§2. Phương trình mặt phẳng

I – CÁC KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. *Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng*

* Vectơ $\vec{n} \neq \vec{0}$ được gọi là vectơ pháp tuyến của mp(α) nếu giá của $\vec{n}$ vuông góc với (α), viết tắt là $\vec{n} \perp (\alpha)$.

* Nếu hai vectơ $\vec{u}(x_1 ; y_1 ; z_1)$, $\vec{v}(x_2 ; y_2 ; z_2)$ không cùng phương và giá của chúng song song với một mp(α) (hoặc nằm trên (α)) thì vectơ

$$\vec{n} = [\vec{u}, \vec{v}] = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right)$$

là một vectơ pháp tuyến của mp(α).

2. Mặt phẳng đi qua điểm $M_o(x_o ; y_o ; z_o)$ với vectơ pháp tuyến $\vec{n}(A ; B ; C)$ có phương trình tổng quát là

$$A(x - x_o) + B(y - y_o) + C(z - z_o) = 0.$$

3. Mỗi mặt phẳng đều có phương trình tổng quát dạng

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (1)$$

với $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

Ngược lại, mỗi phương trình có dạng trên đều là phương trình của một mặt phẳng.

Nếu mp(α) có phương trình (1) thì vectơ $\vec{n}(A ; B ; C)$ là vectơ pháp tuyến của mp(α).

4. *Các trường hợp đặc biệt*

Xét mặt phẳng (α) có phương trình $Ax + By + Cz + D = 0$. Khi đó

- $D = 0 \Leftrightarrow (\alpha)$ đi qua gốc toạ độ.
- $C = 0, D \neq 0 \Leftrightarrow (\alpha)$ song song với trục Oz.
  $C = D = 0 \Leftrightarrow (\alpha)$ chứa trục Oz.
- $B = C = 0, D \neq 0 \Leftrightarrow (\alpha)$ song song với mp(Oyz).
  $B = C = D = 0 \Leftrightarrow (\alpha)$ chính là mp(Oyz).

(Các trường hợp khác suy ra tương tự).

5. *Vị trí tương đối giữa hai mặt phẳng*

Cho hai mặt phẳng $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$ và $(\alpha'): A'x + B'y + C'z + D' = 0$.

$$(\alpha) \equiv (\alpha') \Leftrightarrow \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \frac{D}{D'}$$

$$(\alpha) \,//\, (\alpha') \Leftrightarrow \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \neq \frac{D}{D'}$$

$$(\alpha) \text{ cắt } (\alpha') \Leftrightarrow A : B : C \neq A' : B' : C'$$

(Đặc biệt, $(\alpha) \perp (\alpha') \Leftrightarrow AA' + BB' + CC' = 0$).

6. *Phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn*

Mặt phẳng (α) không đi qua gốc O, cắt trục Ox tại điểm $(a\,;0\,;0)$, cắt trục Oy tại điểm $(0\,;b\,;0)$, cắt trục Oz tại điểm $(0\,;0\,;c)$ có phương trình :

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,\ abc \neq 0.$$

Phương trình này gọi là phương trình theo đoạn chắn của mặt phẳng (α).

7. *Góc giữa hai mặt phẳng*

Cho hai mặt phẳng $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$

và $(\alpha'): A'x + B'y + C'z + D' = 0$.

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (α) và (α'), ta có :

$$\cos\varphi = \frac{|AA' + BB' + CC'|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}.$$

8. *Khoảng cách từ một điểm tới một mặt phẳng*

Cho mp$(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$ và điểm $M_o(x_o\,;y_o\,;z_o)$, khi đó

$$d(M_o, (\alpha)) = \frac{|Ax_o + By_o + Cz_o + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

II – ĐỀ BÀI

35. Cho điểm $M_o(x_o;y_o;z_o)$ với $x_oy_oz_o \neq 0$. Trong mỗi trường hợp sau, viết phương trình mặt phẳng :

a) Đi qua điểm M_o và song song với một trong các mặt phẳng toạ độ : (Oxy), (Oyz), (Oxz).

b) Đi qua các hình chiếu của điểm M_o trên các trục toạ độ Ox, Oy, Oz.

c) Đi qua điểm M_o và lần lượt chứa các trục toạ độ Ox, Oy, Oz.

36. Trong mỗi trường hợp sau, viết phương trình mặt phẳng :

a) Đi qua ba điểm $A(-1 ; 2 ; 3)$, $B(2 ; -4 ; 3)$, $C(4 ; 5 ; 6)$.

b) Đi qua điểm $M_o(1 ; 3 ; -2)$ và vuông góc với trục Oy.

c) Đi qua điểm $M_o(1 ; 3 ; -2)$ và vuông góc với đường thẳng BC với $B = (0 ; 2 ; -3)$, $C = (1 ; -4 ; 1)$.

d) Đi qua điểm $M_o(1 ; 3 ; -2)$ và song song với mặt phẳng

$$2x - y + 3z + 4 = 0.$$

e) Đi qua hai điểm $A(3 ; 1 ; -1)$, $B(2 ; -1 ; 4)$ và vuông góc với mặt phẳng

$$2x - y + 3z + 4 = 0.$$

g) Đi qua điểm $M_o(2 ; -1 ; 2)$, song song với trục Oy và vuông góc với mặt phẳng $2x - y + 3z + 4 = 0$.

h) Đi qua điểm $M_o(-2 ; 3 ; 1)$ và vuông góc với hai mặt phẳng

$$(\alpha) : 2x + y + 2z + 5 = 0 \text{ và } (\alpha') : 3x + 2y + z - 3 = 0.$$

37. a) Bốn điểm $A(-1 ; 2 ; 3)$, $B(2 ; -4 ; 3)$, $C(4 ; 5 ; 6)$, $D(3 ; 2 ; 1)$ có thuộc cùng một mặt phẳng không ?

b) Tìm a để bốn điểm $A(1 ; 2 ; 1)$, $B(2 ; a ; 0)$, $C(4 ; -2 ; 5)$, $D(6 ; 6 ; 6)$ thuộc cùng một mặt phẳng.

c) Cho ba điểm $A(1 ; 1 ; 1)$, $B(3 ; -1 ; 1)$, $C(-1 ; 0 ; 2)$. Điểm C có thuộc mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB không ?

38. Cho hai điểm $A(0 ; 0 ; -3)$, $B(2 ; 0 ; -1)$ và mặt phẳng

$$(P) : 3x - 8y + 7z - 1 = 0.$$

a) Tìm toạ độ giao điểm I của đường thẳng AB với mặt phẳng (P).

b) Tìm toạ độ điểm C nằm trên mp(P) sao cho ABC là tam giác đều.

39. Viết phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M_o(1 ; 2 ; 4)$, cắt các trục toạ độ Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C sao cho $OA = OB = OC \neq 0$.

40. Viết phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M_o(1 ; 1 ; 1)$, cắt các tia Ox, Oy, Oz tại A, B, C sao cho thể tích của tứ diện $OABC$ có giá trị nhỏ nhất.

41. Xét vị trí tương đối của mỗi cặp mặt phẳng cho bởi các phương trình sau :

a) $x - y + 2z - 4 = 0$ và $10x - 10y + 20z - 40 = 0$;

b) $3x - 2y - 3z + 5 = 0$ và $9x - 6y - 9z - 5 = 0$;

c) $x + y + z - 1 = 0$ và $2x + 2y - 2z + 3 = 0$;

d) $x - 2y + z + 3 = 0$ và $2x - y + 4z - 2 = 0$;

e) $x + 2y - z + 5 = 0$ và $2x + 3y - 7z - 4 = 0$.

42. a) Tìm α để hai mặt phẳng

$$x - \frac{1}{4}y - z + 5 = 0 \text{ và } x\sin\alpha + y\cos\alpha + z\sin^3\alpha + 2 = 0$$

vuông góc với nhau.

b) Tìm α để vectơ $\vec{u}(\sin\alpha ; 0 ; \sin\alpha \cos 2\alpha)$ có giá song song hoặc nằm trên mặt phẳng $(P) : x + y + 2z + 6 = 0$.

c) Cho hai mặt phẳng có phương trình :

$$2x - my + 3z - 6 + m = 0 \text{ và } (m + 3)x - 2y + (5m + 1)z - 10 = 0.$$

Với giá trị nào của m thì hai mặt phẳng đó :

– Song song với nhau ;

– Trùng nhau ;

– Cắt nhau ;

– Vuông góc với nhau ?

43. Viết phương trình mặt phẳng trong mỗi trường hợp sau :

a) Đi qua điểm $M_o(2 ; 1 ; -1)$ và qua giao tuyến của hai mặt phẳng

$$x - y + z - 4 = 0 \text{ và } 3x - y + z - 1 = 0.$$

b) Qua giao tuyến của hai mặt phẳng $y + 2z - 4 = 0$ và $x + y - z + 3 = 0$, đồng thời song song với mặt phẳng $x + y + z - 2 = 0$.

c) Qua giao tuyến của hai mặt phẳng $3x - y + z - 2 = 0$ và $x + 4y - 5 = 0$, đồng thời vuông góc với mặt phẳng $2x - z + 7 = 0$.

44. Xác định các giá trị k và m để ba mặt phẳng sau đây cùng đi qua một đường thẳng :

$$5x + ky + 4z + m = 0$$

$$3x - 7y + z - 3 = 0$$
$$x - 9y - 2z + 5 = 0.$$

45. Cho ba mặt phẳng $(P) : x + y + z - 6 = 0$

$$(Q) : mx - 2y + z + m - 1 = 0$$
$$(R) : mx + (m - 1)y - z + 2m = 0.$$

Xác định giá trị m để ba mặt phẳng đó đôi một vuông góc với nhau, tìm giao điểm chung của cả ba mặt phẳng.

46. a) Cho mặt cầu có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 2y + 4z + 5 = 0$ và điểm $M_o(4 ; 3 ; 0)$. Viết phương trình mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu tại điểm M_o.

b) Viết phương trình mặt cầu có tâm $I(-2 ; 1 ; 1)$ và tiếp xúc với mặt phẳng (α) có phương trình $x + 2y - 2z + 5 = 0$.

c) Cho bốn điểm $A(3 ; -2 ; -2)$, $B(3 ; 2 ; 0)$, $C(0 ; 2 ; 1)$ và $D(-1 ; 1 ; 2)$. Viết phương trình mặt cầu tâm A, tiếp xúc với mặt phẳng (BCD).

d) Viết phương trình mặt cầu đi qua ba điểm $A(1 ; 0 ; 0)$, $B(0 ; 1 ; 0)$, $C(0 ; 0 ; 1)$ và có tâm I nằm trên mặt phẳng $x + y + z - 3 = 0$.

47. a) Viết phương trình mp(P) chứa trục Oz và tạo với mp(α) có phương trình $2x + y - \sqrt{5}z = 0$ một góc 60^o.

b) Viết phương trình mp(Q) đi qua $A(3 ; 0 ; 0)$, $C(0 ; 0 ; 1)$ và tạo với mp(Oxy) góc 60^o.

48. a) Tìm trên Oy điểm cách đều hai mặt phẳng

$$(\alpha) : x + y - z + 1 = 0 \quad \text{và} \quad (\alpha') : x - y + z - 5 = 0.$$

b) Cho ba điểm $A(a ; 0 ; 0)$, $B(0 ; b ; 0)$, $C(0 ; 0 ; c)$ với a, b, c là những số dương thay đổi sao cho $a^2 + b^2 + c^2 = 3$.

Xác định a, b, c để khoảng cách từ O tới mp(ABC) lớn nhất.

49. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(0 ; 0 ; 0)$, $B(a ; 0 ; 0)$, $D(0 ; a ; 0)$, $A'(0, 0, b)$ với a, b là những số dương và M là trung điểm của CC'.

a) Tính thể tích tứ diện $BDA'M$.

b) Tìm tỉ số $\frac{a}{b}$ để mp$(A'BD)$ vuông góc với mp(MBD).

50. Cho hai mặt phẳng song song có phương trình

$$Ax + By + Cz + D = 0 \text{ và } Ax + By + Cz + E = 0.$$

a) Tìm khoảng cách giữa hai mặt phẳng đó.

b) Viết phương trình mặt phẳng song song và cách đều hai mặt phẳng đó.

51. Cho tứ diện $ABCD$ với $A(3 ; 5 ; -1)$, $B(7 ; 5 ; 3)$, $C(9 ; -1 ; 5)$, $D(5 ; 3 ; -3)$. Viết phương trình mặt phẳng cách đều bốn đỉnh của tứ diện đó.

52. Trong không gian $Oxyz$ cho hai điểm $M_1(x_1 ; y_1 ; z_1)$, $M_2(x_2 ; y_2 ; z_2)$ không nằm trên mặt phẳng $(\alpha) : Ax + By + Cz + D = 0$.

Tìm điều kiện cần và đủ để

a) Đường thẳng M_1M_2 cắt (α) ;

b) Đoạn thẳng M_1M_2 cắt (α) ;

c) Đường thẳng M_1M_2 cắt (α) tại I sao cho M_1 nằm giữa I và M_2 ;

d) Đường thẳng M_1M_2 cắt (α) tại I sao cho M_2 nằm giữa I và M_1.

53. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng h. Gọi I là trung điểm của cạnh bên SC. Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng (ABI).

54. Cho khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh bằng 1.

a) Tính góc tạo bởi các đường thẳng AC' và $A'B$.

b) Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh $A'B'$, BC, DD'. Chứng minh AC' vuông góc với mặt phẳng (MNP).

c) Tính thể tích tứ diện $AMNP$.