§4. Mặt nón, hình nón và khối nón

I - CÁC KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Mặt nón là hình tròn xoay sinh bởi đường thẳng l khi quay quanh đường thẳng Δ cắt l nhưng không vuông góc với l.

Cho điểm O nằm trên đường thẳng Δ. Mặt nón đỉnh O, trục Δ, góc ở đỉnh $2\alpha < 180^o$ là hình tạo bởi các đường thẳng đi qua O và hợp với Δ một góc bằng α.

2. Hình nón là hình tròn xoay sinh bởi ba cạnh của một tam giác cân khi quay quanh trục đối xứng của tam giác đó.

Diện tích xung quanh của hình nón bằng một nửa tích số của chu vi đáy và độ dài đường sinh.

Diện tích toàn phần của hình nón bằng tổng diện tích xung quanh và diện tích đáy.

3. Khối nón là hình nón cùng với phần bên trong của nó.

Khối nón là hình tròn xoay sinh bởi một hình tam giác vuông (kể cả phần trong) khi quay quanh đường thẳng chứa một cạnh góc vuông.

Thể tích khối nón bằng một phần ba tích số của diện tích đáy và chiều cao.

II - ĐỀ BÀI

31. Cho hình nón $\mathscr{N}$ có bán kính đáy bằng R, đường cao SO. Một mặt phẳng (P) cố định vuông góc với SO tại O', cắt hình nón $\mathscr{N}$ theo đường tròn có bán kính R'. Mặt phẳng (Q) thay đổi, vuông góc với SO tại điểm O_1 (O_1 nằm giữa O và O'), cắt hình nón theo thiết diện là hình tròn có bán kính x. Hãy tính x theo R và R' nếu (Q) chia phần hình nón nằm giữa (P) và đáy hình nón thành hai phần có thể tích bằng nhau.

32. Cho hình nón $\mathscr{N}$ có bán kính đáy là R, góc giữa đường sinh và đáy của hình nón bằng α. Một mặt phẳng (P) song song với đáy hình nón, cách đáy hình nón một khoảng h và cắt hình nón theo đường tròn $(\mathscr{C})$.

1) Tính bán kính đường tròn $(\mathscr{C})$ theo R, h, α.

2) Tính diện tích và thể tích phần hình nón nằm giữa đáy hình nón $\mathscr{N}$ và mặt phẳng (P).

33. Cho tam giác đều ABC cạnh a và (P) là mặt phẳng qua BC và vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi $(\mathscr{C})$ là đường tròn đường kính BC và nằm trong mp(P).

1) Tính bán kính mặt cầu đi qua đường tròn $(\mathscr{C})$ và điểm A.

2) Xét hình nón ngoại tiếp mặt cầu nói trên sao cho các tiếp điểm giữa hình nón và mặt cầu là đường tròn $(\mathscr{C})$. Tính thể tích của khối nón.

34. Cho hình nón $\mathscr{N}$ có bán kính đáy R, đường cao SO. Gọi (P) là mặt phẳng vuông góc với SO tại O_1 sao cho $SO_1 = \dfrac{1}{3}SO$. Một mặt phẳng qua trục hình nón cắt phần khối nón $\mathscr{N}$ nằm giữa (P) và đáy hình nón theo thiết diện là hình tứ giác có hai đường chéo vuông góc.

Tính thể tích phần hình nón $\mathscr{N}$ nằm giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng chứa đáy hình nón $\mathscr{N}$.

35. 1) Tìm hình nón có thể tích lớn nhất nội tiếp một mặt cầu bán kính R cho trước.

2) Tìm hình nón có thể tích nhỏ nhất ngoại tiếp mặt cầu bán kính r cho trước.

36. Tìm hình nón có thể tích lớn nhất khi diện tích toàn phần của nó bằng diện tích hình tròn bán kính a cho trước.

37. Cho hai điểm cố định A, B có $AB = a$. Với mỗi điểm C trong không gian sao cho ABC là tam giác đều, kí hiệu AA_1 là đường cao của ΔABC và d là trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Trong mặt phẳng chứa d và AA_1, xét đường tròn đường kính AA_1 ; gọi S là một giao điểm của đường tròn này và đường thẳng d.

1) Tính diện tích xung quanh và thể tích hình nón ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

2) Chứng minh rằng khi điểm C thay đổi thì điểm S thuộc một đường tròn cố định và mỗi đường thẳng SA, SB thuộc một mặt nón cố định.

38. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $\widehat{B} = 60^{\circ}$. Biết rằng có một hình nón nội tiếp hình chóp đã cho với bán kính đáy là r, góc giữa đường sinh và đáy hình nón là β.

1) Tính diện tích xung quanh và thể tích hình nón.

2) Tính diện tích xung quanh và thể tích hình chóp.

39. Gọi $(\mathscr{C})$ là đường tròn chứa các điểm tiếp xúc của mặt xung quanh hình nón với mặt cầu nội tiếp hình nón đó, $(\mathscr{C})$ chia mặt xung quanh của hình nón thành hai phần. Hãy tính tỉ số diện tích hai phần đó biết diện tích hình cầu bằng diện tích đáy hình nón.

40. Một hình nón có bán kính đáy R và chiều cao bằng $4R$.

1) Tính diện tích toàn phần của hình trụ nội tiếp hình nón, biết rằng bán kính đáy hình trụ bằng r. (Hình trụ được gọi là nội tiếp hình nón nếu một đường tròn đáy của hình trụ nằm trên mặt xung quanh của hình nón, đáy còn lại nằm trên mặt đáy của hình nón).

2) Tính bán kính đáy r và chiều cao h của hình trụ nội tiếp hình nón để diện tích toàn phần của hình trụ đạt giá trị lớn nhất.

41. Một mặt phẳng (α) đi qua hai đường sinh của hình nón, cắt mặt đáy hình nón theo một dây cung có độ dài gấp k lần đường cao hình nón. Tính góc φ giữa mặt phẳng (α) và mặt đáy hình nón nếu φ bằng nửa góc tạo bởi hai đường sinh của hình nón nằm trên mp(α).

42. Cho hình nón đỉnh S, đường cao SO. Gọi A và B là hai điểm thuộc đường tròn đáy của hình nón sao cho khoảng cách từ O đến AB bằng a và $\widehat{SAO} = 30^{\circ}$, $\widehat{SAB} = 60^{\circ}$. Tính diện tích xung quanh hình nón.

43. Đường cao của hình nón gấp hai lần bán kính đáy của nó. Tính tỉ số thể tích của hình cầu ngoại tiếp và nội tiếp hình nón đó.

44. Trong tất cả các hình nón nội tiếp hình cầu bán kính R, tìm hình nón có diện tích xung quanh lớn nhất.

Với hình nón ấy, xét hình trụ nội tiếp hình nón. Tìm chiều cao của hình trụ đó, biết rằng thiết diện qua trục của hình trụ là hình vuông.