§3. Phương trình đường thẳng

55. a) $d:\begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 5 - 3t \\ z = 1 - 4t. \end{cases}$

b) $d:\begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = -1 + 3t. \end{cases}$

56. a) $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -1 + 3t \\ z = -4 + 3t \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z+4}{3}\cdot$

b) $\dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y-2}{-4} = \dfrac{z-3}{2}\cdot$

57. a) *Cách 1.* Điểm $M(x;\ y;\ z) \in d$ khi toạ độ của M là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ x + y - z + 4 = 0. \end{cases} \qquad (*)$$

Đặt $y = t$, ta có $\begin{cases} x + z = 3t \\ x - z = -4 - t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 + t \\ z = 2 + 2t. \end{cases}$

Vậy phương trình tham số của d là :

$$\begin{cases} x = -2 + t \\ y = t \\ z = 2 + 2t. \end{cases}$$

Cách 2. Ta tìm một điểm thuộc đường thẳng d bằng cách cho $y = 0$ trong hệ (*).

Ta có hệ $\begin{cases} x + z = 0 \\ x - z = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ z = 2. \end{cases}$

Vậy điểm $M_o(-2\ ;\ 0\ ;\ 2)$ thuộc đường thẳng d.

Vectơ chỉ phương của đường thẳng d là

$$\vec{u} = \left(\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right) = (2\ ;\ 2\ ;\ 4).$$

Vậy phương trình tham số của d là :

$$\begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 2t \\ z = 2 + 4t. \end{cases}$$

b) $d : \begin{cases} x = 0 \\ y = -3 + 2t \\ z = t. \end{cases}$

58. Giả sử M là một điểm bất kì. Khi đó :

M thuộc đường thẳng $AB \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB},\ t \in$;

M thuộc tia $AB \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB},\ t \in [0, \infty)$;

M thuộc đoạn thẳng $AB \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB},\ t \in [0, 1]$.

Từ đó suy ra phương trình tham số của đường thẳng AB là

$$\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 4 - 4t \\ z = -1 + 8t \end{cases} \qquad t \in \quad ;$$

phương trình tham số của tia AB là

$$\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 4 - 4t \\ z = -1 + 8t \end{cases} \quad t \in [0, \infty) \ ;$$

phương trình tham số của đoạn thẳng AB là

$$\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 4 - 4t \\ z = -1 + 8t \end{cases} \quad t \in [0,1].$$

59. a) $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3t \\ z = -1 + 5t \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z+1}{5}.$

b) $\begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \\ z = 2 + t. \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 + t \\ z = -1 - 5t \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z+1}{-5}.$

d) $\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = 3 - 3t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{x-4}{2} = \dfrac{y-3}{-3} = \dfrac{z-1}{2}.$

e) Vectơ chỉ phương của đường thẳng cần tìm là :

$$\vec{u} = \left(\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \right) = (4 \ ; -7 \ ; -3).$$

Vậy phương trình đường thẳng là $\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 2 - 7t \\ z = -1 - 3t. \end{cases}$

g) Vectơ chỉ phương của đường thẳng là $\vec{u} = \overrightarrow{n_\alpha} = (1 \ ; 2 \ ; -2).$

Vậy phương trình là : $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = -2t. \end{cases}$

h) Vectơ chỉ phương của đường thẳng cần tìm là

$$\vec{u} = \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right] = \left(\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}\right) = (-4\ ;\ -2\ ;\ 1).$$

Vậy phương trình của nó là : $\begin{cases} x = 2 - 4t \\ y = -1 - 2t \\ z = 1 + t. \end{cases}$

60. Ta có thể viết phương trình đường thẳng d dưới dạng

$$\begin{cases} x = x_o + at \\ y = y_o + bt \\ z = z_o + ct. \end{cases}$$

Mỗi điểm $M(x; y; z) \in d$ có hình chiếu trên mp(Oxy) là điểm $M'(x; y; 0) \in d'$ với d' là hình chiếu của d trên mp(Oxy).

Vậy d có phương trình tham số là

$$\begin{cases} x = x_o + at \\ y = y_o + bt \\ z = 0. \end{cases}$$

Tương tự, ta có phương trình hình chiếu của d trên mp(Oxz), mp(Oyz) lần lượt là :

$$\begin{cases} x = x_o + at \\ y = 0 \\ z = z_o + ct \end{cases} ; \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y = y_o + bt \\ z = z_o + ct. \end{cases}$$

61. a) Phương trình hình chiếu vuông góc của đường thẳng d trên mặt phẳng toạ độ (Oxy) là

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + 3t \\ z = 0. \end{cases}$$

* Phương trình hình chiếu vuông góc của đường thẳng d trên mp(Oxz) là

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 0 \\ z = 3 + t. \end{cases}$$

* Phương trình hình chiếu vuông góc của đường thẳng d trên mp(Oyz) là

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -2 + 3t \\ z = 3 + t. \end{cases}$$

* Hình chiếu vuông góc của đường thẳng d trên mp(α) là giao tuyến của mặt phẳng (α) với mặt phẳng (β), trong đó (β) là mặt phẳng chứa đường thẳng d và vuông góc với (α).

Vectơ chỉ phương của d là $\overrightarrow{u_d} = (2 ; 3 ; 1)$, vectơ pháp tuyến của ($\alpha$) là $\overrightarrow{n_\alpha} = (1 ; 1 ; 1)$. Vậy vectơ pháp tuyến của (β) là :

$$\overrightarrow{n_\beta} = \left[\overrightarrow{u_d}, \overrightarrow{n_\alpha}\right] = \left(\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\right) = (2 ; -1 ; -1).$$

Điểm $M_0(1 ; -2 ; 3)$ thuộc d và cũng thuộc (β), do đó phương trình mặt phẳng (β) là $2(x - 1) - 1(y + 2) - 1(z - 3) = 0$ hay

$$2x - y - z - 1 = 0.$$

Vậy hình chiếu của d trên mp(α) là giao tuyến của hai mặt phẳng (α) và (β) có phương trình lần lượt là $x + y + z - 7 = 0$ và $2x - y - z - 1 = 0$. Suy ra phương trình tham số của nó là

$$\begin{cases} x = \dfrac{8}{3} \\ y = \dfrac{13}{3} - t \\ z = t. \end{cases}$$

b) Gọi (β) là mặt phẳng chứa đường thẳng d và vuông góc với (α) thì

$$(\beta) : 2x + y + 2z - 7 = 0.$$

Khi đó hình chiếu của đường thẳng d trên mp(α) là giao tuyến của mp(α) : $x + 2y - 2z - 2 = 0$ và mp(β) : $2x + y + 2z - 7 = 0$.

Từ đó suy ra phương trình đường thẳng d là

$$\frac{x-4}{2} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{-1}.$$

62. a) Đường thẳng d đi qua $M_0(1 ; 7 ; 3)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}(2 ; 1 ; 4)$.

Đường thẳng d' đi qua $M'_0(6 ; -1 ; -2)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u'}(3 ; -2 ; 1)$.

Ta có $\overrightarrow{M_0M'_0} = (5 ; -8 ; -5)$, $\left[\vec{u}, \vec{u'}\right] = (9 ; 10 ; -7) \neq \vec{0}$,

suy ra $\left[\vec{u}, \vec{u'}\right].\overrightarrow{M_0M'_0} = 0$. Vậy d và d' cắt nhau.

b) d, d' chéo nhau.

c) d, d' song song.

d) d, d' song song.

e) d, d' trùng nhau.

63. a) Đường thẳng d đi qua điểm $M_0(12 ; 9 ; 1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}(4 ; 3 ; 1)$.
Mặt phẳng (α) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (3 ; 5 ; -1)$.
Vì $\vec{u}.\vec{n} = 26 \neq 0$ nên d cắt (α).

b) d song song với (α).

c) d nằm trong (α).

d) d cắt (α).

e) d cắt (α).

64. a) Đường thẳng d_1 đi qua điểm $M_1(1 ; 2 ; 0)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1}(1 ; 2 ; -2)$.

Đường thẳng d_2 đi qua điểm $M_2(2 ; 2 ; 0)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_2}(2 ; 4 ; -4)$.

Rõ ràng $\overrightarrow{u_2} = 2\overrightarrow{u_1}$ nên d_1, d_2 cùng nằm trên một mặt phẳng, ta gọi là mp(α).

Ta có vectơ pháp tuyến của mp(α) là $\overrightarrow{n_\alpha} = \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{M_1M_2}\right] = (0 ; -2 ; -2)$.
Vậy phương trình mặt phẳng (α) là : $0(x-1) - 2(y-2) - 2(z-0) = 0$ hay

$$(\alpha) : y + z - 2 = 0.$$

b) Gọi A là giao điểm của đường thẳng d_3 và mp(α). Toạ độ của A thoả mãn hệ

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = 1 + t \\ y + z - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow t = \frac{1}{2}.$$

Suy ra $A = \left(1; \frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

Gọi B là giao điểm của đường thẳng d_4 và mp(α). Tương tự như trên, ta có $B = (4 ; 2 ; 0)$.

Đường thẳng AB nằm trong (α) cắt cả d_3 và d_4. Mặt khác $\overrightarrow{AB} = \left(3; \frac{3}{2}; -\frac{3}{2}\right)$ không cùng phương với $\overrightarrow{u_1}$ $(1 ; 2 ; -2)$. Do đó AB cắt cả d_1 và d_2. Vậy AB chính là đường thẳng d cần tìm.

$$d: \frac{x-4}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{-1}.$$

65. a) Điểm $M(x ; y ; z)$ cách đều ba điểm A, B, C khi và chỉ khi

$$\begin{cases} MA^2 = MB^2 \\ MA^2 = MC^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = (x+1)^2 + (y-2)^2 + z^2 \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = (x-2)^2 + (y+3)^2 + (z-2)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4x + 2y - 2z - 2 = 0 \\ 2x - 8y + 2z - 14 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + z + 1 = 0 & (1) \\ x - 4y + z - 7 = 0 & (2) \end{cases}$$

Vậy tập hợp điểm $M(x; y; z)$ là đường thẳng giao tuyến của hai mặt phẳng lần lượt có phương trình (1) và (2). Đường thẳng đó có phương trình là

$$\begin{cases} x = -8 - 3t \\ y = t \\ z = 15 + 7t. \end{cases}$$

Nó chính là trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

b) Xét điểm $M(x ; y ; z)$. Khi đó khoảng cách d_x từ M tới trục Ox là

$$d_x = \frac{\left|\left[\overrightarrow{OM}, \vec{i}\right]\right|}{\left|\vec{i}\right|} = \sqrt{y^2 + z^2},$$

khoảng cách d_y từ M tới trục Oy là

$$d_y = \frac{\left|\left[\overrightarrow{OM}, \vec{j}\right]\right|}{\left|\vec{j}\right|} = \sqrt{x^2 + z^2}.$$

Mặt khác $MA = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2}$.

Vậy M là một điểm của quỹ tích khi

$$\begin{cases} y^2 + z^2 = x^2 + z^2 \\ y^2 + z^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2(x+y) + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = y^2 & (1) \\ x^2 - 2(x+y) + 2 = 0. & (2) \end{cases}$$

Từ (1) suy ra $x = y$ hoặc $x = -y$.

Khi $x = y$, phương trình (2) có dạng : $x^2 - 4x + 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \pm \sqrt{2}$.

Trong trường hợp này, quỹ tích M là những điểm $(x;\ y;\ z)$ mà :

$$\begin{cases} x = 2 + \sqrt{2} \\ y = 2 + \sqrt{2} \\ z = t \end{cases} \quad (3) \quad \text{và} \quad \begin{cases} x = 2 - \sqrt{2} \\ y = 2 - \sqrt{2} \\ z = t. \end{cases} \quad (4)$$

Khi $x = -y$, phương trình (2) trở thành : $x^2 + 2 = 0$. Điều này không xảy ra.

Vậy quỹ tích cần tìm là hai đường thẳng có phương trình (3) và (4).

66. a) Giải hệ gồm phương trình các mặt phẳng xác định Δ và Δ', ta có một nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} x = -\dfrac{1}{2} \\ y = 0 \\ z = \dfrac{3}{2}. \end{cases}$$

Vậy Δ và Δ' cắt nhau tại điểm $I\left(-\dfrac{1}{2}\ ;\ 0\ ;\ \dfrac{3}{2}\right)$.

b) Ta chọn một điểm thuộc Δ, có thể lấy $A = (0\ ;\ -1\ ;\ 0) \in \Delta$.

Chọn một điểm thuộc Δ', có thể lấy $B = (0\ ;\ 1\ ;\ 4) \in \Delta'$.

Khi đó, vectơ chỉ phương đơn vị của Δ là $\overrightarrow{e_1} = \dfrac{\overrightarrow{IA}}{|\overrightarrow{IA}|}$,

vectơ chỉ phương đơn vị của Δ' là $\overrightarrow{e_2} = \dfrac{\overrightarrow{IB}}{|\overrightarrow{IB}|}$.

Suy ra $\qquad \overrightarrow{e_1} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{14}}; \dfrac{-2}{\sqrt{14}}; \dfrac{-3}{\sqrt{14}}\right)$,

$$\overrightarrow{e_2} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{30}}; \dfrac{2}{\sqrt{30}}; \dfrac{5}{\sqrt{30}}\right).$$

Ta có $\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2}$ là các vectơ chỉ phương của cặp đường phân giác của các góc tạo bởi Δ và Δ'.

Vậy phương trình chính tắc của cặp đường phân giác là :

$$\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{14}}+\frac{1}{\sqrt{30}}}=\frac{y}{\frac{-2}{\sqrt{14}}+\frac{2}{\sqrt{30}}}=\frac{z-\frac{3}{2}}{\frac{-3}{\sqrt{14}}+\frac{5}{\sqrt{30}}}$$

và

$$\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{14}}-\frac{1}{\sqrt{30}}}=\frac{y}{\frac{-2}{\sqrt{14}}-\frac{2}{\sqrt{30}}}=\frac{z-\frac{3}{2}}{\frac{-3}{\sqrt{14}}-\frac{5}{\sqrt{30}}}.$$

67. a) Đường thẳng d đi qua điểm $M(-2 ; 1 ; -1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}(1 ; 2 ; -2)$.

Ta có $\overrightarrow{M_0M} = (-4 ; -2 ; -2) \Rightarrow \left[\vec{u}, \overrightarrow{M_0M}\right] = (-8 ; 10 ; 6)$

$$\Rightarrow d(M_0, d) = \frac{\left|\left[\vec{u}, \overrightarrow{M_0M}\right]\right|}{|\vec{u}|} = \frac{\sqrt{(-8)^2+10^2+6^2}}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}} = \frac{\sqrt{200}}{3} = \frac{10\sqrt{2}}{3}.$$

b) Ta xác định được một vectơ chỉ phương của d là $\vec{u} = (4 ; -2 ; 1)$.

Mặt phẳng (α) đi qua $M_0(2 ; 3 ; -1)$ và vuông góc với d có phương trình

$$4(x-2) - 2(y-3) + 1(z+1) = 0$$

hay $$4x - 2y + z - 1 = 0.$$

Gọi H là giao điểm của d và (α). Toạ độ điểm H là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} 4x - 2y + z - 1 = 0 \\ x + y - 2z - 1 = 0 \\ x + 3y + 2z + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow H = \left(\frac{3}{14}; -\frac{5}{14}; -\frac{8}{14}\right).$$

Khi đó

$$d(M_0, d) = M_0H = \sqrt{\left(2-\frac{3}{14}\right)^2 + \left(3+\frac{5}{14}\right)^2 + \left(-1+\frac{8}{14}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{2870}{14^2}} = \sqrt{\frac{205}{14}}.$$

c) $d(M_o, d) = \dfrac{\sqrt{9022}}{26}$.

d) $d(M_o, d) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

68. Vectơ chỉ phương của đường thẳng d là $\vec{u} = (1 ; 1 ; 3)$, vectơ pháp tuyến của mp(α) là $\vec{n} = (2 ; 1 ; -1)$.

Vì $\vec{n}.\vec{u} = 0$ nên $\vec{n} \perp \vec{u}$. Dễ thấy $M \notin (\alpha)$. Do đó $d \,//\, (\alpha)$.

Khoảng cách từ M tới (α) bằng khoảng cách giữa d và (α) nên

$$d(d, (\alpha)) = \frac{|-1+5|}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}} = \frac{4}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

69. a) Đường thẳng d_1 đi qua điểm $M_o(1 ; -1 ; 1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1 ; -1 ; 0)$. Đường thẳng d_2 đi qua điểm $M'_o\ (2 ; -2 ; 0)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u'} = (-1 ; 1 ; 1)$. Vì $\overrightarrow{M_oM'_o} = (1 ; -1 ; -1) = -\overrightarrow{u'}$ nên hai đường thẳng đó cắt nhau, do đó khoảng cách giữa chúng bằng 0.

b) Hai đường thẳng song song.

Khoảng cách giữa chúng bằng khoảng cách từ một điểm thuộc đường thẳng này tới đường thẳng kia.

c) *Cách 1.* Đường thẳng d_1 đi qua $M_o(1 ; 2 ; 3)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1}\ (1 ; 2 ; 3)$.

Đường thẳng d_2 đi qua $M'_o\ (2 ; -1 ; 0)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_2}\ (-1 ; 1 ; 1)$.

Khoảng cách giữa d_1 và d_2 là

$$d(d_1, d_2) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right].\overrightarrow{M_oM'_o}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right]\right|} = \frac{\sqrt{26}}{13}.$$

Cách 2. Gọi (α) là mặt phẳng chứa d_2 và song song với d_1. Khi đó, (α) đi qua $M'_o\ (2 ; -1 ; 0)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right] = (-1 ; -4 ; 3)$.

Phương trình của mp(α) là : $x + 4y - 3z + 2 = 0$.

Vậy $d(d_1, d_2) = d(M_o, (\alpha)) = \dfrac{|1 + 4.2 - 3.3 + 2|}{\sqrt{1 + 16 + 9}} = \dfrac{\sqrt{26}}{13}$.

d) $d(d_1, d_2) = \sqrt{13}$.

70. 1. côsin của góc giữa đường thẳng và các trục Ox, Oy, Oz lần lượt là : $\dfrac{\sqrt{6}}{3}; \dfrac{\sqrt{6}}{6}; \dfrac{\sqrt{6}}{6}$.

2. Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng đã cho

a) $\cos\varphi = \dfrac{3\sqrt{6}}{14}$; b) $\cos\varphi = \dfrac{3}{\sqrt{77}\sqrt{26}}$;

71. Gọi φ là góc giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (α)

a) $\sin\varphi = \dfrac{1}{3\sqrt{14}}$; b) $\sin\varphi = \dfrac{\sqrt{7}}{3}$;

c) $\varphi = 30^o$; d) $\varphi = 30^o$.

72. a) Phương trình của đường thẳng đi qua điểm $M_o(1 ; -1 ; 2)$ và vuông góc với mặt phẳng (α) là :

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 2 + 2t. \end{cases}$$

Gọi $M_o'(x ; y ; z)$ là hình chiếu của M_o trên mp(α). Toạ độ của M_o' thoả mãn hệ :

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 2 + 2t \\ 2x - y + 2z + 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow t = -\frac{19}{9}.$$

Vậy $M_o' = \left(-\dfrac{29}{9}; \dfrac{10}{9}; -\dfrac{20}{9}\right)$.

b) $\overrightarrow{AB} = (-1 ; 2 ; -3)$, $\overrightarrow{AC} = (-3 ; 4 ; 1) \Rightarrow \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (14 ; 10 ; 2)$.

Lấy một vectơ pháp tuyến của mp(ABC) là $\vec{n} = (7 ; 5 ; 1)$, ta có phương trình của mặt phẳng (ABC) : $7x + 5y + z - 37 = 0$.

Đường thẳng đi qua D và vuông góc với mp(ABC) có phương trình :

$$\begin{cases} x = 1 + 7t \\ y = 1 + 5t \\ z = 1 + t. \end{cases}$$

Toạ độ hình chiếu D' của D trên mp(ABC) thoả mãn hệ

$$\begin{cases} x = 1 + 7t \\ y = 1 + 5t \\ z = 1 + t \\ 7x + 5y + z - 37 = 0. \end{cases}$$

Suy ra $D' = \left(\frac{81}{25}; \frac{13}{5}; \frac{33}{25}\right)$.

c) $\left(\frac{3}{34}; \frac{2}{17}; -\frac{3}{34}\right)$.

73. a) Trước hết, ta xác định hình chiếu vuông góc H của M_o trên (α). Gọi d là đường thẳng qua M_o và vuông góc với (α), ta có

$$d: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -3 + 3t \\ z = 1 - t. \end{cases}$$

Toạ độ điểm $H(x; y; z)$ thoả mãn hệ :

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -3 + 3t \\ z = 1 - t \\ x + 3y - z + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow H = \left(\frac{28}{11}; -\frac{15}{11}; \frac{5}{11}\right).$$

Gọi M' là điểm đối xứng của M_o qua mặt phẳng (α) thì H là trung điểm của M_oM' nên ta có :

$$\begin{cases} \dfrac{x_{M'} + 2}{2} = \dfrac{28}{11} \\ \dfrac{y_{M'} - 3}{2} = -\dfrac{15}{11} \\ \dfrac{z_{M'} + 1}{2} = \dfrac{5}{11} \end{cases} \Rightarrow M' = \left(\frac{34}{11}; \frac{3}{11}; -\frac{1}{11}\right).$$

b) $A' = \left(\frac{48}{49}; \frac{24}{49}; \frac{65}{49}\right)$.

c) $B' = \left(\frac{12}{7}; \frac{18}{7}; \frac{34}{7}\right)$.

74. (h.102)

a) Theo chú ý ở bài tập 52, ta nhận thấy hai điểm A, B ở khác phía đối với mặt phẳng (α).

Gọi A' là điểm đối xứng của điểm A qua mặt phẳng (α), ta có :

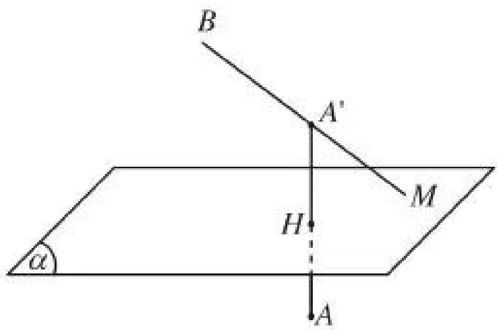
$|MA - MB| = |MA' - MB| \leq A'B$ (không đổi).

Dấu "=" xảy ra khi A' nằm giữa hai điểm B, M hay M là giao điểm của đường thẳng $A'B$ với mp(α).

Vậy bài toán được giải theo trình tự sau :

* Xác định điểm A' đối xứng với điểm A qua mp(α), làm như bài 73, ta có $A' = (-1 ; 3 ; -2)$.

* Tìm giao điểm M của đường thẳng A'B với mp(α).



Hình 102

Đường thẳng $A'B$ có phương trình : $\begin{cases} x = -1 + 8t \\ y = 3 - t \\ z = -2 - 11t. \end{cases}$

Toạ độ điểm $M(x ; y ; z)$ thoả mãn hệ :

$$\begin{cases} x = -1 + 8t \\ y = 3 - t \\ z = -2 - 11t \\ 2x - y + z + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow t = 1 \Rightarrow M = (7 ; 2 ; -13).$$

Vậy $|MA - MB|$ lớn nhất khi $M = (7 ; 2 ; -13)$.

b) Gọi I là trung điểm của đoạn $AB \Rightarrow I = (5 ; 2 ; 5)$.

Ta có $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI} \Rightarrow \left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right| = 2MI$.

Vậy $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right|$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI$ nhỏ nhất với I cố định và $M \in (\alpha) \Leftrightarrow M$ là hình chiếu vuông góc của I trên mp(α).

Toạ độ của $M(x ; y ; z)$ là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} x = 5 + t \\ y = 2 + t \\ z = 5 + t \\ x + y + z + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow t = -5 \Rightarrow M = (0 ; -3 ; 0).$$

Kõt luËn : $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|$ nhỏ nhất ($= 2MI = 10\sqrt{3}$) khi $M = (0\ ;\ -3\ ;\ 0)$.

75. a) Ta có $\overrightarrow{BC} = (1\ ;\ -1\ ;\ 7)$. Phương trình đường thẳng BC là

$$\begin{cases} x = 4 + t \\ y = -t \\ z = -3 + 7t. \end{cases}$$

Phương trình mp(α) đi qua A và vuông góc với BC là :

$$1(x+1) - 1(y-3) + 7(z-2) = 0 \text{ hay } x - y + 7z - 10 = 0.$$

Gọi H là hình chiếu của điểm A trên đường thẳng BC thì toạ độ của $H(x; y; z)$ thoả mãn hệ :

$$\begin{cases} x = 4 + t \\ y = -t \\ z = -3 + 7t \\ x - y + 7z - 10 = 0 \end{cases} \Rightarrow H = \left(\frac{231}{51}; -\frac{27}{51}; \frac{36}{51}\right).$$

b) $H = (1\ ;\ 0\ ;\ -1)$.

76. a) Phương trình mặt phẳng qua điểm $M_o(2\ ;\ -1\ ;\ 1)$ và vuông góc với đường thẳng d đã cho là

$$2(x-2) + (-1)(y+1) + 2(z-1) = 0 \Leftrightarrow 2x - y + 2z - 7 = 0.$$

Gọi $H(x\ ;\ y\ ;\ z)$ là giao điểm của đường thẳng d với mặt phẳng trên, ta có :

$$H = \left(\frac{17}{9}; -\frac{13}{9}; \frac{8}{9}\right).$$

Gọi $M'_o(x\ ;\ y\ ;\ z)$ là điểm đối xứng với điểm M_o qua đường thẳng d thì H là trung điểm của đoạn thẳng $M_oM'_o$. Do đó

$$\begin{cases} \dfrac{x+2}{2} = \dfrac{17}{9} \\ \dfrac{y-1}{2} = -\dfrac{13}{9} \\ \dfrac{z+1}{2} = \dfrac{8}{9}. \end{cases}$$

Vậy $M'_o = \left(\frac{16}{9}; -\frac{17}{9}; \frac{7}{9}\right)$.

b) Ta xác định được vectơ chỉ phương của d là $\overrightarrow{u_d} = (3 ; 4 ; 2)$.

Khi đó phương trình mặt phẳng qua M_o và vuông góc với d là :

$$(\alpha) : 3x + 4y + 2z + 7 = 0.$$

Gọi $H(x ; y ; z)$ là giao điểm của d và (α), ta có $H = (1 ; -3 ; 1)$.

Gọi $M_o(x ; y ; z)$ là điểm đối xứng của M_o qua d, ta có $M_o = (5 ; -7 ; 3)$.

c) Ta xác định vectơ chỉ phương của d :

$$\overrightarrow{u_d} = \left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \right) = (0 ; 2 ; -2).$$

Gọi (α) là mặt phẳng qua M_o và vuông góc với d, khi đó (α) có phương trình :

$$y - z + 2 = 0.$$

Gọi H là giao điểm của d với mp(α), toạ độ của $H(x ; y ; z)$ là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} y + z - 4 = 0 \\ 2x - y - z + 2 = 0 \\ y - z + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow H = (1 ; 1 ; 3).$$

Từ đó, điểm M_o đối xứng với M_o qua d là $M_o = (0 ; 3 ; 5)$.

77. a) *Cách 1 :* Ta có $\overrightarrow{u_d} = (2 ; 3 ; -5)$, $\overrightarrow{u_{d'}} = (3 ; -2 ; -1)$.

Khi đó vì $\left[\overrightarrow{u_d}, \overrightarrow{u_{d'}}\right] = (-13 ; -13 ; -13)$ nên đường vuông góc chung Δ có một vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (1 ; 1 ; 1)$.

Gọi (α) là mặt phẳng chứa d và Δ thì (α) đi qua $M_o\,(2 ; 3 ; -4)$ và có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_\alpha} = \left[\overrightarrow{u_d}, \vec{u}\right] = (8 ; -7 ; -1)$.

Phương trình của mp(α) là : $8(x - 2) - 7(y - 3) - 1(z + 4) = 0$

$$\Leftrightarrow 8x - 7y - z + 1 = 0.$$

Gọi (β) là mặt phẳng chứa d' và Δ thì (β) đi qua điểm $M_o\,(-1 ; 4 ; 4)$ và có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_\beta} = \left[\vec{u}, \overrightarrow{u_{d'}}\right] = (1 ; 4 ; -5)$.

Phương trình của mp(β) là : $1(x + 1) + 4(y - 4) - 5(z - 4) = 0$

$$\Leftrightarrow x + 4y - 5z + 5 = 0.$$

Vậy đường vuông góc chung Δ của d và d' là giao tuyến của hai mặt phẳng (α) và (β). Nó có phương trình tham số là :

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 + t. \end{cases}$$

Cách 2 : Điểm $M \in d$ có toạ độ là $M = (2 + 2t\,; 3 + 3t\,; -4 - 5t)$,
điểm $N \in d'$ có toạ độ là $N = (-1 + 3t'\,; 4 - 2t'\,; 4 - t')$

$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = (-3 + 3t' - 2t\,; 1 - 2t' - 3t\,; 8 - t' + 5t)$.

MN là đường vuông góc chung của d và d' khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{u_d} = 0 \\ \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{u_{d'}} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(-3 + 3t' - 2t) + 3(1 - 2t' - 3t) - 5(8 - t' + 5t) = 0 \\ 3(-3 + 3t' - 2t) - 2(1 - 2t' - 3t) - 1(8 - t' + 5t) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5t' - 38t = 43 \\ 14t' - 5t = 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = 1 \\ t = -1. \end{cases}$$

Suy ra $M = (0\,; 0\,; 1)$, $N = (2\,; 2\,; 3) \Rightarrow \overrightarrow{MN} = (2\,; 2\,; 2)$.

Vậy phương trình chính tắc của đường vuông góc chung Δ là

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}.$$

b) $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-3}{5} = \dfrac{z}{2}$.

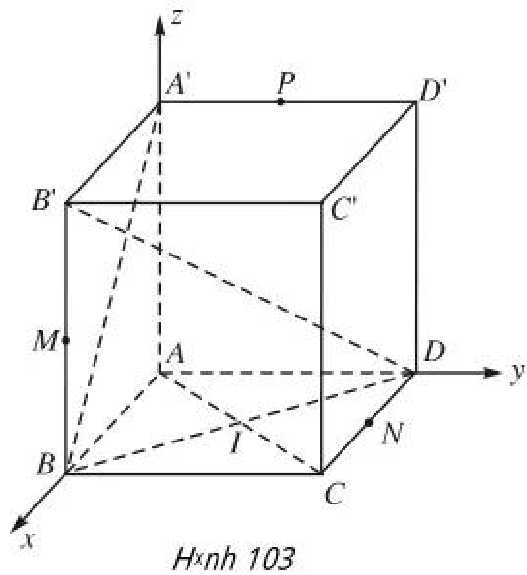
78. a) Ta chọn hệ trục $Oxyz$ sao cho gốc toạ độ là A, tia Ox chứa AB, tia Oy chứa AD và tia Oz chứa AA' (h.103). Khi đó

$A = (0\,; 0\,; 0)$, $B = (1\,; 0\,; 0)$

$D = (0\,; 1\,; 0)$, $A' = (0\,; 0\,; 1)$

$C = (1\,; 1\,; 0)$, $B' = (1\,; 0\,; 1)$

$C' = (1\,; 1\,; 1)$, $D' = (0\,; 1\,; 1)$.



Hình 103

Suy ra $\overrightarrow{A'B} = (1\ ;\ 0\ ;\ -1)$

$\overrightarrow{B'D} = (-1\ ;\ 1\ ;\ -1)$

$\Rightarrow \left[\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{B'D}\right] = (1\ ;\ 2\ ;\ 1).$

Lại có $\overrightarrow{A'B'} = (1\ ;\ 0\ ;\ 0)$ nên

$$d(A'B,\ B'D) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{B'D}\right].\overrightarrow{A'B'}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{B'D}\right]\right|} = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

Ta lại có : $P = \left(0; \frac{1}{2}; 1\right)$, $I = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right) \Rightarrow \overrightarrow{IP} = \left(-\frac{1}{2}; 0; 1\right)$,

$\overrightarrow{AC'} = (1\ ;\ 1\ ;\ 1)$, $\overrightarrow{AP} = \left(0; \frac{1}{2}; 1\right)$.

Suy ra $d(PI,\ AC') = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{IP}, \overrightarrow{AC'}\right].\overrightarrow{AP}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{IP}, \overrightarrow{AC'}\right]\right|} = \dfrac{\sqrt{14}}{28}.$

b) Ta có $M = \left(1; 0; \frac{1}{2}\right)$, $N = \left(\frac{1}{2}; 1; 0\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{MP} = \left(-1; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, $\overrightarrow{NC'} = \left(\frac{1}{2}; 0; 1\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{MP}.\overrightarrow{NC'} = 0 \Rightarrow \mathrm{MP} \perp \mathrm{NC'}$.

Mặt phẳng (PAI) có vectơ pháp tuyến : $\vec{n} = \left[\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AI}\right] = \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; -\frac{1}{4}\right)$.

Mặt phẳng $(DCC'D')$ có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{AD} = (0\ ;\ 1\ ;\ 0)$.

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng trên thì

$$\cos\varphi = \frac{\left|\vec{n}.\overrightarrow{AD}\right|}{\left|\vec{n}\right|.\left|\overrightarrow{AD}\right|} = \frac{2}{3}.$$

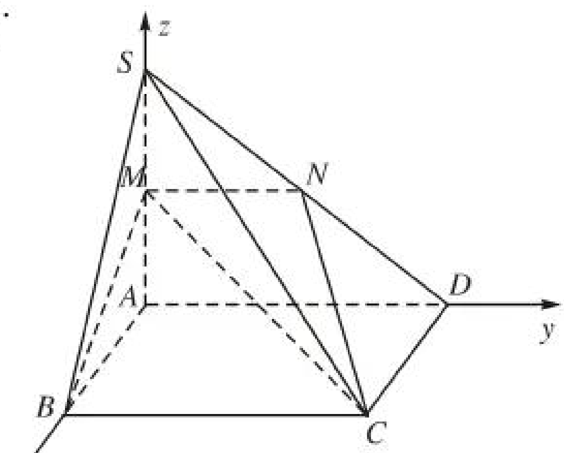
79. Chọn hệ trục $Oxyz$ sao cho gốc O là điểm A, tia Ox chứa AB, tia Oy chứa AD và tia Oz chứa SA (h.104). Khi đó

$A = (0\ ;\ 0\ ;\ 0)$, $B = (a\ ;\ 0\ ;\ 0)$,

$C = (a\ ;\ a\ ;\ 0)$, $D = (0\ ;\ a\ ;\ 0)$,

$S = (0\ ;\ 0\ ;\ 2a)$, $M = (0\ ;\ 0\ ;\ a)$,

$N = \left(0; \frac{a}{2}; a\right)$.



H×nh 104

a) $\overrightarrow{BC} = (0\,;\,a\,;\,0)$,

$\overrightarrow{BM} = (-a\,;\,0\,;\,a)$

$$\Rightarrow \left[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BM}\right] = \left(\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ a & -a \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{vmatrix}\right) = (a^2\,;\,0\,;\,a^2).$$

Do đó, mặt phẳng (BCM) có một vectơ pháp tuyến là $(1\,;\,0\,;\,1)$, suy ra phương trình mặt phẳng (BCM) là :

$$1(x-a) + 1(z-0) = 0 \Leftrightarrow x + z - a = 0.$$

Vậy khoảng cách từ A đến mp(BCM) là

$$d(A, (BCM)) = \frac{|-a|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Ta lại có : $\overrightarrow{BS} = (-a\,;\,0\,;\,2a)$, $\overrightarrow{CN} = \left(-a; -\frac{a}{2}; a\right)$, $\overrightarrow{SC} = (a\,;\,a\,;\,-2a)$.

$$\text{Suy ra } \left[\overrightarrow{BS}, \overrightarrow{CN}\right] = \left(\begin{vmatrix} 0 & 2a \\ -\frac{a}{2} & a \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2a & -a \\ a & -a \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -a & 0 \\ -a & -\frac{a}{2} \end{vmatrix}\right) = \left(a^2; -a^2; \frac{a^2}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \left[\overrightarrow{BS}, \overrightarrow{CN}\right].\overrightarrow{SC} = a^3 - a^3 - a^3 = -a^3.$$

Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và CN là

$$d(SB, CN) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{BS}, \overrightarrow{CN}\right].\overrightarrow{SC}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{BS}, \overrightarrow{CN}\right]\right|} = \frac{|-a^3|}{\sqrt{a^4 + a^4 + \frac{a^4}{4}}} = \frac{a^3}{\frac{3a^2}{2}} = \frac{2a}{3}.$$

b) Vì $\left[\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{SD}\right] = \left(0; 2a^2; a^2\right)$ nên mp(SCD) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (0\,;\,2\,;\,1)$.

Vì $\left[\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC}\right] = \left(2a^2\,; 0\,; a^2\right)$ nên mp(SBC) có vectơ pháp tuyến $\vec{n'} = (2\,; 0\,; 1)$.

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và (SBC), ta có

$$\cos\varphi = \frac{\left|\vec{n}.\vec{n'}\right|}{\left|\vec{n}\right|\left|\vec{n'}\right|} = \frac{|-1|}{\sqrt{5}.\sqrt{5}} = \frac{1}{5}.$$

c) $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}a^2.2a = \frac{2}{3}a^3$.

Vì M là trung điểm của SA suy ra $d(S, (BCM)) = d(A, (BCM)) = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

Hình chóp $S.ABCD$ bị mp(BCM) chia thành hai phần, trong đó có một phần là hình chóp $S.BCNM$. Hình chóp này có đường cao bằng $d(S, (BCM)) = \frac{a}{\sqrt{2}}$

và đáy là hình thang $BCNM$ có diện tích bằng $\frac{1}{2}\left(a + \frac{a}{2}\right)a\sqrt{2} = \frac{3\sqrt{2}a^2}{4}$.

Suy ra : $V_{S.BCNM} = \frac{1}{3}.\frac{3\sqrt{2}a^2}{4}.\frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a^3}{4}$.

Vậy tỉ số thể tích giữa hai phần của hình chóp $S.ABCD$ chia bởi mp(BCM) là :

$$\frac{\frac{a^3}{4}}{\frac{2a^3}{3} - \frac{a^3}{4}} = \frac{3}{5}.$$

80. a) Ta nhận thấy mp(P_1) song song với mp(P_2).

Gọi A là giao điểm của đường thẳng d với mp(P_1). Toạ độ (x ; y ; z) của A là nghiệm của hệ : $\begin{cases} x + y + z + 1 = 0 \\ x - y + z - 1 = 0 \\ x + 2y + 2z + 3 = 0 \end{cases}$. Suy ra $A = (1 ; -1 ; -1)$.

Gọi B là giao điểm của đường thẳng d với mp(P_2). Toạ độ (x ; y ; z) của B là nghiệm của hệ : $\begin{cases} x + y + z + 1 = 0 \\ x - y + z - 1 = 0 \\ x + 2y + 2z + 7 = 0 \end{cases}$. Suy ra $B = (5 ; -1 ; -5)$.

Tâm I của mặt cầu phải tìm là trung điểm của đoạn thẳng AB.

Do đó $I = (3 ; -1 ; -3)$. Bán kính của mặt cầu phải tìm là

$$R = d(I, (P_1)) = \frac{|3 - 2 - 6 + 3|}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}.$$

Vậy phương trình mặt cầu cần tìm là :

$$(x - 3)^2 + (y + 1)^2 + (z + 3)^2 = \frac{4}{9}.$$

b) Gọi $I(a\,;\,b\,;\,c)$ là tâm của mặt cầu cần tìm, do $I \in d$ nên

$$\frac{a}{2} = \frac{b-1}{1} = \frac{c+1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} a - 2b + 2 = 0 \\ a - c - 1 = 0. \end{cases}$$

Vì mặt cầu (S) tiếp xúc với cả mp(P_1) và mp(P_2) nên :

$$d(I, (P_1)) = d(I, (P_2)) = R$$

$$\Leftrightarrow \frac{|a + b - 2c + 5|}{\sqrt{6}} = \frac{|2a - b + c + 2|}{\sqrt{6}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a - 2b + 3c = 3 \\ 3a - c = -7. \end{array}\right.$$

Kết hợp với điều kiện trên ta có :

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a - 2b + 2 = 0 \\ a - c - 1 = 0 \\ a - 2b + 3c - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow I_1 = \left(\frac{8}{3}; \frac{7}{3}; \frac{5}{3}\right), R_1 = \frac{20}{3\sqrt{6}}. \\ \begin{cases} a - 2b + 2 = 0 \\ a - c - 1 = 0 \\ 3a - c + 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow I_2 = (-4; -1; -5), R_2 = \frac{10}{\sqrt{6}}. \end{array}\right.$$

Vậy có hai mặt cầu có tâm nằm trên d và tiếp xúc với $(P_1), (P_2)$, chúng có phương trình là

$$\left(x - \frac{8}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{7}{3}\right)^2 + \left(z - \frac{5}{3}\right)^2 = \frac{200}{27},$$

$$(x + 4)^2 + (y + 1)^2 + (z + 5)^2 = \frac{50}{3}.$$

81. Với điểm $M(x; y; z)$ bất kì, ta tính được các khoảng cách từ M tới d_1 và d_2 là :

$$h_1 = \sqrt{(z-1)^2 + x^2}, \qquad h_2 = \sqrt{(z+1)^2 + y^2}.$$

M cách đều d_1 và d_2 khi và chỉ khi

$$h_1 = h_2 \Leftrightarrow \sqrt{(z-1)^2 + x^2} = \sqrt{(z+1)^2 + y^2}$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 2z = y^2 + 2z$$
$$\Leftrightarrow x^2 - y^2 = 4z.$$

Xét các trường hợp sau :

+ $M \in$ mp(Oxy), khi đó $z = 0$ suy ra $x^2 - y^2 = 0$.

Vậy quỹ tích điểm M là cặp đường thẳng $y = \pm x$ nằm trong mặt phẳng $z = 0$.

+ $M \in$ mp(Oyz), tức là $x = 0$. Quỹ tích điểm M là đường parabol $y^2 = -4z$ nằm trong mặt phẳng $x = 0$.

+ $M \in$ mp(Oxz), tức là $y = 0$. Quỹ tích điểm M là đường parabol $x^2 = 4z$ nằm trong mặt phẳng $y = 0$.

82. Gọi d_1 là đường thẳng qua $M_o\ (x_o\ ;\ y_o\ ;\ z_o)$ và song song với trục Ox thì d_1 có vectơ chỉ phương là (1 ; 0 ; 0). Ta có phương trình của d_1 là

$$d_1 : \begin{cases} x = x_o + t \\ y = y_o \\ z = z_o. \end{cases}$$

Gọi M_1 là giao điểm của d_1 với mp(α). Toạ độ $(x; y; z)$ của M_1 thoả mãn hệ

$$\begin{cases} x = x_o + t \\ y = y_o \\ z = z_o \\ Ax + By + Cz + D = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow M_1 = \left(x_o - \frac{Ax_o + By_o + Cz_o + D}{A} ; y_o ; z_o \right)$$

$$\Rightarrow M_oM_1 = \left| \frac{Ax_o + By_o + Cz_o + D}{A} \right|.$$

Tương tự, gọi d_2 là đường thẳng đi qua M_o và song song với Oy, d_2 cắt (α) tại M_2 thì

$$M_oM_2 = \left| \frac{Ax_o + By_o + Cz_o + D}{B} \right|.$$

Gọi d_3 là đường thẳng đi qua M_o và song song với Oz, d_3 cắt (α) tại M_3 thì

$$M_oM_3 = \left| \frac{Ax_o + By_o + Cz_o + D}{C} \right|.$$

Dễ thấy M_oM_1, M_oM_2, M_oM_3 đôi một vuông góc, do đó

$$V_{M_oM_1M_2M_3} = \frac{1}{6} M_oM_1 . M_oM_2 . M_oM_3 = \frac{\left| Ax_o + By_o + Cz_o + D \right|^3}{6.\left| A.B.C \right|}.$$

83. a) Đường thẳng d' là giao tuyến của hai mặt phẳng có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (0 ; 3 ; -1)$ và $\overrightarrow{n'} = (3 ; 3 ; -2)$ nên d' có một vectơ chỉ phương là :

$$\overrightarrow{u_{d'}} = -\frac{1}{3}\left[\vec{n}, \overrightarrow{n'}\right] = (1 ; 1 ; 3).$$

Vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_d}$ của d là $\overrightarrow{u_d} = (2 ; 1 ; -1)$.

Vì $\overrightarrow{u_d} . \overrightarrow{u_{d'}} = 0$ nên $d \perp d'$.

Ta dễ chứng minh d và d' không có điểm chung (hệ phương trình lập ra từ phương trình hai đường thẳng này vô nghiệm). Vậy chúng chéo nhau.

b) Ta lấy một điểm A nào đó thuộc d'. Chẳng hạn cho $y = 0$ thì $z = -7$, $x = 1$, ta có $A(1 ; 0 ; -7) \in d'$. Vì $d \perp d'$ nên mặt phẳng đi qua A và vuông góc với d sẽ đi qua d'. Vậy phương trình mặt phẳng (P) là :

$$2(x-1) + (y-0) - (z+7) = 0$$
$$\Leftrightarrow 2x + y - z - 9 = 0.$$

Toạ độ giao điểm $H(x ; y ; z)$ của d và (P) thoả mãn hệ

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 2 - t \\ 2x + y - z - 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow t = \frac{5}{3} \Rightarrow H = \left(\frac{13}{3} ; \frac{2}{3} ; \frac{1}{3}\right).$$

c) Mặt phẳng (Q) song song với mp(Oxy) nên có phương trình

$$z = m \qquad (m \neq 0).$$

Toạ độ giao điểm $M(x ; y ; z)$ của d và (Q) thoả mãn hệ

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 2 - t \\ z = m \end{cases} \Rightarrow M = (5 - 2m ; 1 - m ; m).$$

Toạ độ giao điểm $M'(x ; y ; z)$ của d' và (Q) thoả mãn hệ :

$$\begin{cases} 3y - z - 7 = 0 \\ 3x + 3y - 2z - 17 = 0 \\ z = m \end{cases} \Rightarrow M' = \left(\frac{10 + m}{3} ; \frac{7 + m}{3} ; m\right).$$

Gọi I là trung điểm của MM' thì $I = \left(\frac{25-5m}{6}; \frac{5-m}{3}; m\right)$.

Vậy quỹ tích của I là đường thẳng có phương trình tham số

$$\begin{cases} x = \dfrac{25-5m}{6} \\ y = \dfrac{5-m}{3} \\ z = m \end{cases};$$

bỏ đi điểm $\left(\frac{25}{6}; \frac{5}{3}; 0\right)$ (ứng với $m = 0$).

84. a) Δ_m là giao tuyến của hai mặt phẳng với các vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_1}(m; 1; -m)$ và $\overrightarrow{n_2}(1; -m; 1)$. Vậy Δ_m có vectơ chỉ phương là

$$\overrightarrow{u_m} = \left[\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}\right] = (1 - m^2; -2m; -1 - m^2).$$

Trục Oz có vectơ chỉ phương $\vec{k} = (0; 0; 1)$.

Vậy nếu gọi φ_m là góc giữa hai đường thẳng Δ_m và Oz thì

$$\cos\varphi_m = \frac{\left|\overrightarrow{u_m}.\vec{k}\right|}{\left|\overrightarrow{u_m}\right|.\left|\vec{k}\right|} = \frac{1 + m^2}{\sqrt{(1-m^2)^2 + 4m^2 + (1+m^2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Suy ra $\varphi_m = 45^\circ$ (không đổi).

Điểm $M(x; y; z)$ thuộc Δ_m khi toạ độ của M là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} mx + y - mz - 1 = 0 \\ x - my + z - m = 0. \end{cases} \qquad (*)$$

Khử z từ hệ phương trình (*), ta được phương trình

$$2mx + (1 - m^2)y - 1 - m^2 = 0 \text{ (không chứa } z\text{)}.$$

Đây là phương trình của mặt phẳng (α_m) chứa Δ_m và song song với trục Oz. Do đó, khoảng cách giữa Δ_m và Oz bằng khoảng cách từ gốc $O(0; 0; 0)$ thuộc Oz tới mp(α_m). Vậy khoảng cách đó bằng :

$$d_m = \frac{\left|-1 - m^2\right|}{\sqrt{4m^2 + (1-m^2)^2}} = 1 \text{ (không đổi)}.$$

b) Toạ độ giao điểm M của Δ_m và mp(Oxy) là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} mx + y = 1 \\ x - my = m \\ z = 0. \end{cases}$$

Bình phương hai vế của hai phương trình đầu của hệ rồi cộng lại, ta suy ra

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0. \end{cases}$$

Vậy tập hợp các điểm M là đường tròn tâm O, bán kính bằng 1 trong mặt phẳng toạ độ (Oxy).

85. a) Đường thẳng d_1 có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{u_1} = (8 ; 4 ; 1)$.

Đường thẳng d_2 có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{u_2} = (2 ; -2 ; 1)$.

Vì $\left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right] = (6 ; -6 ; -24)$ nên $\vec{n} = (1 ; -1 ; -4)$ là một vectơ pháp tuyến của (P_1) và (P_2).

Mặt phẳng (P_1) đi qua $M_1(-23 ; -10 ; 0)$ nên có phương trình :

$$(x + 23) - (y + 10) - 4z = 0 \text{ hay } x - y - 4z + 13 = 0.$$

Mặt phẳng (P_2) đi qua $M_2(3 ; -2 ; 0)$ nên có phương trình :

$$(x - 3) - (y + 2) - 4z = 0 \quad \text{hay} \quad x - y - 4z - 5 = 0.$$

b) Khoảng cách h giữa d_1 và d_2 bằng khoảng cách từ điểm M bất kì thuộc (P_1) tới (P_2). Lấy $M = (0 ; 1 ; 3)$, ta có $h = \dfrac{|-1 - 12 - 5|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 4^2}} = \dfrac{18}{\sqrt{18}} = 3\sqrt{2}.$

c) Gọi (α) là mặt phẳng đi qua d_1 và song song với Oz, (α) có phương trình :

$$x - 2y + 3 = 0 \quad (\text{vì } \overrightarrow{n_\alpha} = \left[\overrightarrow{u_1}, \vec{k}\right]).$$

Tương tự, mặt phẳng (β) đi qua d_2 và song song với Oz có phương trình :

$$x + y - 1 = 0 \quad (\text{vì } \overrightarrow{n_\beta} = \left[\overrightarrow{u_2}, \vec{k}\right]).$$

Dễ thấy giao tuyến của hai mặt phẳng (α) và (β) chính là đường thẳng Δ cần tìm. Nó có phương trình là

$$\begin{cases} x = \dfrac{-1}{3} \\ y = \dfrac{4}{3} \\ z = t. \end{cases}$$

86. a) Ta có $\overrightarrow{OA} = (1 ; 2 ; -1)$, $\overrightarrow{OB} = (-1 ; 1 ; 1)$, $\overrightarrow{OC} = (1 ; 0 ; 1)$

$\Rightarrow \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = 0$, $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC} = 0$, $\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OA} = 0$

$\Rightarrow OA \perp OB$, $OB \perp OC$, $OC \perp OA$.

b) Giả sử $S(x ; y ; z)$ là điểm thoả mãn điều kiện đầu bài. Ta có :

$$\overrightarrow{SA} = (1 - x ; 2 - y ; -1 - z),$$
$$\overrightarrow{SB} = (-1 - x ; 1 - y ; 1 - z),$$
$$\overrightarrow{SC} = (1 - x ; -y ; 1 - z).$$

Ta có : $\begin{cases} \overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB} = 0 \\ \overrightarrow{SB}.\overrightarrow{SC} = 0 \\ \overrightarrow{SC}.\overrightarrow{SA} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 3y = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - y - 2z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = z \\ x^2 + y^2 + z^2 - 3y = 0 \\ y = 2x \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \dfrac{2}{3}. \end{array}\right.$$

Khi $x = 0$ thì $y = z = 0$, điểm S trùng với điểm O.

Khi $x = \dfrac{2}{3}$ thì $y = z = \dfrac{4}{3}$, $S = \left(\dfrac{2}{3} ; \dfrac{4}{3} ; \dfrac{4}{3}\right)$ là điểm duy nhất khác O sao cho tứ diện $SABC$ là tứ diện vuông.

c) Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn AB, AC, ta có $M = \left(0 ; \dfrac{3}{2} ; 0\right)$, $N = (1 ; 1 ; 0)$, suy ra M, N đều thuộc mp(Oxy). Như vậy mp(Oxy) cắt tam giác ABC theo đường trung bình MN, do đó chia tam giác ABC thành hai phần : tam giác AMN và hình thang $MNCB$. Rõ ràng là tỉ số diện tích hai phần đó là 1 : 3.

d) Ta có $\overrightarrow{AB} = (-2 ; -1 ; 2)$, $\overrightarrow{AC} = (0 ; -2 ; 2)$.

Vì $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (2;4;4)$ nên mp(ABC) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}(1;2;2)$.

mp(Oxy) có vectơ pháp tuyến là $\vec{k} = (0 ; 0 ; 1)$.

Gọi φ là góc hợp bởi mp(ABC) và mp(Oxy) thì :

$$\cos\varphi = \frac{\left|\vec{n}.\vec{k}\right|}{\left|\vec{n}\right|.\left|\vec{k}\right|} = \frac{2}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{2}{3}.$$

87. a) Ta có vectơ chỉ phương của đường thẳng d là $\vec{u} = (2 ; -3 ; 2)$.

Mặt phẳng (P) vuông góc với d, do đó có dạng :

$$(P) : 2x - 3y + 2z + D = 0.$$

Mặt cầu (S) có tâm $I = (5 ; -1 ; -13)$ và bán kính $R = \sqrt{308}$, vì vậy (P) tiếp xúc với (S) khi và chỉ khi $d(I, (P)) = \sqrt{308}$

$$\Leftrightarrow \frac{|10 + 3 - 26 + D|}{\sqrt{4+9+4}} = \sqrt{308}$$

$$\Leftrightarrow |D - 13| = \sqrt{17.308} \Rightarrow D = 13 \pm \sqrt{5236}.$$

Tóm lại, có hai mp(P) thoả mãn yêu cầu đầu bài là

$$2x - 3y + 2z + 13 \pm \sqrt{5236} = 0.$$

b) Vectơ chỉ phương của d là $\vec{u} = (2 ; -3 ; 2)$.

Vectơ chỉ phương của d' là $\vec{u'} = (3 ; -2 ; 0)$.

Mặt phẳng (Q) cần tìm có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = \left[\vec{u}, \vec{u'}\right] = (4 ; 6 ; 5)$.

Vì vậy phương trình của mp(Q) có dạng : $4x + 6y + 5z + D = 0$.

Để (Q) tiếp xúc với (S), điều kiện là :

$$d(I, (Q)) = \sqrt{308} \Leftrightarrow \frac{|20 - 6 - 65 + D|}{\sqrt{16+36+25}} = \sqrt{308}$$

$$\Leftrightarrow |D - 51| = \sqrt{23716} = 154 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} D = -103 \\ D = 205. \end{array}\right.$$

Vậy có hai mặt phẳng (Q) cần tìm :

$$4x + 6y + 5z - 103 = 0,$$
$$4x + 6y + 5z + 205 = 0.$$

88. a) $d(O, (\alpha_m)) = \dfrac{20}{\sqrt{9m^2 + 25(1 - m^2) + 16m^2}} = \dfrac{20}{\sqrt{25}} = 4.$

b) Từ câu a) suy ra rằng : khi m thay đổi, các mặt phẳng (α_m) luôn tiếp xúc với mặt cầu cố định tâm O và bán kính bằng 4.

c) Mặt phẳng (α_m) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (3m\ ;\ 5\sqrt{1 - m^2}\ ;\ 4m)$, vì vậy (α_m) cắt mp(Oxz) (có vectơ pháp tuyến $\vec{j} = (0\ ;\ 1\ ;\ 0)$) khi và chỉ khi $m \neq 0$.

Khi đó, giao tuyến Δ_m của mp(α_m) và mp(Oxz) là giao tuyến của hai mặt phẳng :

$$3mx + 5\sqrt{1 - m^2}\,y + 4mz + 20 = 0 \text{ và } y = 0.$$

Do đó, vectơ chỉ phương của Δ_m là

$$\vec{u} = \left(\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5\sqrt{1 - m^2} & 4m \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 4m & 3m \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3m & 5\sqrt{1 - m^2} \end{vmatrix}\right) = (4m\ ;\ 0\ ;\ -3m).$$

Vì $m \neq 0$ nên $\vec{u'} = (4\ ;\ 0\ ;\ -3)$ là một vectơ chỉ phương của Δ_m.

Do $\vec{u'}$ không phụ thuộc vào m nên các giao tuyến Δ_m song song với nhau khi m thay đổi.