§4. Mặt nón, hình nón và khối nón

31. (h.75) Gọi V_1 là thể tích phần hình nón giữa đỉnh S và mp(P), V_2 là thể tích phần hình nón giữa hai mặt phẳng (P) và (Q), V_3 là thể tích phần hình nón giữa mặt phẳng (Q) và đáy hình nón đã cho. Khi ấy

$$\frac{V_1}{V_1 + V_2} = \left(\frac{R'}{x}\right)^3, \qquad (1)$$

$$\frac{V_1 + V_2 + V_3}{V_1 + V_2} = \left(\frac{R}{x}\right)^3 \qquad (2)$$

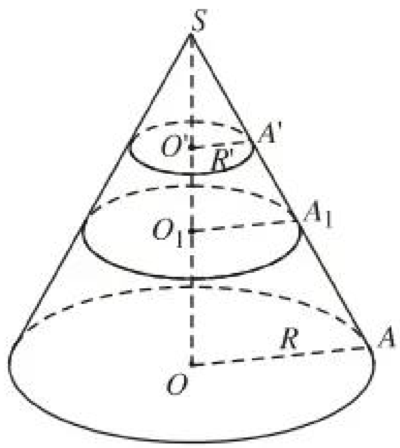
và $\quad V_3 = V_2. \qquad (3)$

Từ (2), (3) suy ra

$$\frac{V_1 + 2V_2}{V_1 + V_2} = \left(\frac{R}{x}\right)^3. \qquad (4)$$

Từ (1) và (4) ta có

$$\frac{2(V_1 + V_2)}{V_1 + V_2} = \frac{R^3 + R'^3}{x^3} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{R^3 + R'^3}{2}}.$$



Hình 75

32. (h.76)

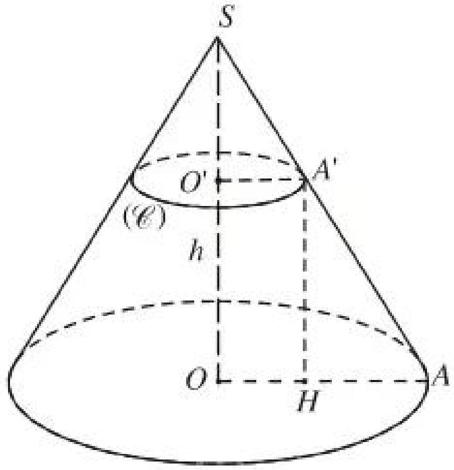
1) Gọi đường cao của hình nón là SO, một đường sinh của hình nón là SA thì $\widehat{SAO} = \alpha$.

Gọi O', A' lần lượt là giao của SO, SA với mp(P) và H là hình chiếu của A' trên OA thì

$$AH = A'H\cot\alpha = h\cot\alpha$$

và bán kính của đường tròn ($\mathscr{C}$) là

$$R' = O'A' = OA - HA = R - h\cot\alpha.$$



Hình 76

2) • Gọi S_1 là phần diện tích phải tìm, S_2 là phần diện tích xung quanh hình nón đỉnh S và đáy là ($\mathscr{C}$). Khi đó $S_1 = S - S_2$ (S là diện tích xung quanh của hình nón $\mathscr{N}$), tức là

$$S_1 = \pi R.SA - \pi R'.SA'$$
$$= \pi\left(R.\frac{R}{\cos\alpha} - R'.\frac{R'}{\cos\alpha}\right)$$
$$= \frac{\pi}{\cos\alpha}\left[R^2 - (R - h\cot\alpha)^2\right]$$
$$= \frac{\pi}{\cos\alpha}h.\cot\alpha(2R - h\cot\alpha) = \frac{\pi h}{\sin\alpha}(2R - h\cot\alpha).$$

• Gọi V_1 là phần thể tích cần tìm, V_2 là phần thể tích khối nón đỉnh S và đáy là đường tròn ($\mathscr{C}$). Khi đó

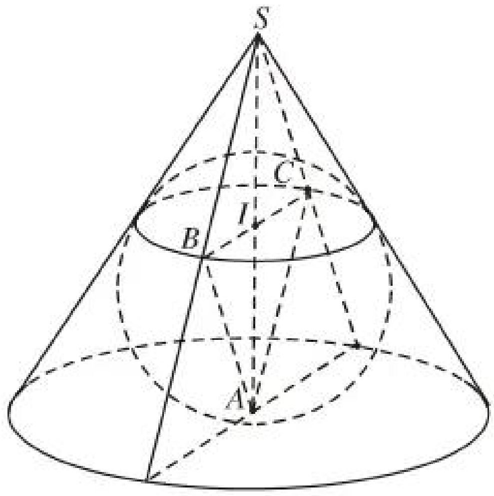
$$V_1 = V - V_2 \text{ (} V \text{ là thể tích hình nón đã cho)}$$
$$= \frac{1}{3}\pi R^2.SO - \frac{1}{3}\pi R'^2.SO'$$
$$= \frac{1}{3}\pi(R^2.R\tan\alpha - R'^2.R'\tan\alpha)$$
$$= \frac{1}{3}\pi\tan\alpha(R^3 - R'^3)$$
$$= \frac{1}{3}\pi\tan\alpha\left[R^3 - (R - h\cot\alpha)^3\right]$$
$$= \frac{\pi h}{3}(3R^2 - 3Rh\cot\alpha + h^2\cot^2\alpha).$$

33. (h.77a, b).

1) Gọi I là trung điểm của BC thì $AI \perp BC$. Do (P) là mặt phẳng chứa BC và vuông góc với mp(ABC) nên $AI \perp (P)$.

Mặt cầu chứa đường tròn $(\mathscr{C})$ và đi qua điểm A có tâm trùng với tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, có bán kính bằng bán kính của đường tròn này. Vậy bán kính mặt cầu là

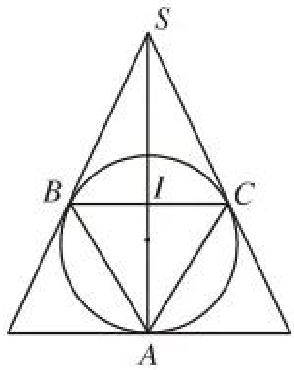
$$R = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$



Hình 77a

2) Hình nón thoả mãn các giả thiết đã nêu tiếp xúc với mặt cầu tại điểm A và đỉnh S của hình nón thuộc đường thẳng AI. Dễ thấy mp(ABC) cắt mặt cầu theo đường tròn lớn và cắt hình nón theo tam giác cân có cạnh đáy đi qua A và tam giác cân này ngoại tiếp đường tròn lớn đó. Vì tam giác ABC đều nên dễ thấy tam giác cân nói trên cũng đều, từ đó cạnh của tam giác này bằng $2a$, vậy đường cao của hình nón là $SA = a\sqrt{3}$. Khi ấy thể tích khối nón phải tìm là

$$V = \frac{1}{3}\pi a^2.a\sqrt{3} = \frac{\pi a^3\sqrt{3}}{3}.$$



Hình 77b

34. (h.78a, b)

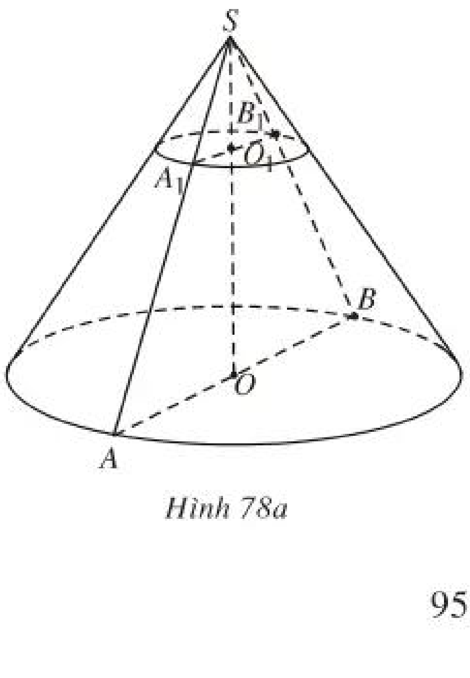
Gọi thiết diện thu được là AA_1B_1B.

Vì $SO_1 = \frac{1}{3}SO$ nên

$$A_1B_1 = \frac{1}{3}AB = \frac{1}{3}.2R.$$

Mặt khác $AB_1 \perp A_1B$ tại I nên

$$IO = \frac{1}{2}AB, IO_1 = \frac{1}{2}A_1B_1.$$



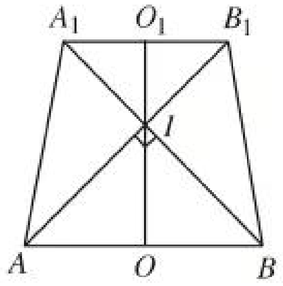
Hình 78a

Vậy $\quad OO_1 = R + \dfrac{R}{3} = \dfrac{4R}{3}$.

Dễ thấy $\quad SO_1 = \dfrac{1}{2}OO_1 = \dfrac{2R}{3}$.

Từ đó $\quad SO = 2R$.

Gọi thể tích phần hình nón phải tính là V^* thì $V^* = V_1 - V_2$, trong đó :



Hình 78b

V_1 là thể tích của hình nón $\mathscr{N}$,

V_2 là thể tích hình nón đỉnh S và đáy là thiết diện của $\mathscr{N}$ được cắt bởi (P).
Ta có thể tích phần hình nón phải tính là

$$V^* = V_1 - V_2 = \frac{1}{3}\pi.OB^2.SO - \frac{1}{3}\pi O_1B_1^2.SO_1$$

$$= \frac{1}{3}\pi\left(R^2.2R - \frac{R^2}{9}.\frac{2R}{3}\right) = \frac{52\pi R^3}{81}.$$

35. 1) (h.79a) Kí hiệu bán kính đáy hình nón là x, chiều cao hình nón là y $(0 < x \le R,\ 0 < y < 2R)$. Gọi SS' là đường kính của mặt cầu ngoại tiếp hình nón thì ta có

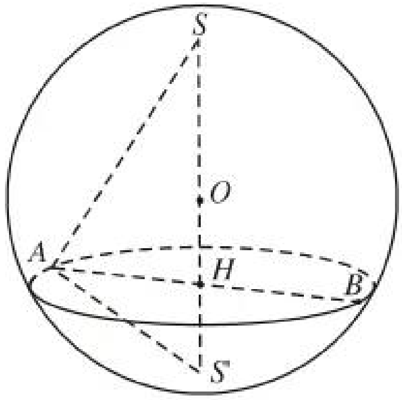
$$x^2 = y(2R - y).$$

Gọi V_1 là thể tích khối nón thì

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi x^2 y = \frac{1}{3}\pi y.y(2R - y)$$

$$= \frac{\pi}{6}(4R - 2y).y.y$$

$$\le \frac{\pi}{6}\left(\frac{4R - 2y + y + y}{3}\right)^3 = \frac{32\pi R^3}{81}.$$

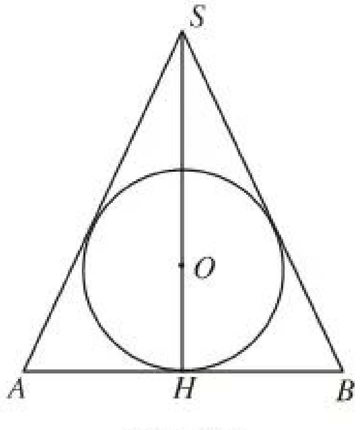


Hình 79a

Vậy thể tích V_1 đạt giá trị lớn nhất bằng $\dfrac{32\pi R^3}{81}$ khi và chỉ khi $4R - 2y = y$

$\Leftrightarrow y = \dfrac{4R}{3}$, từ đó $x^2 = \dfrac{4R}{3}\left(2R - \dfrac{4R}{3}\right) = \dfrac{8R^2}{9}$ hay $x = \dfrac{2R\sqrt{2}}{3}$.

2) Xét mặt phẳng chứa trục của hình nón, mặt phẳng này cắt hình nón theo tam giác cân SAB và cắt mặt cầu nội tiếp hình nón theo đường tròn bán kính r và hình tròn này nội tiếp tam giác cân SAB (h.79b)



Hình 79b

Kí hiệu bán kính đáy hình nón là x, chiều cao hình nón là y ($x > 0$, $y > 2r$) thì

$$(AH + SA)\,r = \frac{1}{2}AB.SH$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)r = xy \Leftrightarrow x^2 = \frac{r^2y}{y - 2r}.$$

Vậy thể tích hình nón ngoại tiếp mặt cầu bán kính r là

$$V_2 = \frac{1}{3}\pi x^2 y = \frac{1}{3}\pi r^2.\frac{y^2}{y - 2r}.$$

Ta có $\dfrac{y^2}{y - 2r} = \dfrac{y^2 - 4r^2 + 4r^2}{y - 2r} = y + 2r + \dfrac{4r^2}{y - 2r}$

$$= y - 2r + \frac{4r^2}{y - 2r} + 4r$$

$$\geq 2\sqrt{(y - 2r).\frac{4r^2}{y - 2r}} + 4r = 8r.$$

Từ đó $V_2 \geq \dfrac{1}{3}\pi.8r^3$, tức là V_2 đạt giá trị bé nhất khi và chỉ khi

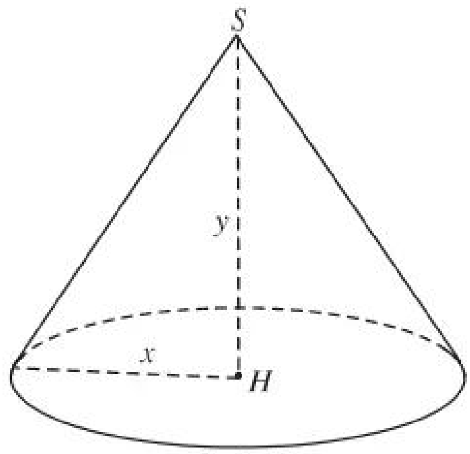
$$y - 2r = \frac{4r^2}{y - 2r} \Leftrightarrow y = 4r,$$

từ đó $x = r\sqrt{2}$.

36. (h.80)

Kí hiệu bán kính đáy và chiều cao hình nón lần lượt là x và y ($x, y > 0$). Khi đó, diện tích toàn phần của hình nón là

$\pi x\sqrt{x^2 + y^2} + \pi x^2$.



Hình 80

Theo giả thiết ta có

$$\pi x\sqrt{x^2+y^2}+\pi x^2=\pi a^2$$

$$\Leftrightarrow x\sqrt{x^2+y^2}+x^2=a^2$$

$$\Leftrightarrow x\sqrt{x^2+y^2}=a^2-x^2 \text{ (điều kiện } x<a)$$

$$\Leftrightarrow x^2(x^2+y^2)=a^4+x^4-2a^2x^2$$

$$\Leftrightarrow x^2y^2=a^4-2a^2x^2 \Leftrightarrow x^2=\frac{a^4}{y^2+2a^2}.$$

Khi đó thể tích khối nón là

$$V=\frac{1}{3}\pi\frac{a^4}{y^2+2a^2}.y=\frac{\pi a^4}{3}\cdot\frac{y}{y^2+2a^2}.$$

Từ đó V đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $\frac{y^2+2a^2}{y}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Ta có $\frac{y^2+2a^2}{y}=y+\frac{2a^2}{y}\geq 2\sqrt{y.\frac{2a^2}{y}}=2\sqrt{2}a.$

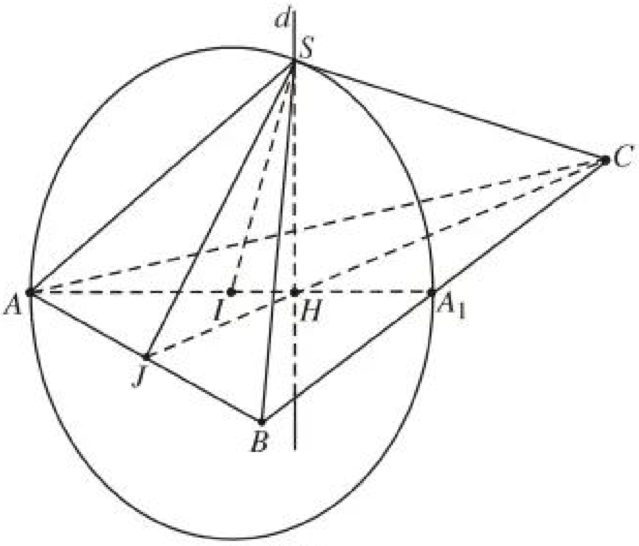
Vậy V đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $y=\frac{2a^2}{y}$, tức là $y=a\sqrt{2}$, lúc đó $x=\frac{a}{2}$.

37. (h.81)

1) Hình nón ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ có đỉnh là S, đáy là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, đường cao là SH, đường sinh là SC.

Gọi S_{xq} là diện tích xung quanh của hình nón thì $S_{xq}=\pi.HC.SC$.

Ta có $HC=\frac{a\sqrt{3}}{3}$,



Hình 81

$$SC^2=SH^2+HC^2=SH^2+\frac{a^2}{3}$$

$$=SI^2-IH^2+\frac{a^2}{3} \text{ (} I \text{ là trung điểm của } AA_1).$$

Vì S thuộc đường tròn đường kính AA_1 nên $SI = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$, ngoài ra

$$IH = AH - AI = \frac{a\sqrt{3}}{3} - \frac{a\sqrt{3}}{4} = \frac{a\sqrt{3}}{12}.$$

Vậy $\quad SC^2 = \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{4}\right)^2 - \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{12}\right)^2 + \dfrac{a^2}{3} = \dfrac{a^2}{2}$, tức là $SC = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $\quad S_{xq} = \pi.\dfrac{a\sqrt{3}}{3}.\dfrac{a\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\pi a^2\sqrt{6}}{6}.$

Gọi V là thể tích của hình nón nêu trên thì

$$V = \frac{1}{3}\pi.HC^2.\,SH = \frac{1}{3}\pi\frac{a^2}{3}\sqrt{SI^2 - IH^2}$$

$$= \frac{1}{9}\pi a^2.\sqrt{\frac{3a^2}{16} - \frac{3a^2}{12^2}} = \frac{1}{9}\pi.a^2.\frac{a\sqrt{6}}{6}$$

$$= \frac{\pi a^3\sqrt{6}}{54}.$$

2) • Gọi J là trung điểm của AB thì $CJ \perp AB$, do $SH \perp (ABC)$ nên $SJ \perp AB$. Vậy S thuộc mặt phẳng trung trực của AB. Mặt khác

$$SJ^2 = SH^2 + HJ^2 = SI^2 - IH^2 + HJ^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{12}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 = \frac{a^2}{4}.$$

Từ đó $JS = \dfrac{a}{2}$.

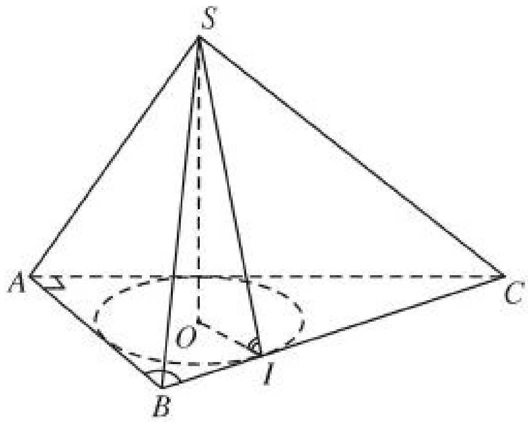
Vậy S thuộc đường tròn (Γ) tâm J, bán kính JS nằm trong mặt phẳng trung trực của AB. Dĩ nhiên đường tròn này cố định.

• Vì S nằm trên đường tròn (Γ) tâm J và AJ vuông góc với mặt phẳng chứa đường tròn này nên AS thuộc mặt nón nhận (Γ) làm đường tròn đáy và trục là AJ (đỉnh A). Tương tự, BS thuộc mặt nón có đáy là đường tròn (Γ), trục là BJ (đỉnh B).

38. (h.82)

1) Đáy hình nón trong bài toán là đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Đường cao hình nón là SO (S là đỉnh của hình chóp).

Gọi I là điểm tiếp xúc của BC với đường tròn nội tiếp ΔABC thì $OI \perp BC$ và $SI \perp BC$ nên $\widehat{SIO} = \beta$. Khi đó, chiều cao hình nón là



Hình 82

$$h = SO = OI\tan\beta = r\tan\beta,$$

độ dài đường sinh hình nón là

$$l = SI = \frac{OI}{\cos\beta} = \frac{r}{\cos\beta}.$$

Vậy diện tích xung quanh của hình nón là

$$S_1 = \pi r l = \pi r.\frac{r}{\cos\beta} = \frac{\pi r^2}{\cos\beta}.$$

Thể tích hình nón là

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2.r\tan\beta = \frac{1}{3}\pi r^3\tan\beta.$$

2) Dễ thấy ba đường cao của ba mặt bên hình chóp $S.ABC$ bằng nhau và cùng bằng SI.

Diện tích xung quanh của hình chóp là

$$S_2 = \frac{1}{2}(AB + AC + BC).SI.$$

Mặt khác $AC = AB\sqrt{3}$, $BC = 2AB$,

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB.AC = \frac{1}{2}AB^2\sqrt{3},$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}(AB + AC + BC).r = \frac{1}{2}\left(3 + \sqrt{3}\right).AB.r.$$

Từ đó $AB = \left(\sqrt{3} + 1\right)r$.

Vậy diện tích xung quanh của hình chóp $S.ABC$ là

$$S_2 = \frac{1}{2}\left(3 + \sqrt{3}\right)AB.SI = \frac{1}{2}\left(3 + \sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3} + 1\right)r.\frac{r}{\cos\beta}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt{3} + 1\right)^2\frac{r^2}{\cos\beta}.$$

Thể tích hình chóp $S.ABC$ là

$$V_2 = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}AB.AC.SO = \frac{\sqrt{3}}{6}AB^2.SO, \text{ từ đó}$$

$$V_2 = \frac{\sqrt{3}}{6}\left(\sqrt{3}+1\right)^2 r^2.r\tan\beta$$

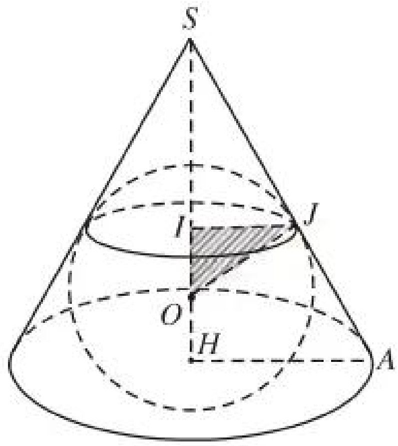
$$= \frac{\sqrt{3}}{6}\left(\sqrt{3}+1\right)^2 r^3\tan\beta.$$

39. (h.83) Kí hiệu bán kính đáy và chiều cao của hình nón lần lượt là x, y ($x, y > 0$), bán kính mặt cầu nội tiếp là r, dễ tính được

$$r = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}+x}.$$

Vì diện tích hình cầu bằng diện tích đáy hình nón nên ta có : $4\pi r^2 = \pi x^2 \Leftrightarrow x = 2r$, lúc đó

$$r = \frac{2ry}{\sqrt{y^2+4r^2}+2r} \Leftrightarrow r = \frac{3y}{8}.$$



Hình 83

Gọi IJ là bán kính của đường tròn ($\mathscr{C}$), nhờ $\Delta IJO \backsim \Delta HSA$, ta có $\frac{IJ}{SH} = \frac{OJ}{AS} \Leftrightarrow IJ = \frac{SH.OJ}{SA} = \frac{y.r}{\sqrt{y^2+x^2}}$. Thay $r = \frac{3y}{8}$, $x = 2r$ vào hệ thức trên, ta được

$$IJ = \frac{y.\frac{3y}{8}}{\sqrt{y^2+\frac{9y^2}{16}}} = \frac{3y}{10}.$$

Kí hiệu diện tích phần thứ nhất của mặt xung quanh hình nón (phần có chứa đỉnh của hình nón) là S_1 và diện tích xung quanh hình nón là S_{xq} thì

$$\frac{S_1}{S_{xq}} = \left(\frac{IJ}{HA}\right)^2 = \frac{\left(\frac{3y}{10}\right)^2}{4\left(\frac{3y}{8}\right)^2} = \frac{4}{25}.$$

Kí hiệu diện tích phần thứ hai của mặt xung quanh hình nón là S_2 thì

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{\frac{S_2}{S_1}} = \frac{1}{\frac{S_{xq} - S_1}{S_1}} = \frac{1}{\frac{25}{4} - 1} = \frac{4}{21}.$$

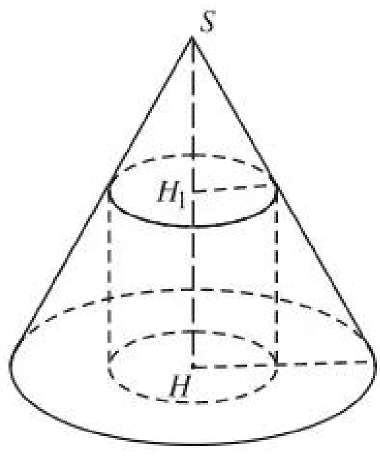
40. (h.84) Dễ thấy $\frac{r}{R} = \frac{SH_1}{SH} = \frac{SH_1}{4R} \Rightarrow SH_1 = 4r$ và $HH_1 = 4(R - r)$.

1) Diện tích toàn phần của hình trụ nội tiếp hình nón tính theo r, R là

$$S_{tp} = 2\pi r^2 + 2\pi r.4(R - r) = -6\pi r^2 + 8\pi Rr.$$

2) Vì chiều cao hình trụ là HH_1 được xác định bởi $HH_1 = 4(R - r)$ nên để tính bán kính đáy r và chiều cao h của hình trụ nội tiếp hình nón sao cho diện tích toàn phần của hình trụ đó đạt giá trị lớn nhất, chỉ cần tìm r để $S_{tp} = 2\pi(-3r^2 + 4Rr)$ đạt giá trị lớn nhất (với $r < R$). Khi coi r thay đổi thì $S'_{tp} = 2\pi(-6r + 4R)$, từ đó

$$S'_{tp} = 0 \Leftrightarrow r = \frac{2}{3}R.$$



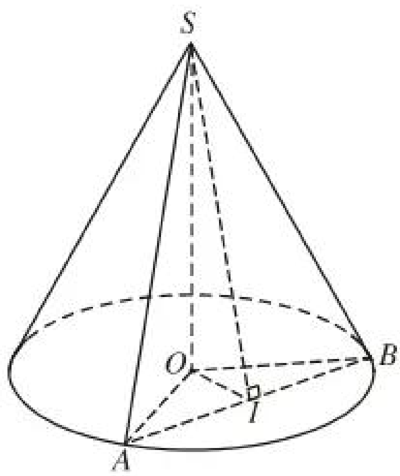
Hình 84

r	0		$\frac{2}{3}R$		R
S'_{tp}		+	0	–	
S_{tp}		↗		↘	

Vậy S_{tp} đạt giá trị lớn nhất khi $r = \frac{2}{3}R$.

Lúc đó $h = 4\left(R - \frac{2}{3}R\right) = \frac{4R}{3}$.

41. (h.85) Giả sử O là tâm của đáy hình nón và mặt phẳng (α) đi qua hai đường sinh SA, SB. Gọi I là trung điểm của AB thì $OI \perp AB$ và $SI \perp AB$, từ đó $\widehat{SIO} = \varphi$. Theo giả thiết $\varphi = \widehat{ISB}$.



Hình 85

Từ tam giác vuông SIO, ta có $\sin\varphi = \frac{SO}{SI}\cdot$ (1)

Từ tam giác vuông SIB, ta cũng có $\tan\varphi = \frac{IB}{SI}\cdot$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{\sin\varphi}{\tan\varphi} = \frac{SO}{IB} = \frac{SO}{\frac{k}{2}SO} = \frac{2}{k}\cdot$ Vậy $\cos\varphi = \frac{2}{k}\cdot$

42. (h.86) Gọi I là trung điểm của AB thì $OI \perp AB$, $SI \perp AB$, $OI = a$. Ta có

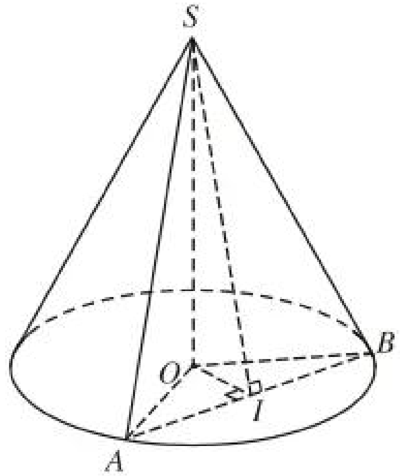
$$AO = SA\cos\widehat{SAO} = \frac{\sqrt{3}}{2}SA,$$

$$AI = SA\cos\widehat{SAI} = \frac{1}{2}SA.$$

Từ đó $\frac{AI}{AO} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Mặt khác $\frac{AI}{AO} = \cos\widehat{IAO}$

$$\Rightarrow \sin\widehat{IAO} = \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{a}{OA}\cdot$$

Vậy $OA = \frac{3a}{\sqrt{6}} = \frac{a\sqrt{6}}{2}\cdot$



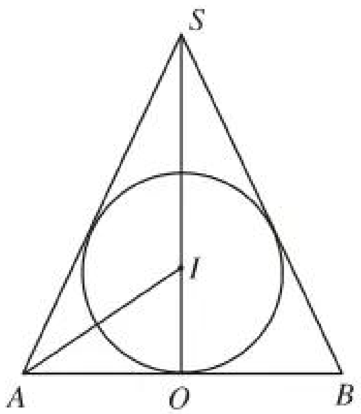
Hình 86

Xét tam giác SAO, ta có $SA = \frac{OA}{\cos 30^{\circ}} = \frac{a\sqrt{6}}{2}.\frac{2}{\sqrt{3}} = a\sqrt{2}$.

Từ đó diện tích xung quanh của hình nón đã cho là

$$S_{xq} = \pi.OA.SA = \pi.\frac{a\sqrt{6}}{2}.a\sqrt{2} = \pi a^2\sqrt{3}.$$

43. (h.87) Xét mp(P) qua trục SO của hình nón thì (P) cắt hình nón theo tam giác cân SAB, (P) cắt mặt cầu ngoại tiếp và nội tiếp hình nón theo các đường tròn lớn có bán kính lần lượt là R và r. Các đường tròn này ngoại tiếp và nội tiếp tam giác cân SAB. Kí hiệu V_1, V_2 là thể tích của các hình cầu đã nêu thì $\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{R}{r}\right)^3$.



Hình 87

Đặt $\widehat{SAB} = \alpha$ và gọi I là tâm đường tròn nội tiếp ΔSAB thì

$$2R = \frac{AB}{\sin \widehat{ASB}} = \frac{AB}{\sin 2\alpha} \text{ và } r = IO = \frac{AB}{2}\tan\frac{\alpha}{2}.$$

Từ đó $\dfrac{R}{r} = \dfrac{1}{\sin 2\alpha \tan\dfrac{\alpha}{2}}$. Mặt khác $\tan\alpha = \dfrac{SO}{AO} = 2$, vậy

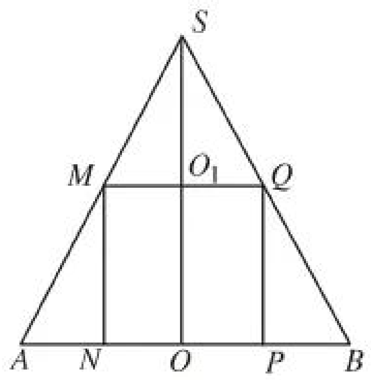
$$\sin 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha} = \frac{4}{5},\ 2 = \tan\alpha = \frac{2\tan\dfrac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\dfrac{\alpha}{2}}$$

$$\Rightarrow \tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \text{ (do } \tan\frac{\alpha}{2} > 0).$$

Như vậy $\dfrac{R}{r} = \dfrac{5\left(\sqrt{5}+1\right)}{8}$, tức là $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{125\left(\sqrt{5}+1\right)^3}{512} = \dfrac{125\left(\sqrt{5}+2\right)}{64}$.

44. (h.88)

• Xét mp(α) qua trục SO của hình nón thì (α) cắt hình nón theo tam giác cân SAB, (α) cắt mặt cầu đã cho theo đường tròn lớn ngoại tiếp tam giác SAB và (α) cắt hình trụ đã nêu theo thiết diện là hình vuông $MNPQ$ (hình vuông nội tiếp ΔSAB).



Hình 88

Đặt $\widehat{SAB} = \alpha$ thì $SA = SB = 2R\sin\alpha$ và $OB = SB\cos\alpha = R\sin 2\alpha$. Từ đó diện tích xung quanh của hình nón là

$S_{xq} = \pi R.\sin 2\alpha.2R\sin\alpha = 4\pi R^2\sin^2\alpha\cos\alpha = 4\pi R^2(1-\cos^2\alpha)\cos\alpha.$

Đặt $f(t) = (1-t^2)t$ với $0 < t = \cos\alpha < 1$.

Dễ thấy $f(t)$ đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $t = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \cos\alpha$

$\Leftrightarrow \tan\alpha = \sqrt{2}$. Khi ấy $\dfrac{SO}{OB} = \tan\alpha = \sqrt{2}$, tức là $SO = OB\sqrt{2}$. (*)

Vậy hình nón có đường cao và bán kính đáy thoả mãn điều kiện (*) nội tiếp mặt cầu đã cho có diện tích xung quanh lớn nhất.

• Dễ thấy $\frac{SO_1}{SO} = \frac{MQ}{AB} = \frac{x}{AB}$ (đặt $MQ = MN = x$).

Khi ấy $\frac{SO - x}{SO} = \frac{x}{AB} \Rightarrow SO - x = \frac{SO}{AB}.x = \frac{\sqrt{2}x}{2}$.

Từ đó $SO = \frac{x}{2}\left(2 + \sqrt{2}\right)$. (1)

Mặt khác $SO = OB\tan\alpha = R\sin 2\alpha.\tan\alpha = 2R\sin^2\alpha$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $x = \frac{4R\sin^2\alpha}{2 + \sqrt{2}} = \frac{4R.\frac{2}{3}}{2 + \sqrt{2}} = \frac{8R}{3\left(2 + \sqrt{2}\right)} = \frac{4}{3}R\left(2 - \sqrt{2}\right)$.

Vậy chiều cao của hình trụ phải tìm là $\frac{4R}{3}\left(2 - \sqrt{2}\right)$.