§3. Phép vị tự và sự đồng dạng của các khối đa diện. Các khối đa diện đều

Các đẳng thức còn lại được chứng minh tương tự.

Xét trường hợp $k = 1$. Khi đó $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B'C'}$,... nên

$$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} = ...$$

Suy ra phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = \overrightarrow{AA'}$ biến tứ diện $ABCD$ thành tứ diện $A'B'C'D'$.

Nếu $k \neq 1$ thì hai đường thẳng AA' và BB' cắt nhau tại một điểm O nào đó. Khi đó, rõ ràng phép vị tự V tâm O tỉ số $\dfrac{1}{k}$ biến tứ diện $ABCD$ thành tứ diện $A'B'C'D'$.

Vậy trong cả hai trường hợp nói trên, hai tứ diện $ABCD$ và $A'B'C'D'$ đồng dạng.

20. Gọi V là một phép vị tự tâm O tỉ số k (O là điểm bất kì), $A_1B_1C_1D_1$ là ảnh của tứ diện $ABCD$ qua V. Khi đó $A_1B_1 = k\,AB$, $B_1C_1 = kBC$, $C_1D_1 = k\,CD$, $D_1A_1 = k\,DA$, $C_1A_1 = k\,CA$, $B_1D_1 = k\,BD$.

Vậy $A_1B_1 = A'B'$, $B_1C_1 = B'C'$, $C_1D_1 = C'D'$, $D_1A_1 = D'A'$, $C_1A_1 = C'A'$, $B_1D_1 = B'D'$.

Do đó tứ diện $A'B'C'D'$ bằng tứ diện $A_1B_1C_1D_1$, suy ra hai tứ diện $ABCD$ và $A'B'C'D'$ đồng dạng.

21. Khẳng định đó không đúng. Theo bài 4, ta có thể ghép 9 khối tứ diện đều bằng nhau theo nhiều cách khác nhau để có được một khối đa diện có 20 mặt là tam giác đều.

16. Với mỗi điểm M, ta lấy M_1 sao cho $\overrightarrow{OM_1} = k\overrightarrow{OM}$ rồi lấy điểm M' sao cho $\overrightarrow{O'M'} = k'\overrightarrow{O'M_1}$ thì hợp thành của V và V' biến điểm M thành điểm M'.
Ta có :

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M'} = \overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{O'M'} - \overrightarrow{O'M_1}$$

$$= \overrightarrow{OM_1} - \frac{1}{k}\overrightarrow{OM_1} + k'\overrightarrow{O'M_1} - \overrightarrow{O'M_1} = \left(1 - \frac{1}{k}\right)\overrightarrow{OM_1} + (k'-1)\overrightarrow{O'M_1}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{k}\right)\overrightarrow{OM_1} + (1-k')\overrightarrow{M_1O'}.$$

Chú ý rằng vì $kk' = 1$ nên $k' = \frac{1}{k}$, bởi vậy đẳng thức trên trở thành :

$$\overrightarrow{MM'} = \left(1 - \frac{1}{k}\right)\left(\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1O'}\right) = \frac{k-1}{k}\overrightarrow{OO'}.$$

Từ đó suy ra hợp thành của V và V' là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = \frac{k-1}{k}\overrightarrow{OO'}$.

17. Gọi $(O\ ;\ R)$ và $(O'\ ;\ R')$ là hai đường tròn nằm trên hai mặt phẳng song song, với $R \neq R'$. Đặt $k = \frac{R'}{R}$ thì $k \neq 1$. Khi đó, tồn tại hai điểm I và I' sao cho $\overrightarrow{IO'} = k\overrightarrow{IO}$ và $\overrightarrow{I'O'} = -k\overrightarrow{I'O}$. Dễ thấy rằng phép vị tự tâm I, tỉ số k và phép vị tự tâm I', tỉ số $-k$ đều biến đường tròn $(O\ ;\ R)$ thành đường tròn $(O'\ ;\ R')$.

18. Đó là phép vị tự có tâm là trung điểm của đoạn thẳng nối tâm hai đường tròn và có tỉ số vị tự $k = -1$, đó cũng là phép đối xứng tâm.

19. Vì $AB\ //\ A'B'$ nên có số $k \neq 0$ sao cho $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{A'B'}$. Ta chứng minh rằng khi đó, ta cũng có $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{A'C'}$, $\overrightarrow{AD} = k\overrightarrow{A'D'}$, $\overrightarrow{CB} = k\overrightarrow{C'B'}$, $\overrightarrow{BD} = k\overrightarrow{B'D'}$, $\overrightarrow{DC} = k\overrightarrow{D'C'}$.
Thật vậy, hai tam giác ABC và $A'B'C'$ có các cạnh tương ứng song song nên ta phải có các số l và m sao cho $\overrightarrow{AC} = l\overrightarrow{A'C'}$ và $\overrightarrow{CB} = m\overrightarrow{C'B'}$. Khi đó :

$$\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{A'B'} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} = k\left(\overrightarrow{A'C'} - \overrightarrow{B'C'}\right)$$

$$\Leftrightarrow l\overrightarrow{A'C'} - m\overrightarrow{B'C'} = k\overrightarrow{A'C'} - k\overrightarrow{B'C'}$$

$$\Leftrightarrow (l-k)\overrightarrow{A'C'} = (m-k)\overrightarrow{B'C'}.$$

Vì hai vectơ $\overrightarrow{A'C'}$ và $\overrightarrow{B'C'}$ không cùng phương nên đẳng thức trên xảy ra khi và chỉ khi $l - k = m - k = 0$, tức là $l = m = k$, vậy $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{A'C'}$ và $\overrightarrow{BC} = k\overrightarrow{B'C'}$.