất : f biến điểm M thành điểm M khi và chỉ khi M nằm trên (P). Chứng tỏ rằng f là phép đối xứng qua mặt phẳng (P).

8. Phép biến hình biến mỗi điểm M của không gian thành chính nó gọi là phép đồng nhất, thường được kí hiệu là e. Hỏi phép đồng nhất e có phải là phép dời hình hay không ?

9. Cho tứ diện $ABCD$. Chứng tỏ rằng phép dời hình biến mỗi điểm A, B, C, D thành chính nó phải là phép đồng nhất.

10. Cho hai tứ diện $ABCD$ và $A'B'C'D'$ có các cạnh tương ứng bằng nhau : $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, $CD = C'D'$, $DA = D'A'$, $DB = D'B'$, $AC = A'C'$. Chứng minh rằng có không quá một phép dời hình biến các điểm A, B, C, D lần lượt thành các điểm A', B', C', D'.

11. Chứng minh rằng phép dời hình biến một mặt cầu thành một mặt cầu có cùng bán kính.

12. Cho hai điểm phân biệt A, B và phép dời hình f biến A thành A, biến B thành B. Chứng minh rằng f biến mọi điểm M nằm trên đường thẳng AB thành chính nó.

13. Cho tam giác ABC và phép dời hình f biến tam giác ABC thành chính nó với $f(A) = A$, $f(B) = B$, $f(C) = C$. Chứng minh rằng f biến mọi điểm M của mp(ABC) thành chính nó, tức là $f(M) = M$.

14. Cho tứ diện đều $ABCD$ và phép dời hình f biến $ABCD$ thành chính nó, nghĩa là biến mỗi đỉnh của tứ diện thành một đỉnh của tứ diện. Tìm tập hợp các điểm M trong không gian sao cho $M = f(M)$ trong các trường hợp sau đây :

a) $f(A) = B, f(B) = C, f(C) = A$;

b) $f(A) = B, f(B) = A, f(C) = D$;

c) $f(A) = B, f(B) = C, f(C) = D$.

15. Chứng minh rằng :

a) Hai hình hộp chữ nhật bằng nhau nếu các kích thước của chúng bằng nhau.

b) Hai hình lập phương bằng nhau nếu các đường chéo của chúng có độ dài bằng nhau.