§2. Phương trình mặt phẳng

35. a) Mặt phẳng qua $M_o(x_o\ ;\ y_o\ ;\ z_o)$ và song song với mp(Oxy) có vectơ pháp tuyến là $\vec{k}\,(0\ ;\ 0\ ;\ 1)$ nên có phương trình là $z - z_o = 0$.

Phương trình mặt phẳng qua $M_o(x_o\ ;\ y_o\ ;\ z_o)$ và song song với mp(Oxz) là :

$$y - y_o = 0.$$

Phương trình mặt phẳng qua $M_o(x_o\ ;\ y_o\ ;\ z_o)$ và song song với mp(Oyz) là :

$$x - x_o = 0.$$

b) Gọi M_1, M_2, M_3 lần lượt là hình chiếu của điểm M_o trên các trục Ox, Oy, Oz. Khi đó : $M_1 = (x_o\ ;\ 0\ ;\ 0)$, $M_2 = (0\ ;\ y_o\ ;\ 0)$, $M_3 = (0\ ;\ 0\ ;\ z_o)$.

Vậy phương trình mặt phẳng $(M_1M_2M_3)$ là :

$$\frac{x}{x_o} + \frac{y}{y_o} + \frac{z}{z_o} = 1.$$

c) Gọi (P_x) là mặt phẳng chứa điểm M_o và trục Ox. Khi đó vectơ pháp tuyến của nó là

$$\overrightarrow{n_x} = \left[\overrightarrow{OM_o}, \vec{i}\right] = \left(\begin{vmatrix} y_o & z_o \\ 0 & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} z_o & x_o \\ 0 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} x_o & y_o \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\right) = (0 ; z_o ; -y_o)$$

Vậy (P_x) có phương trình là $z_oy - y_oz = 0$.

Tương tự, phương trình mặt phẳng chứa điểm M_o và trục Oy là

$$z_ox - x_oz = 0,$$

phương trình mặt phẳng chứa điểm M_o và trục Oz là

$$y_ox - x_oy = 0.$$

36. a) *Cách 1 :* Mặt phẳng cần tìm có vectơ pháp tuyến là :

$$\vec{n} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].$$

$$\overrightarrow{AB} = (3 ; -6 ; 0),\ \overrightarrow{AC} = (5 ; 3 ; 3) \Rightarrow \vec{n} = \left(\begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}\right)$$

$$= (-18 ; -9 ; 39).$$

Hiển nhiên $\frac{1}{3}\vec{n} = (-6 ; -3 ; 13)$ cũng là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng cần tìm. Vậy mặt phẳng cần tìm đi qua điểm $A(-1 ; 2 ; 3)$ với vectơ pháp tuyến $(-6 ; -3 ; 13)$ nên có phương trình :

$-6(x + 1) - 3(y - 2) + 13(z - 3) = 0$ hay $-6x - 3y + 13z - 39 = 0$.

Cách 2 : Mặt phẳng cần tìm có phương trình dạng :

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Vì ba điểm A, B, C nằm trên mặt phẳng đó nên toạ độ của chúng phải thoả mãn phương trình mặt phẳng và ta có hệ :

$$\begin{cases} -A + 2B + 3C + D = 0 \\ 2A - 4B + 3C + D = 0 \\ 4A + 5B + 6C + D = 0. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3A + 6B = 0 \\ 2A + 9B + 3C = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 2B \\ B = -\dfrac{3}{13}C. \end{cases}$$

Suy ra : $A = 2B = -\dfrac{6}{13}C$, $D = A - 2B - 3C = -3C$.

Ta có thể chọn $C = 13$, khi đó $A = -6$, $B = -3$, $D = -39$ và phương trình mặt phẳng cần tìm là

$$-6x - 3y + 13z - 39 = 0.$$

b) Mặt phẳng qua $M_o = (1 ; 3 ; -2)$, vuông góc với trục Oy nên nó song song với mp(Oxz). Vậy phương trình của nó là $y = 3$ (xem bài 35a).

Ta có thể giải cách khác như sau :

Mặt phẳng cần tìm có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = \vec{j} = (0 ; 1 ; 0)$ nên có phương trình :

$$0(x - 1) + 1(y - 3) + 0(z + 2) = 0 \Leftrightarrow y - 3 = 0.$$

c) Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng cần tìm là $\vec{n} = \overrightarrow{BC} = (1 ; -6 ; 4)$, vậy phương trình của nó là

$$1(x - 1) - 6(y - 3) + 4(z + 2) = 0 \text{ hay } x - 6y + 4z + 25 = 0.$$

d) Mặt phẳng cần tìm song song với mặt phẳng $2x - y + 3z + 4 = 0$ nên phương trình có dạng $2x - y + 3z + D = 0$ với $D \neq 4$. Vì $M_o(1 ; 3 ; -2)$ thuộc mặt phẳng đó nên $2.1 - 3 + 3(-2) + D = 0 \Rightarrow D = 7$.

Phương trình mặt phẳng cần tìm là : $2x - y + 3z + 7 = 0$.

Ta cũng có thể giải bằng cách khác như sau : Vì mặt phẳng cần tìm song song với mặt phẳng $2x - y + 3z + 4 = 0$ nên nó có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (2 ; -1 ; 3)$. Vậy phương trình của nó là

$$2(x - 1) - 1(y - 3) + 3(z + 2) = 0 \Leftrightarrow 2x - y + 3z + 7 = 0.$$

e) Vectơ pháp tuyến $\vec{n}$ của mặt phẳng cần tìm vuông góc với hai vectơ

$\overrightarrow{AB} = (-1 ; -2 ; 5)$ và $\vec{n'} = (2 ; -1 ; 3)$ ($\vec{n'}$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $2x - y + 3z + 4 = 0$).

Vậy ta lấy $\vec{n} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{n'}\right] = \left(\begin{vmatrix}-2 & 5\\-1 & 3\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}5 & -1\\3 & 2\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}-1 & -2\\2 & -1\end{vmatrix}\right) = (-1\ ;\ 13\ ;\ 5).$

Do đó phương trình của nó là :

$$-1(x-3) + 13(y-1) + 5(z+1) = 0 \text{ hay } x - 13y - 5z + 5 = 0.$$

g) Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $2x - y + 3z + 4 = 0$ là $\overrightarrow{n'} = (2\ ;\ -1\ ;\ 3)$.

Vectơ pháp tuyến $\vec{n}$ của mặt phẳng cần tìm là :

$$\vec{n} = \left[\vec{j}, \overrightarrow{n'}\right] = \left(\begin{vmatrix}1 & 0\\-1 & 3\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}0 & 0\\3 & 2\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}0 & 1\\2 & -1\end{vmatrix}\right) = (3\ ;\ 0\ ;\ -2).$$

Vậy phương trình của nó là

$$3x - 2z - 2 = 0.$$

h) Mặt phẳng (α) và (α') có vectơ pháp tuyến lần lượt là $\overrightarrow{n_\alpha} = (2\ ;\ 1\ ;\ 2)$, $\overrightarrow{n_{\alpha'}} = (3\ ;\ 2\ ;\ 1)$.

Mặt phẳng cần tìm vuông góc với (α) và (α') nên có vectơ pháp tuyến là

$$\vec{n} = \left[\overrightarrow{n_\alpha}, \overrightarrow{n_{\alpha'}}\right] = \left(\begin{vmatrix}1 & 2\\2 & 1\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}2 & 2\\1 & 3\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}2 & 1\\3 & 2\end{vmatrix}\right) = (-3\ ;\ 4\ ;\ 1).$$

Vậy phương trình mặt phẳng cần tìm là

$$-3(x+2) + 4(y-3) + 1(z-1) = 0 \quad \text{hay} \quad 3x - 4y - z + 19 = 0.$$

37. a) *Cách 1 :* Ta có $\overrightarrow{AB} = (3\ ;\ -6\ ;\ 0)$, $\overrightarrow{AC} = (5\ ;\ 3\ ;\ 3)$, $\overrightarrow{AD} = (4\ ;\ 0\ ;\ -2)$

$\Rightarrow \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD} = (-18).4 + (-9).0 + 39.(-2) = -150 \neq 0.$

Vậy A, B, C, D không thuộc cùng một mặt phẳng.

Cách 2 :

Ta có phương trình mp(ABC) là $-6x - 3y + 13z - 39 = 0$.

Thay toạ độ của điểm $D(3\ ;\ 2\ ;\ 1)$ vào phương trình mặt phẳng đó, ta được :

$$-6.3 - 3.2 + 13.1 - 39 = -50 \neq 0.$$

Điều đó chứng tỏ D $\notin$ mp(ABC) hay bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng.

b) $a = \dfrac{78}{5}$.

c) Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng AB thì $I = (2 ; 0 ; 1)$. Ta có $\overrightarrow{AB} = (2 ; -2 ; 0)$.

Vậy phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB là

$$2(x-2) - 2(y-0) = 0 \Leftrightarrow 2x - 2y - 4 = 0 \text{ hay } x - y - 2 = 0.$$

Thay toạ độ của điểm $C(-1 ; 0 ; 2)$ vào phương trình mặt phẳng đó, ta có :

$$-1 - 0 - 2 = -3 \neq 0.$$

Vậy điểm C không thuộc mặt phẳng trung trực của đoạn AB.

38. a) Giả sử $I = (x ; y ; z)$. Khi đó $\overrightarrow{AB} = (2 ; 0 ; 2)$, $\overrightarrow{AI} = (x ; y ; z + 3)$.

Vì $\overrightarrow{AI}$ và $\overrightarrow{AB}$ cùng phương nên có một số k sao cho $\overrightarrow{AI} = \mathrm{k}\overrightarrow{AB}$ hay

$$\begin{cases} x = 2k \\ y = 0 \\ z + 3 = 2k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x - z - 3 = 0. \end{cases}$$

Mặt khác, $I \in (P)$ nên $3x - 8y + 7z - 1 = 0$. Vậy ta có hệ :

$$\begin{cases} y = 0 \\ x - z - 3 = 0 \\ 3x - 8y + 7z - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{11}{5} \\ y = 0 \\ z = -\dfrac{4}{5} \end{cases} \Rightarrow I = \left(\frac{11}{5}; 0; -\frac{4}{5}\right).$$

b) Ta có $AB = 2\sqrt{2}$. Giả sử $C = (x ; y ; z)$.

Ta phải có $\begin{cases} CA = 2\sqrt{2} \\ CB = 2\sqrt{2} \\ C \in (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + (z+3)^2 = 8 \\ (x-2)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 8 \\ 3x - 8y + 7z - 1 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + (z+3)^2 = 8 \\ x + z + 1 = 0 \\ 3x - 8y + 7z - 1 = 0. \end{cases}$$

Giải hệ bằng phương pháp thế, ta có hai nghiệm và do đó có hai điểm C :

$$C(2; -2; -3),\ C\left(-\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right).$$

39. Mặt phẳng cần tìm đi qua điểm $M_0(1 ; 2 ; 4)$ có phương trình :

$$a(x-1) + b(y-2) + c(z-4) = 0 \qquad (1)$$

hay $ax + by + cz = a + 2b + 4c$ với $a + 2b + 4c \neq 0$ (theo giả thiết).

Từ đó, ta xác định được toạ độ các giao điểm A, B, C là :

$$A = \left(\frac{a+2b+4c}{a}\ ;\ 0\ ;0\right)\ ; \qquad B = \left(0;\frac{a+2b+4c}{b}\ ;0\right),$$

$$C = \left(0\ ;\ 0\ ;\frac{a+2b+4c}{c}\right).$$

Vì $OA = OB = OC$ nên $OA^2 = OB^2 = OC^2$, do đó ta có :

$$\frac{(a+2b+4c)^2}{a^2} = \frac{(a+2b+4c)^2}{b^2} = \frac{(a+2b+4c)^2}{c^2}$$

hay $a^2 = b^2 = c^2$. Có những trường hợp sau xảy ra :

+ Nếu a, b, c cùng dấu thì $a = b = c$ và phương trình (1) trở thành

$$x + y + z - 7 = 0.$$

+ Nếu a, b cùng dấu và khác dấu với c thì $a = b = -c$. Phương trình (1) trở thành

$$x + y - z + 1 = 0.$$

+ Nếu a, c cùng dấu và khác dấu với b thì $a = c = -b$. Phương trình (1) trở thành

$$x - y + z - 3 = 0.$$

+ Nếu b, c cùng dấu và khác dấu với a thì $-a = b = c$. Phương trình (1) trở thành

$$-x + y + z - 5 = 0.$$

40. Giả sử $A = (a\ ;\ 0\ ;\ 0)$, $B = (0\ ;\ b\ ;\ 0)$, $C = (0\ ;\ 0\ ;\ c)$ với $a, b, c > 0$ và (P) là mặt phẳng phải tìm. Phương trình của (P) là :

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Vì $M_o \in (P)$ nên $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1.$

Thể tích của tứ diện $OABC$ là : $V_{OABC} = \frac{1}{6}abc.$

Theo bất đẳng thức Cô-si :

$$1 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{abc}} \Leftrightarrow abc \geq 27$$

$$\Rightarrow V_{OABC} \geq \frac{27}{6} = \frac{9}{2},\ \text{dấu bằng xảy ra khi } a = b = c = 3.$$

Vậy V_{OABC} nhỏ nhất bằng $\frac{9}{2}$ khi $a = b = c = 3$, khi đó phương trình mặt phẳng (P) là $x + y + z - 3 = 0$.

41. a) Hai mặt phẳng trùng nhau.

b) Hai mặt phẳng song song.

c), d), e) : Hai mặt phẳng cắt nhau.

42. a) $$\left[\begin{array}{l} \alpha = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ \alpha = \dfrac{\pi}{12} + m\pi \\ \alpha = \dfrac{5\pi}{12} + n\pi \end{array}\right. \qquad k, m, n \in \ .$$

b) $$\left[\begin{array}{l} \alpha = k\pi \\ \alpha = \pm\dfrac{\pi}{3} + l\pi \end{array}\right. \qquad k, l \in \ .$$

c) Hai mặt phẳng song song với nhau $\Leftrightarrow \dfrac{2}{m+3} = \dfrac{m}{2} = \dfrac{3}{5m+1} \neq \dfrac{-6+m}{-10}$. (*)

Ta có $\begin{cases} \dfrac{2}{m+3} = \dfrac{m}{2} \\ \dfrac{m}{2} = \dfrac{3}{5m+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 3m - 4 = 0 \\ 5m^2 + m - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1.$

Nhưng với $m = 1$ ta có $\dfrac{m}{2} = \dfrac{1}{2}$ và $\dfrac{-6+m}{-10} = \dfrac{1}{2}$, tức là điều kiện (*) không thoả mãn. Vậy không có giá trị nào của m để hai mặt phẳng song song.

Từ đó suy ra : hai mặt phẳng trùng nhau $\Leftrightarrow m = 1$;

hai mặt phẳng cắt nhau $\Leftrightarrow m \neq 1$.

Hai mặt phẳng vuông góc với nhau khi : $2(m + 3) + m.2 + 3(5m + 1) = 0$

$$\Leftrightarrow 19m + 9 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{9}{19}.$$

43. a) Gọi $M(x\ ;\ y\ ;\ z)$ là điểm thuộc giao tuyến Δ của hai mặt phẳng, khi đó toạ độ của M là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} x - y + z = 4 \\ 3x - y + z = 1. \end{cases}$$

Đây là hệ ba ẩn có hai phương trình. Ta tìm hai nghiệm nào đó của hệ.

Cho $z = 0$, ta có $\begin{cases} x - y = 4 \\ 3x - y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{3}{2} \\ y = -\dfrac{11}{2}. \end{cases}$

Vậy $M_1\left(-\frac{3}{2};\ -\frac{11}{2};0\right) \in \Delta$.

Cho $y = 0$, ta có $\begin{cases} x + z = 4 \\ 3x + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{3}{2} \\ z = \dfrac{11}{2}. \end{cases}$

Vậy $M_2\left(-\frac{3}{2};0;\frac{11}{2}\right) \in \Delta$.

Mặt phẳng phải tìm chính là mặt phẳng đi qua M_o, M_1, M_2.

Viết phương trình mặt phẳng qua ba điểm trên, ta có kết quả :

$$15x - 7y + 7z - 16 = 0.$$

b) *Cách 1 :* Ta thấy hệ phương trình

$$\begin{cases} y + 2z - 4 = 0 \\ x + y - z + 3 = 0 \\ x + y + z - 2 = 0 \end{cases}$$

có một nghiệm duy nhất $\left(\frac{1}{2};\ -1;\ \frac{5}{2}\right)$.

Điều này có nghĩa là giao tuyến của hai mặt phẳng

$$y + 2z - 4 = 0 \quad \text{và} \quad x + y - z + 3 = 0$$

cắt mặt phẳng $x + y + z - 2 = 0$.

Vậy không tồn tại mặt phẳng thoả mãn yêu cầu bài toán.

Cách 2 : Ta tìm hai điểm thuộc giao tuyến của hai mặt phẳng.

Cho $z = 0$, ta được $M_1 = (-7 ; 4 ; 0)$. Cho $y = 0$, ta được $M_2 = (-1 ; 0 ; 2)$.

Gọi (α) là mặt phẳng song song với mặt phẳng $x + y + z - 2 = 0$ thì (α) có dạng :

$$x + y + z + D = 0,\ D \neq -2.$$

Ta xác định D để $M_1, M_2 \in (\alpha)$. D là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} -7 + 4 + D = 0 \\ -1 + 2 + D = 0. \end{cases}$$

Hệ vô nghiệm. Vậy không tồn tại mặt phẳng thoả mãn yêu cầu bài toán.

c) Ta tìm hai điểm M_1, M_2 thuộc giao tuyến của hai mặt phẳng.

Gọi $\vec{n'} = (2 ; 0 ; -1)$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $2x - z + 7 = 0$.

Khi đó mặt phẳng cần tìm là mặt phẳng đi qua M_1 và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = \left[\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{n'}\right]$.

Sau các tính toán, ta có kết quả : Mặt phẳng cần tìm có phương trình :

$$x - 22y + 2z + 21 = 0.$$

44. Để ba mặt phẳng đã cho cùng đi qua một đường thẳng, điều kiện cần và đủ là mặt phẳng $5x + ky + 4z + m = 0$ phải chứa hai điểm phân biệt của đường thẳng Δ với Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng còn lại.

Ta tìm hai điểm nào đó của Δ.

Cho $y = 0$, ta có $\begin{cases} 3x + z = 3 \\ x - 2z = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{7} \\ z = \dfrac{18}{7} \end{cases} \Rightarrow M_1\left(\dfrac{1}{7}; 0; \dfrac{18}{7}\right) \in \Delta.$

Cho $z = 0$, ta có $\begin{cases} 3x - 7y = 3 \\ x - 9y = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{31}{10} \\ y = \dfrac{9}{10} \end{cases} \Rightarrow M_2\left(\dfrac{31}{10}; \dfrac{9}{10}; 0\right) \in \Delta.$

Thay toạ độ điểm M_1, M_2 vào phương trình mặt phẳng $5x + ky + 4z + m = 0$, ta được hệ

$$\begin{cases} \dfrac{5}{7} + \dfrac{72}{7} + m = 0 \\ \dfrac{155}{10} + \dfrac{9k}{10} + m = 0 \end{cases} \Rightarrow k = -5, m = -11.$$

45. Vectơ pháp tuyến của ba mặt phẳng (P), (Q), (R) lần lượt là :

$$\overrightarrow{n_P} = (1 ; 1 ; 1), \overrightarrow{n_Q} = (m ; -2 ; 1), \overrightarrow{n_R} = (m ; m - 1 ; -1).$$

Ba mặt phẳng đôi một vuông góc khi và chỉ khi :

$$\begin{cases} m - 2 + 1 = 0 \\ m + m - 1 - 1 = 0 \\ m^2 - 2m + 2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 1 \\ (m - 1)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1.$$

Gọi $I(x ; y ; z)$ là giao điểm chung của cả ba mặt phẳng. Toạ độ điểm I là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x + y + z - 6 = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x - z + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow I = (1 ; 2 ; 3).$$

46. a) Dễ thấy điểm $M_o(4 ; 3 ; 0)$ thuộc mặt cầu và điểm $I(3 ; 1 ; -2)$ là tâm mặt cầu. Do đó, mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu tại điểm M_o là mặt phẳng đi qua M_o với vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{IM_o}$, nó có phương trình :

$$1.(x-4)+2(y-3)+2(z-0)=0 \text{ hay } x+2y+2z-10=0.$$

b) Bán kính R của mặt cầu phải tìm bằng khoảng cách từ tâm $I(-2 ; 1 ; 1)$ tới mặt phẳng (α) nên $R=\dfrac{|-2+2-2+5|}{\sqrt{1+4+4}}=1.$

Vậy phương trình mặt cầu là $(x+2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1.$

c) Ta có $\overrightarrow{BC}=(-3 ; 0 ; 1)$, $\overrightarrow{BD}=(-4 ; -1 ; 2) \Rightarrow \left[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}\right]=(1 ; 2 ; 3).$

Vậy phương trình mặt phẳng (BCD) là :

$$1.(x-3)+2(y-2)+3(z-0)=0 \text{ hay } x+2y+3z-7=0.$$

Gọi R là bán kính mặt cầu phải tìm, ta có

$$R=d(A,(BCD))=\frac{|3+2(-2)+3(-2)-7|}{\sqrt{1+4+9}}=\sqrt{14}.$$

Vậy phương trình mặt cầu là :

$$(x-3)^2+(y+2)^2+(z+2)^2=14.$$

d) Phương trình mặt cầu (S) phải tìm có dạng

$$x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0.$$

Ta có $A \in (S) \Rightarrow 1-2a+d=0,$

$B \in (S) \Rightarrow 1-2b+d=0,$

$C \in (S) \Rightarrow 1-2c+d=0.$

Đồng thời tâm $I(a ; b ; c)$ của mặt cầu thuộc mặt phẳng $x+y+z-3=0$ nên $a+b+c-3=0.$

Giải hệ $\begin{cases}1-2a+d=0\\1-2b+d=0\\1-2c+d=0\\a+b+c-3=0\end{cases} \Rightarrow a=b=c=d=1.$

Vậy phương trình mặt cầu là

$$x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z+1=0.$$

47. a) Mặt phẳng (P) chứa Oz nên có dạng $Ax + By = 0 \Rightarrow \overrightarrow{n_P} = (A\ ;\ B\ ;\ 0)$.

Ta có $\overrightarrow{n_\alpha} = (2\ ;\ 1\ ;\ -\sqrt{5})$. Theo giả thiết của bài toán :

$$\left|\cos\left(\overrightarrow{n_P},\overrightarrow{n_\alpha}\right)\right| = \frac{|2A+B|}{\sqrt{A^2+B^2}.\sqrt{4+1+5}} = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2|2A+B| = \sqrt{10}.\sqrt{A^2+B^2}$$

$$\Leftrightarrow 6A^2 + 16AB - 6B^2 = 0.$$

Lấy $B = 1$ ta có

$$6A^2 + 16A - 6 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} A_1 = \dfrac{1}{3} \\ A_2 = -3. \end{array}\right.$$

Vậy có hai mặt phẳng (P) :

$$\frac{1}{3}x + y = 0\ ; \qquad -3x + y = 0.$$

b) Mặt phẳng (Q) đi qua A, C và tạo với mp(Oxy) góc 60° nên (Q) cắt Oy tại điểm $B(0\ ;\ b\ ;\ 0)$ khác gốc $O \Rightarrow b \neq 0$.

Khi đó phương trình của mặt phẳng (Q) là :

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{b} + \frac{z}{1} = 1 \text{ hay } bx + 3y + 3bz - 3b = 0$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{n_Q} = (b\ ;\ 3\ ;\ 3b).$$

Mặt phẳng (Oxy) có vectơ pháp tuyến là $\vec{k}\,(0\ ;\ 0\ ;\ 1)$. Theo giả thiết, ta có

$$\left|\cos\left(\overrightarrow{n_Q},\vec{k}\right)\right| = \cos 60^\circ \Leftrightarrow \frac{|3b|}{\sqrt{b^2+9+9b^2}} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow |6b| = \sqrt{10b^2+9} \Leftrightarrow b^2 = \frac{9}{26} \Leftrightarrow b = \pm\frac{3}{\sqrt{26}}.$$

Vậy có hai mặt phẳng (Q) :

$$x - \sqrt{26}y + 3z - 3 = 0,$$

$$x + \sqrt{26}y + 3z - 3 = 0.$$

48. a) $M \in Oy \Leftrightarrow M = (0\ ;\ y_o\ ;\ 0)$. Vậy :

$$d(M\ ;\ (\alpha)) = \frac{|y_o+1|}{\sqrt{3}},\ d(M, (\alpha')) = \frac{|-y_o-5|}{\sqrt{3}}.$$

Ta có $d(M, (\alpha)) = d(M, (\alpha')) \Leftrightarrow |y_o + 1| = |y_o + 5| \Leftrightarrow y_o = -3$.

Vậy điểm phải tìm là $M(0 ; -3 ; 0)$.

b) Phương trình mặt phẳng (ABC) là : $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$

$$\Rightarrow d(O ; (ABC)) = \frac{|-1|}{\sqrt{\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}}}.$$

Theo bất đẳng thức Cô-si, ta có $\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2} \geq 3\sqrt[3]{\dfrac{1}{a^2b^2c^2}}$

và $3 = a^2 + b^2 + c^2 \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$,

Suy ra : $\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2} \geq 3 \Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}} \geq \sqrt{3}$.

Từ đó suy ra : $d(O ; (ABC)) \leq \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Dấu = xảy ra khi $a^2 = b^2 = c^2 = 1$ hay $a = b = c = 1$.

Vậy $d(O ; (ABC))$ lớn nhất bằng $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ khi $a = b = c = 1$.

49. (h.99) a) Từ giả thiết ta có $C = (a ; a ; 0)$,

$C' = (a ; a ; b) \Rightarrow M = \left(a; a; \dfrac{b}{2}\right)$.

Ta có $\overrightarrow{BD} = (-a ; a ; 0)$;

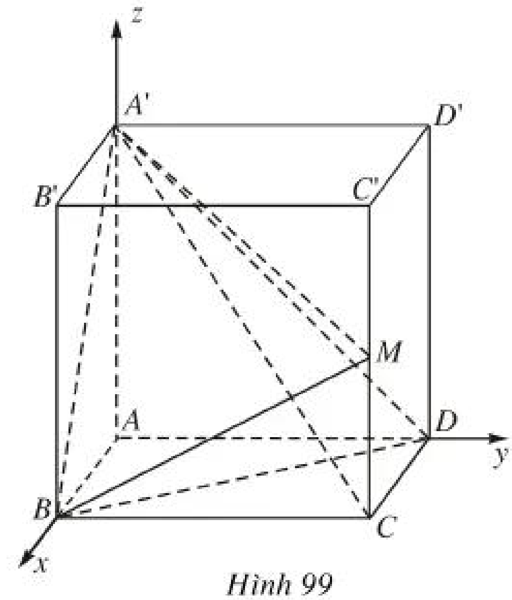
$\overrightarrow{BM} = \left(0; a; \dfrac{b}{2}\right)$; $\overrightarrow{BA'} = (-a ; 0 ; b)$

$\Rightarrow \left[\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BM}\right] = \left(\dfrac{ab}{2}; \dfrac{ab}{2}; -a^2\right)$.

Vậy $V_{BDA'M} = \dfrac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BM}\right].\overrightarrow{BA'}\right| = \dfrac{a^2b}{4}$.

b) Mặt phẳng $(A'BD)$ có vectơ pháp tuyến

$\overrightarrow{n_1} = \left[\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{BA'}\right] = (ab ; ab ; a^2)$.



Hình 99

Mặt phẳng (MBD) có vectơ pháp tuyến

$$\overrightarrow{n_2} = \left[\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BM}\right] = \left(\frac{ab}{2}; \frac{ab}{2}; -a^2\right).$$

Vì vậy $(MBD) \perp (A'BD) \Leftrightarrow \overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2} = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2b^2}{2} + \frac{a^2b^2}{2} - a^4 = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2b^2 = a^4 \Leftrightarrow a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = b \Leftrightarrow \frac{a}{b} = 1.$$

(do $a > 0$, $b > 0$)

50. a) Giả sử $A \neq 0$, khi đó mặt phẳng thứ nhất cắt trục Ox tại điểm M_o, $M_o = \left(-\frac{D}{A}; 0; 0\right)$. Khoảng cách từ M_o tới mặt phẳng thứ hai chính là khoảng cách d giữa hai mặt phẳng.

Vậy $d = \dfrac{\left|-A.\dfrac{D}{A} + E\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \dfrac{|E - D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$

b) Mặt phẳng (α) song song với hai mặt phẳng đã cho có phương trình

$$Ax + By + Cz + F = 0 \ (F \neq D, F \neq E).$$

Để (α) cách đều cả hai mặt phẳng đã cho thì :

$$\frac{|F - D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|F - E|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

$$\Leftrightarrow |F - D| = |F - E| \Leftrightarrow F - D = \pm(F - E).$$

Vì $D \neq E$, nên ta phải có $F - D = -F + E \Rightarrow F = \dfrac{D + E}{2}$. Vậy phương trình mặt phẳng (α) là :

$$Ax + By + Cz + \frac{D + E}{2} = 0.$$

51. Một mặt phẳng muốn cách đều hai điểm M, N thì hoặc nó đi qua trung điểm của MN hoặc nó song song với MN. Vì vậy, để mặt phẳng (α) cách đều bốn đỉnh A, B, C, D của hình tứ diện thì :

– Hoặc mặt phẳng (α) đi qua trung điểm của ba cạnh cùng xuất phát từ một đỉnh của tứ diện. Có bốn mặt phẳng như vậy.

– Hoặc mp(α) chứa hai đường trung bình của tứ diện. Có ba mặt phẳng như vậy.

Tóm lại, ta có bảy mặt phẳng thoả mãn yêu cầu của đề bài là

$x - z - 6 = 0$; $x + y - 10 = 0$; $x + 2y - z - 8 = 0$; $2x + y - z - 14 = 0$;

$x - y - z - 2 = 0$; $2x + y + z - 16 = 0$; $5x + y - 2z - 28 = 0$.

52. a) Đường thẳng M_1M_2 cắt (α) khi và chỉ khi $\overrightarrow{M_1M_2}$ không vuông góc với $\vec{n}(A ; B ; C)$ ($\vec{n}$ là vectơ pháp tuyến của (α)), tức là :

$$\overrightarrow{M_1M_2}.\vec{n} \neq 0 \Leftrightarrow A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) + C(z_2 - z_1) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D \neq Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D.$$

b) Đoạn thẳng M_1M_2 cắt (α) khi và chỉ khi có một điểm I thuộc (α) và chia đoạn thẳng M_1M_2 theo một tỉ số $k < 0$. Gọi $(x_o ; y_o ; z_o)$ là toạ độ của điểm I, ta có :

$$x_o = \frac{x_1 - kx_2}{1 - k}, \; y_o = \frac{y_1 - ky_2}{1 - k}, \; z_o = \frac{z_1 - kz_2}{1 - k}$$

và $Ax_o + By_o + Cz_o + D = 0$

$$\Rightarrow A\left(\frac{x_1 - kx_2}{1 - k}\right) + B\left(\frac{y_1 - ky_2}{1 - k}\right) + C\left(\frac{z_1 - kz_2}{1 - k}\right) + D = 0$$

$$\Leftrightarrow (Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D) = k(Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D). \qquad (*)$$

Vì $k < 0$ nên điều kiện trên tương đương với điều kiện

$$(Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D)(Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D) < 0.$$

c) M_1 nằm giữa I và $M_2 \Leftrightarrow I$ chia đoạn M_1M_2 theo tỉ số k mà $0 < k < 1$. Ta vẫn có điều kiện (*), nhưng vì $0 < k < 1$ nên điều kiện đó tương đương với điều kiện :

$$0 < \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D} < 1.$$

d) Tương tự như trên, ta có điều kiện :

$$0 < \frac{Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D}{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D} < 1.$$

Chú ý : Từ kết quả trên ta suy ra kết luận sau :

Hai điểm $M_1(x_1 ; y_1 ; z_1)$ và $M_2(x_2 ; y_2 ; z_2)$ nằm cùng một phía đối với mặt phẳng $(\alpha) : Ax + By + Cz + D = 0$ khi và chỉ khi

$$(Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D)(Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D) > 0.$$

53. (h.100) Ta chọn hệ trục toạ độ $Oxyz$ sao cho gốc toạ độ là tâm O của đáy, tia Ox chứa OA, tia Oy chứa OB, tia Oz chứa OS.

Khi đó : $A = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0; 0\right)$,

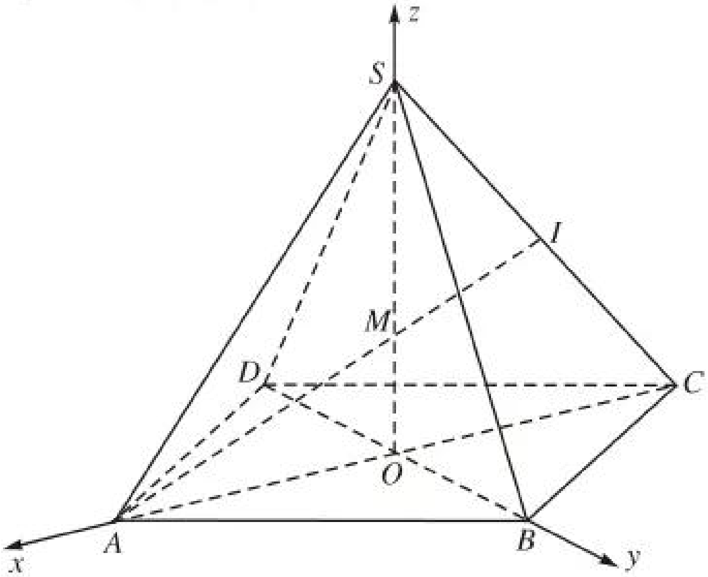
$B = \left(0; \frac{a\sqrt{2}}{2}; 0\right)$,

$C = \left(-\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0; 0\right)$,

$S = (0 ; 0 ; h)$.

Rõ ràng giao điểm M của SO và AI chính là trọng tâm tam giác SAC nên

$M = \left(0; 0; \frac{h}{3}\right)$.



Hình 100

Mặt phẳng (ABI) cũng chính là mặt phẳng (ABM). Vậy mp(ABI) có phương trình là :

$$\frac{x}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} + \frac{y}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} + \frac{z}{\frac{h}{3}} = 1.$$

Do đó, khoảng cách từ S tới mặt phẳng (ABI) là :

$$d = \frac{\left|\frac{h}{\frac{h}{3}} - 1\right|}{\sqrt{\left(\frac{1}{\frac{a\sqrt{2}}{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\frac{a\sqrt{2}}{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\frac{h}{3}}\right)^2}} = \frac{2}{\sqrt{\frac{2}{a^2} + \frac{2}{a^2} + \frac{9}{h^2}}} \Rightarrow d = \frac{2ah}{\sqrt{4h^2 + 9a^2}}.$$

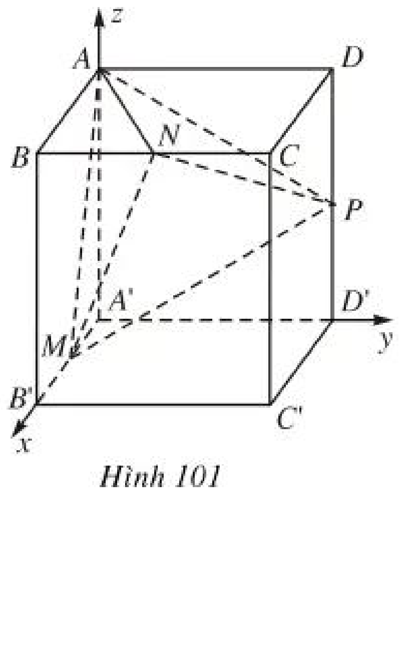
54. (h.101) a) Ta chọn hệ trục $Oxyz$ sao cho gốc O là đỉnh A' của hình lập phương, tia Ox chứa $A'B'$, tia Oy chứa $A'D'$ và tia Oz chứa $A'A$. Khi đó

$A' = (0 ; 0 ; 0)$, $B' = (1 ; 0 ; 0)$,

$D' = (0 ; 1 ; 0)$, $A = (0 ; 0 ; 1)$

$C = (1 ; 1 ; 1)$, $B = (1 ; 0 ; 1)$,

$D = (0 ; 1 ; 1)$, $C' = (1 ; 1 ; 0)$.



Hình 101

Từ đó :

$$\overrightarrow{AC'} = (1\ ;\ 1\ ;\ -1),\ \overrightarrow{A'B} = (1\ ;\ 0\ ;\ 1)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{A'B} = 0 \Rightarrow AC' \perp A'B.$$

b) Ta có $M = \left(\frac{1}{2};\ 0;\ 0\right)$, $N = \left(1;\ \frac{1}{2};\ 1\right)$, $P = \left(0;\ 1;\ \frac{1}{2}\right)$.

$$\overrightarrow{MN} = \left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{2};\ 1\right) \Rightarrow \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AC'} = 0 \Rightarrow MN \perp AC'.$$

$$\overrightarrow{MP} = \left(-\frac{1}{2};\ 1;\ \frac{1}{2}\right) \Rightarrow \overrightarrow{MP}.\overrightarrow{AC'} = 0 \Rightarrow MP \perp AC'.$$

Vậy $AC' \perp \text{mp}(MNP)$.

c) Ta có : $\overrightarrow{MA} = \left(-\frac{1}{2};0;1\right)$,

$$\left[\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MP}\right] = \left(\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & 1\\ 1 & \frac{1}{2}\end{vmatrix};\ \begin{vmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{vmatrix};\ \begin{vmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & 1\end{vmatrix}\right) = \left(-\frac{3}{4};-\frac{3}{4}\ ;\ \frac{3}{4}\right)$$

$$\Rightarrow V_{AMNP} = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MP}\right].\overrightarrow{MA}\right| = \frac{1}{6}\left|\frac{9}{8}\right| = \frac{3}{16}.$$