## §4. Thể tích của khối đa diện

**22.** Giả sử $\mathscr{H}$ là khối hộp có tâm $I$ và $(\alpha)$ là mặt phẳng không đi qua $I$. Ta phải chứng minh rằng $(\alpha)$ chia $\mathscr{H}$ thành hai khối đa diện $\mathcal{H}_1$ và $\mathcal{H}_2$ có thể tích không bằng nhau.

Ta gọi $(\alpha')$ là mặt phẳng đi qua $I$ và song song với $(\alpha)$. Khi đó, $(\alpha')$ chia $\mathscr{H}$ thành hai khối đa diện $\mathcal{H}'_1$ và $\mathcal{H}'_2$. Vì $I$ là tâm của $\mathscr{H}$ nên phép đối xứng tâm $I$ biến $\mathcal{H}'_1$ thành $\mathcal{H}'_2$. Vậy hai khối đa diện $\mathcal{H}'_1$ và $\mathcal{H}'_2$ có thể tích bằng nhau và bằng $\dfrac{V}{2}$, trong đó $V$ là thể tích của $\mathscr{H}$.

Cố nhiên phần của $\mathscr{H}$ nằm giữa hai mặt phẳng song song $(\alpha)$ và $(\alpha')$ có thể tích khác 0 nên thể tích của $\mathcal{H}_1$ và $\mathcal{H}_2$ không thể bằng nhau.

**23.** (h.6)

a) $AB \parallel A_1B_1 \Rightarrow AB \parallel (A_1B_1D)$

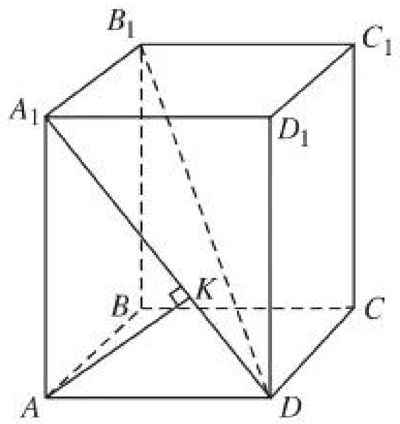
$\Rightarrow d(A,(A_1B_1D)) = d(AB, A_1D)$.

Ta có $A_1B_1 \perp (AA_1D_1D)$

$\Rightarrow A_1B_1 \perp AK$.

Mặt khác $A_1D \perp AK$, suy ra $AK \perp (A_1B_1D)$.

Vậy $AK = d(A,(A_1B_1D)) = d(AB, A_1D) = 2$.



*Hình 6*

b) Xét tam giác vuông $A_1AD$, ta có :

$$AK^2 = A_1K.KD.$$

Đặt $A_1K = x \Rightarrow 4 = x(5 - x) \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow x = 1$ hoặc $x = 4$.

Với $x = 1$, $AD = \sqrt{AK^2 + KD^2} = 2\sqrt{5}$, $AA_1 = \sqrt{A_1D^2 - AD^2} = \sqrt{5}$.

Khi đó $V_{ABCD.A_1B_1C_1D_1} = 20\sqrt{5}$.

Với $x = 4$, tương tự ta có : $V_{ABCD.A_1B_1C_1D_1} = 10\sqrt{5}$.

**24.** (h.7) Giả sử $CK = x$, ở đây $AK$ là đường cao của tam giác đều $ABC$.

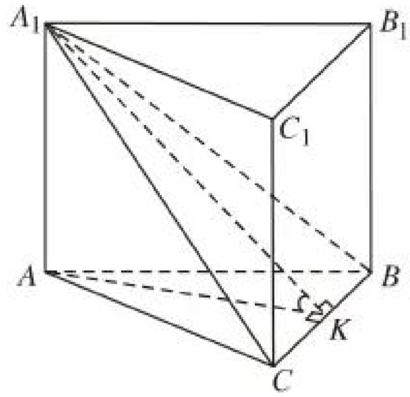
Từ định lí ba đường vuông góc, ta có $A_1K \perp BC$. Từ đó $\widehat{AKA_1} = 30^\circ$.

Xét tam giác vuông $A_1AK$, ta có

$A_1K = AK : \cos 30^\circ = \dfrac{2AK}{\sqrt{3}}$,

mà $AK = \dfrac{2x\sqrt{3}}{2} = x\sqrt{3}$ nên $A_1K = 2x$,

$A_1A = AK \tan 30^\circ = x\sqrt{3}.\dfrac{\sqrt{3}}{3} = x$.



*Hình 7*

Vậy $V_{ABC.A_1B_1C_1} = CK.AK.AA_1 = x^3\sqrt{3}$.

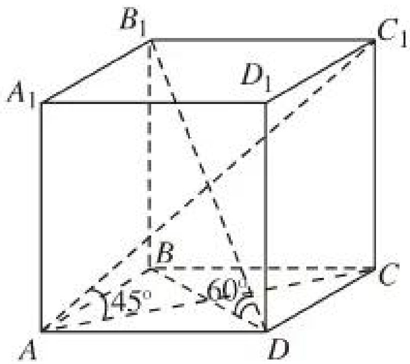
Nhưng $S_{A_1BC} = CK.A_1K = 8$ nên $x.2x = 8 \Rightarrow x = 2$.

Vậy $V_{ABC.A_1B_1C_1} = 8\sqrt{3}$.

**25.** (h.8)

Hình lăng trụ đã cho là hình lăng trụ đứng nên các cạnh bên vuông góc với đáy và độ dài cạnh bên bằng chiều cao của hình lăng trụ. Từ giả thiết ta suy ra :

$$\widehat{C_1AC} = 45^\circ,\ \widehat{B_1DB} = 60^\circ.$$



*Hình 8*

Từ đó suy ra

$$AC = CC_1 = 2,\ BD = 2\cot 60^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Áp dụng định lí hàm số côsin ta có :

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB.AD.\cos 45^\circ,$$

$$AC^2 = DC^2 + AD^2 - 2DC.\ AD\cos 135^\circ.$$

Từ đó ta có : $BD^2 - AC^2 = -AB.AD\sqrt{2} + DC.AD.\left(-\sqrt{2}\right) = -2\sqrt{2}AB.AD$

$$\Rightarrow \frac{4}{3} - 4 = -2\sqrt{2}AB.AD \Rightarrow AB.AD = \frac{8}{3.2\sqrt{2}} = \frac{4}{3\sqrt{2}}.$$

$$V_{ABCD.A_1B_1C_1D_1} = AB.AD\sin 45^\circ.AA_1 = \frac{4}{3\sqrt{2}}.\frac{\sqrt{2}}{2}.2 = \frac{4}{3}.$$

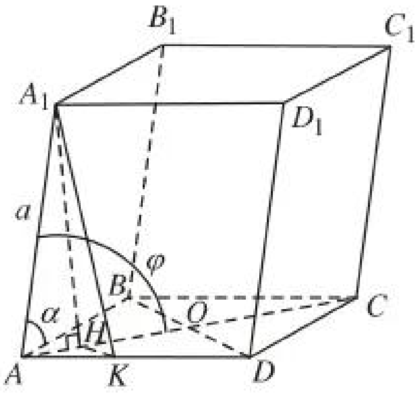
**26.** (h.9) Hạ $A_1H \perp AC$ ($H \in AC$) (*).

Tam giác $A_1BD$ cân (do $A_1B = A_1D$) suy ra $BD \perp A_1O$. Mặt khác $BD \perp AC$ $\Rightarrow BD \perp \left(A_1AO\right) \Rightarrow BD \perp A_1H$ (**).

Từ (*) và (**) $\Rightarrow A_1H \perp (ABCD)$.

Đặt $\widehat{A_1AO} = \varphi$. Ta có hệ thức :

$$\cos\alpha = \cos\varphi.\cos\frac{\alpha}{2}.$$



*Hình 9*

Thật vậy, hạ $A_1K \perp AD \Rightarrow HK \perp AK$ (định lí ba đường vuông góc)

$$\Rightarrow \cos\varphi.\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{AH}{AA_1}.\frac{AK}{AH} = \frac{AK}{AA_1} = \cos\alpha.$$

Từ đẳng thức trên ta suy ra : $\cos\varphi = \dfrac{\cos\alpha}{\cos\dfrac{\alpha}{2}}$. Do đó

$$A_1H = a\sin\varphi = a\sqrt{1 - \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}} = \frac{a}{\cos\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \cos^2\alpha}.$$

$$V_{ABCD.A_1B_1C_1D_1} = AB.AD.\sin\alpha.A_1H = a^2\sin\alpha.\frac{a}{\cos\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \cos^2\alpha}$$

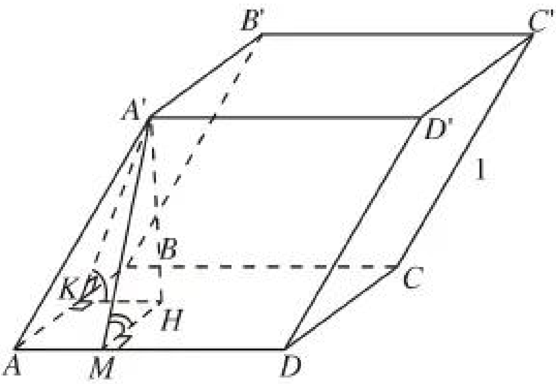
$$= 2a^3\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \cos^2\alpha}.$$

**27.** (h.10) Kẻ $A'H \perp (ABCD)$ $(H \in (ABCD))$, $HM \perp AD$ $(M \in AD)$, $HK \perp AB$ $(K \in AB)$. Theo định lí ba đường vuông góc, ta có $AD \perp A'M$, $AB \perp A'K$

$\Rightarrow \widehat{A'MH} = 60^{\circ}$, $\widehat{A'KH} = 45^{\circ}$.

Đặt $A'H = x$. Khi đó

$$A'M = x : \sin 60^{\circ} = \frac{2x}{\sqrt{3}},$$



*Hình 10*

$$AM = \sqrt{AA'^2 - A'M^2} = \sqrt{\frac{3 - 4x^2}{3}} = HK,$$

nhưng $HK = x\cot 45^{\circ} = x$,

suy ra $x = \sqrt{\frac{3 - 4x^2}{3}} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{3}{7}}$.

Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'} = AD.AB.x = \sqrt{7}.\sqrt{3}.\sqrt{\frac{3}{7}} = 3.$

**28.** (h.11) Ta dựng khối hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$.

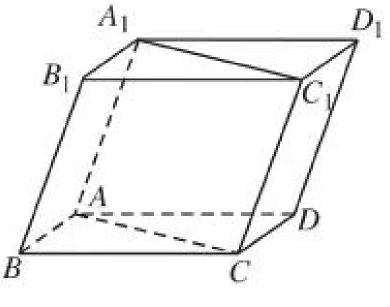
Khi đó :

$$V_{ABC.A_1B_1C_1} = \frac{1}{2}V_{ABCD.A_1B_1C_1D_1}.$$

Mặt khác :

$$V_{ABCD.A_1B_1C_1D_1} = S_{ABB_1A_1}.h,$$

ở đây $h = d((CDD_1C_1),(ABB_1A_1))$
$= d(CC_1,(ABB_1A_1)) = 7$



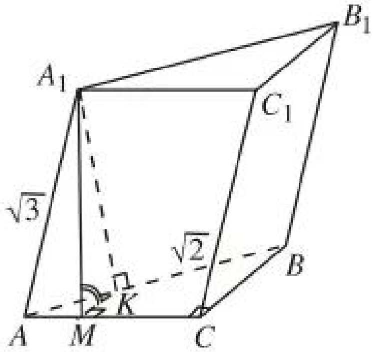
*Hình 11*

và $S_{ABB_1A_1} = 4$.

Vậy $V_{ABC.A_1B_1C_1} = \frac{1}{2}.4.7 = 14$.

**29.** (h.12)

Hạ $A_1K \perp AB$ (với $K \in AB$) thì $A_1K \perp (ABC)$. Vì $\widehat{A_1AB}$ nhọn nên $K$ thuộc tia $AB$.



*Hình 12*

Kẻ $KM \perp AC$ thì $A_1M \perp AC$ (định lí ba đường vuông góc), do đó $\widehat{A_1MK} = 60^o$,

Giả sử $A_1K = x$, ta có

$AK = \sqrt{A_1A^2 - A_1K^2} = \sqrt{3 - x^2}$,

$MK = AK \sin \widehat{KAM} = \sqrt{3 - x^2}.\sin 45^o = \frac{\sqrt{2}}{2}.\sqrt{3 - x^2}$.

Mặt khác, $MK = A_1K.\cot 60^o = \frac{x}{\sqrt{3}}$, suy ra

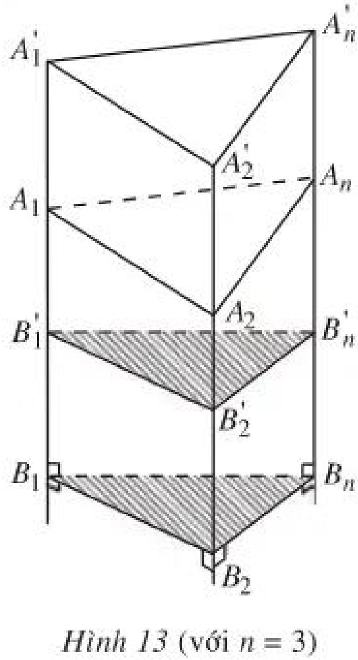
$$\frac{\sqrt{2.(3 - x^2)}}{2} = \frac{x}{\sqrt{3}} \Rightarrow x = \frac{3}{\sqrt{5}}.$$

Vậy $V_{ABC.A_1B_1C_1} = S_{ABC}.A_1K = \frac{1}{2}AC.CB.A_1K = \frac{3\sqrt{5}}{10}$.

**30.** *Cách 1.* (h.13)

Giả sử khối lăng trụ $A_1A_2...A_n.A_1'A_2'...A_n'$ có thiết diện thẳng là $B_1B_2\ldots B_n$. Ta có thể lấy $B_1, B_2, ..., B_n$ sao cho các đoạn thẳng $B_1A_1, B_2A_2, ..., B_nA_n$ đều lớn hơn $A_1A_1'$.

Tịnh tiến khối đa diện $B_1B_2\ldots B_n.A_1A_2\ldots A_n$ theo vectơ $\vec{v} = \overrightarrow{A_1A_1'}$, ta được khối đa diện $B_1'B_2'...B_n'.A_1'A_2'...A_n'$. Hai khối này rõ ràng có thể tích bằng nhau (do chúng bằng nhau) và có phần chung là khối đa



*Hình 13* (với $n = 3$)

diện $A_1A_2...A_n.B_1'B_2'...B_n'$. Do đó, thể tích khối lăng trụ $A_1A_2...A_n.A_1'A_2'...A_n'$ bằng thể tích khối lăng trụ đứng $B_1B_2...B_n.B_1'B_2'...B_n'$.

Vậy nếu gọi $V$ là thể tích của khối lăng trụ đã cho thì

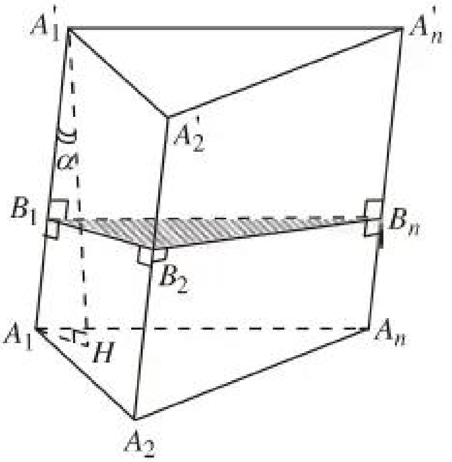
$$V = S_{B_1B_2...B_n}.B_1B_1' = S_{B_1B_2...B_n}.A_1A_1'$$

$$(B_1B_1' = A_1A_1' \text{ vì } \overrightarrow{B_1B_1'} = \overrightarrow{A_1A_1'} = \vec{v}).$$

*Cách 2*. (h.14)

Hạ $A_1'H \perp (A_1A_2...A_n)$ thì $A_1'H$ bằng chiều cao $h$ của khối lăng trụ.

Khi đó góc giữa mặt phẳng chứa thiết diện thẳng $B_1B_2\ldots B_n$ và mặt phẳng đáy của khối lăng trụ bằng góc giữa hai đường thẳng $A_1A_1'$ và $A_1'H$. Gọi góc này là $\alpha$ thì $h = A_1'H = A_1A_1'\cos\alpha$.



*Hình 14* (với $n = 3$)

Ta có thiết diện thẳng $B_1B_2\ldots B_n$ là hình chiếu của đa giác đáy $A_1A_2\ldots A_n$ trên mp$(B_1B_2...B_n)$. Vậy thể tích của khối lăng trụ là :

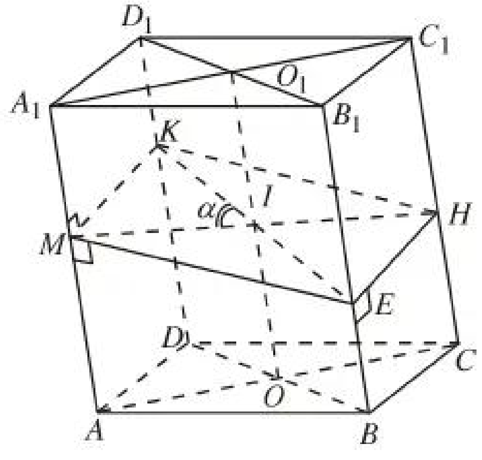
$$V = S_{A_1A_2...A_n}.A_1'H = \frac{S_{B_1B_2...B_n}}{\cos\alpha}.A_1A_1'\cos\alpha$$

$$= S_{B_1B_2...B_n}.A_1A_1' \text{ (đpcm).}$$

**31.** (h.15) Giả sử hình hộp đã cho là $ABCD.A_1B_1C_1D_1$.

Gọi $OO_1$ là giao tuyến của hai mặt chéo. Trong hai mặt chéo $(A_1C_1CA)$ và $(B_1D_1DB)$, qua điểm $I \in OO_1$, ta lần lượt kẻ hai đường thẳng $KE$ và $MH$ đều vuông góc với $OO_1$. Khi đó $\alpha = (MH, KE)$ và $MEHK$ là thiết diện thẳng của khối hộp. Đặt $KE = x$, $MH = y$ thì

$$S_{MEHK} = \frac{1}{2}xy\sin\alpha.$$



*Hình 15*

Áp dụng kết quả của bài tập 30, ta có

$$V_{\text{hộp}} = S_{MKHE}.AA_1 = \frac{1}{2}xy\sin\alpha.a.$$

Nhưng $xa = S_1$, $ya = S_2$ suy ra $x = \frac{S_1}{a}$, $y = \frac{S_2}{a} \Rightarrow xy = \frac{S_1S_2}{a^2}$.

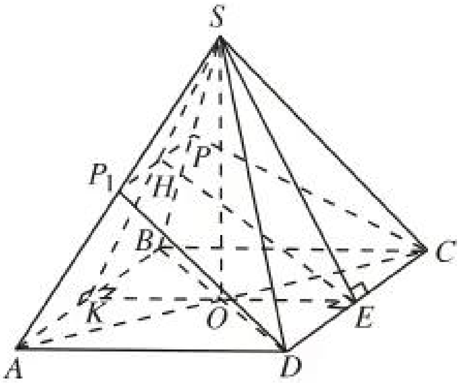
Vậy $V_{\text{hộp}} = \frac{S_1S_2\sin\alpha}{2a}$.

**32.** (h.16)

Giả sử $SK$ và $SE$ là hai trung đoạn của khối chóp.

Vì $CD$ // $AB$ nên giao tuyến $\Delta$ của hai mặt phẳng $(SCD)$ và $(SAB)$ song song với $CD$ và $AB$.

Ta có $SE \perp CD$ ; $SK \perp AB \Rightarrow SE \perp \Delta$, $SK \perp \Delta \Rightarrow \widehat{KSE}$ bằng góc giữa hai mặt phẳng $(SCD)$ và $(SAB)$. Vậy $\widehat{KSE} = 60^\circ$.



*Hình 16*

Do $CD$ // $AB$ nên giao tuyến $P_1P$ của $(\alpha)$ và $(SAB)$ song song với $CD$ và $AB$. Từ đó dễ thấy tứ giác $CDP_1P$ là hình thang cân và $EH$ là đường cao của nó ($H = SK \cap P_1P$).

Ta có $EH \perp P_1P$, mà $P_1P = (\alpha) \cap (SAB)$, $(\alpha) \perp (SAB)$ nên suy ra $EH \perp (SAB) \Rightarrow EH \perp SH$. Mặt khác $SH \perp P_1P \Rightarrow SH \perp (CDP_1P)$ nên $SH$ là đường cao của hình chóp $S.CDP_1P$. Tam giác $SKE$ cân đỉnh $S$ và có góc ở đỉnh bằng $60^\circ$ nên nó là tam giác đều. Vậy $H$ là trung điểm của $SK$, suy ra

$$PP_1 = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}KE = \frac{1}{2}SE = \frac{1}{2}.6 = 3.$$

Ta có

$$V_{S.CDP_1P} = \frac{1}{3}S_{CDP_1P}.SH = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}(CD + P_1P).EH.SH$$

$$= \frac{1}{6}(6+3)\frac{6\sqrt{3}}{2}.3 = \frac{27}{2}\sqrt{3}.$$

**33.** (h.17)

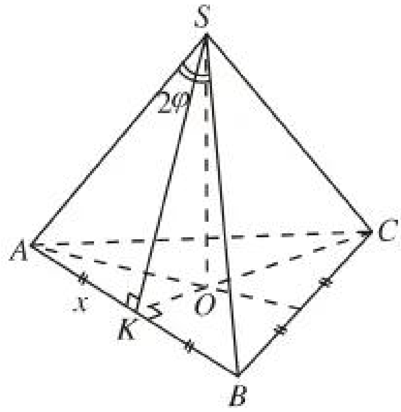
Giả sử $O$ là tâm của tam giác đều $ABC$. Khi đó $SO \perp (ABC)$ và $SO = h$.

Gọi $K$ là trung điểm của $AB$. Đặt $AK = x$.

Khi đó $SK = x\cot\varphi$, $OK = x\tan 30^{\circ} = \dfrac{x}{\sqrt{3}}$.

$$h^2 = SK^2 - OK^2 = \frac{x^2}{3}(3\cot^2\varphi - 1)$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{3h^2}{3\cot^2\varphi - 1},$$

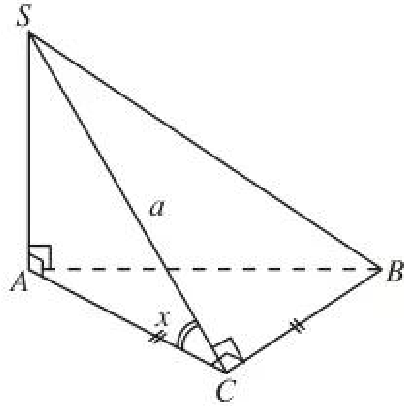


*Hình 17*

Ta có $S_{ABC} = \dfrac{AB^2 \sin 60^{\circ}}{2} = x^2\sqrt{3}$, suy ra

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}S_{ABC}.h = \frac{x^2\sqrt{3}}{3}h = \frac{h^3\sqrt{3}}{3\cot^2\varphi - 1}.$$

**34.** (h.18) Ta có $BC \perp AC$ nên $BC \perp SC$ (định lí ba đường vuông góc), suy ra góc $SCA$ là góc giữa hai mặt phẳng $(SCB)$ và $(ABC)$. Đặt $\widehat{SCA} = x \left(0 < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$.



*Hình 18*

Khi đó : $SA = a\sin x$, $AC = a\cos x$.

$$V_{S.ABC} = \frac{a\sin x}{3}.\frac{a^2\cos^2 x}{2} = \frac{a^3}{6}\sin x.\cos^2 x.$$

Xét hàm số $y(x) = \sin x\cos^2 x$.

Ta có $y'(x) = \cos^3 x - 2\cos x.\sin^2 x = \cos x(\cos^2 x - 2 + 2\cos^2 x) =$

$$= \cos x(3\cos^2 x - 2) = 3\cos x\left(\cos x - \sqrt{\frac{2}{3}}\right)\left(\cos x + \sqrt{\frac{2}{3}}\right).$$

Vì $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ nên $\cos x\left(\cos x + \sqrt{\dfrac{2}{3}}\right) > 0$.

Gọi $\alpha$ là góc sao cho $\cos\alpha = \sqrt{\dfrac{2}{3}}, 0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$.

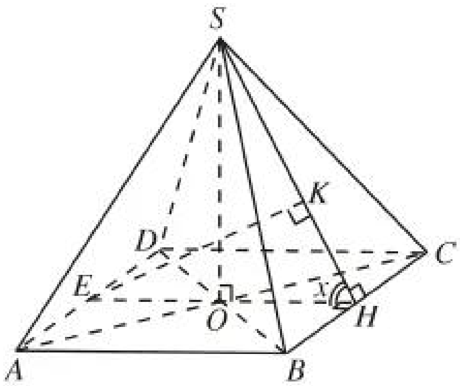
Ta có bảng biến thiên của hàm $y(x) = \sin x.\cos^2 x$ :

| $x$ | $0$ | | $\alpha$ | | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $y(x)$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | |

Vậy $V_{S.ABC}$ đạt giá trị lớn nhất khi $x = \alpha$ với $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ và $\cos\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

**35.** (h.19) Giả sử $O$ là tâm của hình vuông $ABCD$. Khi đó $SO \perp (ABCD)$. Gọi $EH$ là đường trung bình của hình vuông $ABCD$ ($E \in AD$, $H \in BC$). Vì $AD \,//\, BC$ nên $AD \,//\, (SBC)$, do đó

$$d(A,(SBC)) = d(E,(SBC)).$$



*Hình 19*

Kẻ $EK \perp SH$. Dễ thấy $EK \perp (SBC)$ suy ra $EK = d\left(A,(SBC)\right) = 2a.$

Ta có $BC \perp SH$, $BC \perp OH \Rightarrow \widehat{SHO}$ là góc giữa mặt bên $(SBC)$ và mặt phẳng đáy. Đặt $\widehat{SHO} = x\left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$. Khi đó :

$$EH = \frac{2a}{\sin x}, OH = \frac{a}{\sin x},\ SO = \frac{a}{\sin x}\tan x = \frac{a}{\cos x}.$$

Vậy : $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SO = \frac{4a^3}{3\cos x\sin^2 x}$.

Từ đó $V_{S.ABCD}$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $y(x) = \cos x.\sin^2 x$ đạt giá trị lớn nhất. Ta có

$$y'(x) = -\sin^3 x + 2\sin x\cos^2 x = \sin x(2\cos^2 x - \sin^2 x)$$

$$= \sin x(2 - 3\sin^2 x) = 3\sin x\left(\sqrt{\frac{2}{3}} - \sin x\right)\left(\sqrt{\frac{2}{3}} + \sin x\right).$$

Vì $0 < x < \frac{\pi}{2}$ nên $\sin x\left(\sqrt{\frac{2}{3}} + \sin x\right) > 0$.

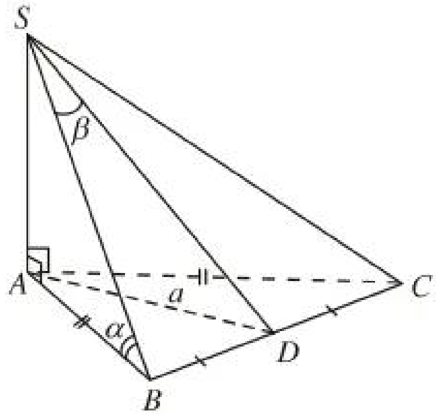
Gọi $\alpha$ là góc sao cho $\sin\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}},\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y(x) = \cos x.\sin^2 x$ :

| $x$ | $0$ | | $\alpha$ | | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $y(x)$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | |

Vậy $V_{S.ABCD}$ đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow x = \alpha$ với $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ và $\sin\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

**36.** (h.20)




*Hình 20*

$AB$ là hình chiếu của $SB$ trên mp$(ABC)$ nên $\widehat{SBA} = \alpha$. Dễ thấy $BD \perp (SAD)$ nên hình chiếu của $SB$ trên mp$(SAD)$ là $SD$ $\Rightarrow \widehat{BSD} = \beta$.

Do $SAB$ và $SDB$ là các tam giác vuông nên ta có $SB = \frac{BD}{\sin\beta}$, $SB = \frac{AB}{\cos\alpha}$, suy ra

$$\frac{AB^2}{\cos^2\alpha} = \frac{BD^2}{\sin^2\beta} = \frac{AB^2 - BD^2}{\cos^2\alpha - \sin^2\beta} = \frac{a^2}{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}$$

$$\Rightarrow BD = \frac{a\sin\beta}{\sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}},$$

$$SD = BD\cot\beta = \frac{a\cos\beta}{\sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}},$$

$$SA = \sqrt{SD^2 - AD^2} = \frac{a\sin\alpha}{\sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}}.$$

Vậy : $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}S_{ABC}.SA$

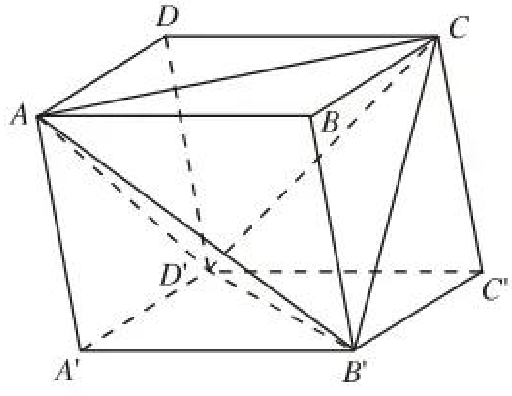
$$= \frac{1}{3}.a.\frac{a\sin\beta}{\sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}}.\frac{a\sin\alpha}{\sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}}$$

$$= \frac{a^3\sin\alpha.\sin\beta}{3(\cos^2\alpha - \sin^2\beta)}.$$

**37.** (h.21) Ta có

$V_{ACB'D'} = V - (V_{A.A'B'D'} + V_{C.C'B'D'} + V_{B'.ABC} + V_{D'.ACD})$

Các khối chóp $A.A'B'D'$, $C.C'B'D'$, $B'.ABC$ và $D'.ACD$ có diện tích đáy bằng một nửa diện tích đáy của khối hộp và đều có chiều cao bằng chiều cao của khối hộp nên chúng có thể tích bằng nhau và cụ thể, mỗi khối đó có thể tích bằng $\frac{1}{6}V$.



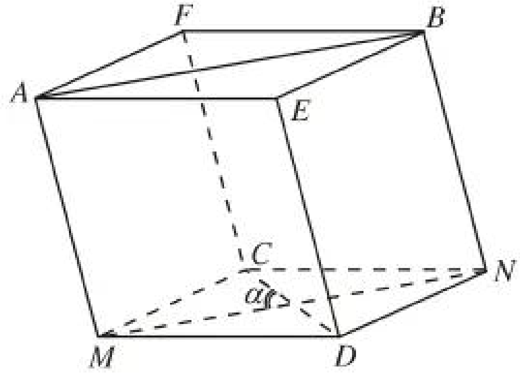
*Hình 21*

Vậy : $V_{ACB'D'} = V - 4.\frac{1}{6}V = \frac{1}{3}V$.

**38.** *Cách 1.*

Dựng hình hộp $AEBF.MDNC$ (gọi là hình hộp ngoại tiếp tứ diện $ABCD$) (h.22).

Vì $(AEBF) \parallel (MDNC)$ nên chiều cao của hình hộp bằng khoảng cách $d$ giữa $AB$ và $CD$.



*Hình 22*

Theo bài 37 ta có :

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3}V_{\text{hộp}} = \frac{1}{3}S_{MDNC}.d$$

$$= \frac{1}{3}.\frac{1}{2}MN.CD\sin\alpha.d = \frac{1}{6}AB.CD.d\sin\alpha.$$

*Cách 2.* (h.23)

Dựng hình bình hành $ABCE$. Khi đó :

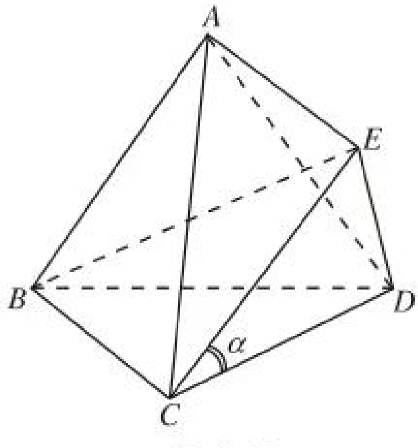
$V_{A.BCD} = V_{E.BCD}$ (do $AE \parallel (BCD)$) (1)

$V_{E.BCD} = V_{B.ECD}$ (2)

$V_{B.ECD} = \frac{1}{3}S_{ECD}.d\left(B,(CDE)\right)$ (3)

$S_{ECD} = \frac{1}{2}CE.CD.\sin\widehat{ECD}$

$= \frac{1}{2}AB.CD\sin\alpha$ (4)



*Hình 23*

$d(B,(CDE)) = d(AB,CD)$ (do $AB \parallel (CDE)$). (5)

Từ (1), (2), (3), (4), (5) suy ra :

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}AB.CD.d\sin\alpha.$$

**39.** (h.24)

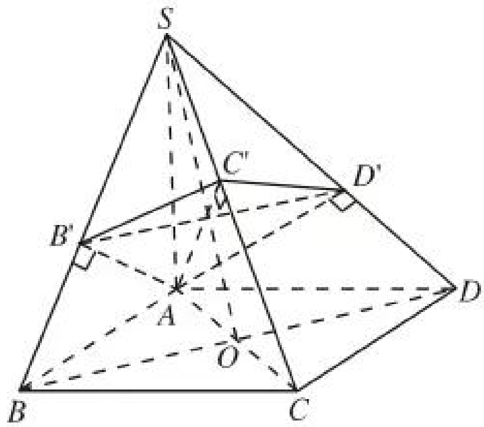
Ta có $AB' \perp SB, AB' \perp CB$ (do $CB \perp (SAB)$)

$\Rightarrow AB' \perp (SBC) \Rightarrow AB' \perp SC$. (1)

Tương tự $AD' \perp SC$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $SC \perp (AB'C'D')$

$$\Rightarrow SC \perp AC'.$$



*Hình 24*

Do tính đối xứng, ta có

$$V_{S.AB'C'D'} = 2V_{S.AB'C'}.$$

Ta có :

$$\frac{V_{S.AB'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SB'}{SB}\cdot\frac{SC'}{SC} = \frac{SB'.SB}{SB^2}\cdot\frac{SC'.SC}{SC^2} =$$

$$= \frac{SA^2}{SB^2}\cdot\frac{SA^2}{SC^2} = \frac{4a^2}{5a^2}\cdot\frac{4a^2}{6a^2} = \frac{8}{15}.$$

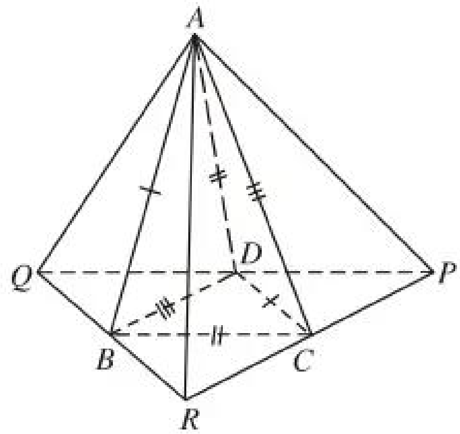
$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}\frac{a^2}{2}.2a = \frac{a^3}{3} \Rightarrow V_{S.AB'C'} = \frac{8}{15}\cdot\frac{a^3}{3} = \frac{8a^3}{45}$$

$$\Rightarrow V_{S.AB'C'D'} = \frac{16a^3}{45}.$$

**40.** (h.25) Dựng tứ diện $APQR$ sao cho $B$, $C$, $D$ lần lượt là trung điểm của các cạnh $QR$, $RP$, $PQ$.

Ta có $AD = BC = \frac{1}{2}PQ$ mà $D$ là trung điểm của $PQ$ nên $AQ \perp AP$.

Chứng minh tương tự, ta cũng có $AQ \perp AR$, $AR \perp AP$.



*Hình 25*

Dễ thấy

$V_{ABCD} = \frac{1}{4}V_{APQR} = \frac{1}{4}.\frac{1}{6}.AP.AQ.AR$ (*)

Xét các tam giác vuông $APQ$, $AQR$, $ARP$, ta có

$AP^2 + AQ^2 = 4c^2$, $AQ^2 + AR^2 = 4a^2$, $AR^2 + AP^2 = 4b^2$.

Từ đó suy ra :

$$AP = \sqrt{2}.\sqrt{-a^2 + b^2 + c^2},\ AQ = \sqrt{2}\sqrt{a^2 - b^2 + c^2},$$

$$AR = \sqrt{2}\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}.$$

Vậy từ (*) ta suy ra :

$$V_{ABCD} = \frac{\sqrt{2}}{12}\sqrt{(-a^2 + b^2 + c^2).(a^2 - b^2 + c^2).(a^2 + b^2 - c^2)}.$$

**41.** (h.26) *Cách 1.*

$AC\ //\ A'C' \Rightarrow AC\ //\ (BC'A')$. Gọi $I$ là trung điểm của $AC$ thì

$$d(A,(BC'A')) = d(I,(BC'A')).$$

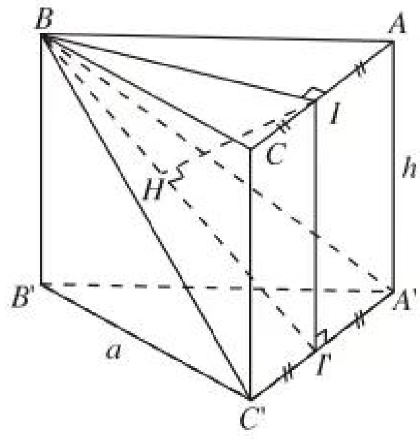
Gọi $I'$ là trung điểm của $A'C'$ thì rõ ràng $BI' \perp A'C'$, mặt khác $II' \perp A'C'$ nên

$$A'C' \perp (IBI').$$

Vậy khi ta hạ $IH \perp BI'$ thì $A'C' \perp IH$.

Từ đó suy ra $IH \perp (BC'A')$, tức là

$$d(A,(BC'A')) = IH.$$



*Hình 26*

Ta có : $IH = \frac{IB.II'}{BI'} = \frac{a\frac{\sqrt{3}}{2}.h}{\sqrt{3\frac{a^2}{4} + h^2}} = \frac{\sqrt{3}ah}{\sqrt{3a^2 + 4h^2}}$,

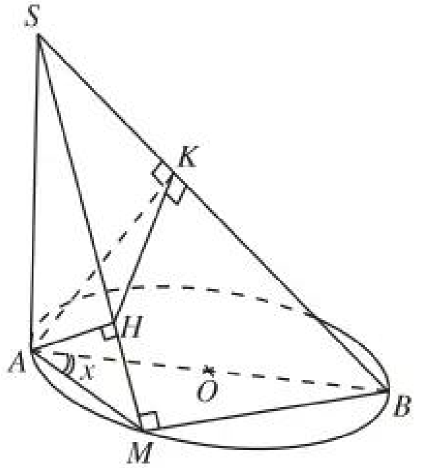
$S_{BC'A'} = \frac{1}{2}BI'.C'A' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3a^2}{4} + h^2}.a = \frac{1}{4}a\sqrt{3a^2 + 4h^2}.$

Vậy $V_{A.BC'A'} = \frac{1}{3}.\frac{1}{4}a\sqrt{3a^2 + 4h^2}.\frac{\sqrt{3}ah}{\sqrt{3a^2 + 4h^2}} = \frac{\sqrt{3}a^2h}{12}.$

*Cách 2.* $V_{A.BC'A'} = V_{B.AA'C'} = \frac{1}{2}.V_{B.AA'C'C} = \frac{1}{2}.\frac{2}{3}.V_{ABC.A'B'C'}$

$= \frac{1}{3}.S_{ABC}.h = \frac{1}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.h = \frac{a^2\sqrt{3}}{12}.h$

**42.** (h.27)



*Hình 27*

$MB \perp AM$, $MB \perp SA$

$\Rightarrow MB \perp (SAM) \Rightarrow MB \perp AH$, (1)

$SB \perp (AKH) \Rightarrow SB \perp AH$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AH \perp (SMB)$

$\Rightarrow AH \perp SM,\ AH \perp HK.$

$V_{S.AHK} = \frac{1}{3}S_{AHK}.SK = \frac{1}{6}AH.KH.SK.$

Vì $SK$ cố định nên :

$V_{S.AHK}$ max $\Leftrightarrow (AH.KH)$ max $\Leftrightarrow (AH^2.KH^2)$max $\Leftrightarrow AH^2 = KH^2 = \frac{AK^2}{2}$

(vì $AH^2 + HK^2 = AK^2$ không đổi). Vậy ta chỉ cần xác định vị trí điểm $M$ thoả mãn điều kiện $AH^2 = \frac{AK^2}{2}$. (*)

Đặt $\widehat{MAB} = x$, $SA = h$, $AB = 2R$. Ta có

$AK^2 = \frac{SA^2.AB^2}{SB^2} = \frac{4R^2h^2}{4R^2 + h^2}$,

$AM = 2R\cos x$,

$AH^2 = \frac{SA^2.AM^2}{SM^2} = \frac{4h^2R^2\cos^2 x}{h^2 + 4R^2\cos^2 x}$.

Từ (*) ta suy ra : $\cos^2 x = \frac{h^2}{2(h^2 + 2R^2)} < \frac{1}{2}$.

Từ đây ta xác định được $x$, tức là xác định được vị trí điểm $M$ (có hai vị trí của điểm $M$).

Từ $\cos^2 x < \frac{1}{2}$ suy ra $\cos x < \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos 45^\circ \Rightarrow x > 45^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{BM} > \overset{\frown}{AM}$.

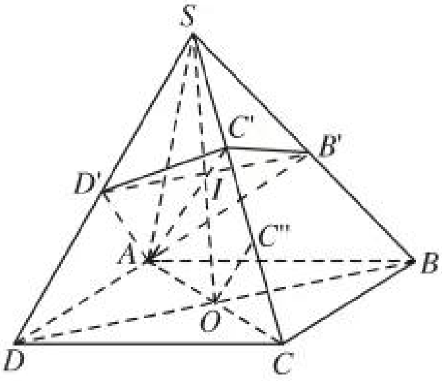
**43.** (h.28) Dễ thấy $AC'$, $B'D'$ và $SO$ ($O = AC \cap BD$) đồng quy tại $I$ và $I$ là trung điểm của $SO$.

Kẻ $OC'' \parallel AC'$. Dễ thấy $SC' = C'C'' = C''C$.

Vậy $\dfrac{SC'}{SC} = \dfrac{1}{3}$. Ta có

$$\frac{V_{S.AB'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC} = \frac{1}{2}.\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{V_{S.AB'C'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{12}.$$



*Hình 28*

Chứng minh tương tự, ta cũng có :

$$\frac{V_{S.AC'D'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{12}.$$

Vậy $\dfrac{V_{S.AB'C'D'}}{V_{S.ABCD}} = \dfrac{V_{S.AB'C'} + V_{S.AC'D'}}{V_{S.ABCD}} = \dfrac{1}{6}$.

**44.** (h.29). Giả sử đường thẳng $MN$ cắt $CD$ và $BC$ lần lượt tại $K$ và $I$.

Dễ thấy : $CK = \dfrac{3}{2}CD, CI = \dfrac{3}{2}CB,$

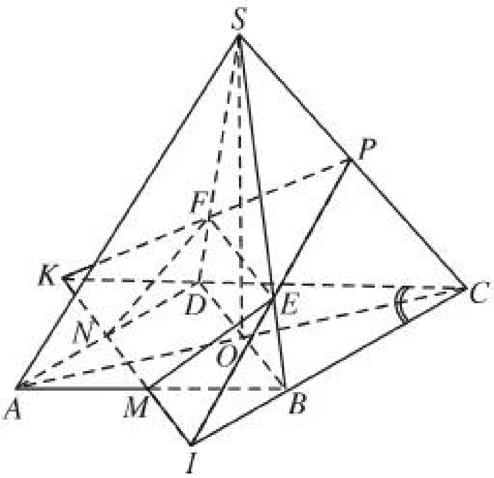
$$d(P,(ABC)) = \frac{1}{2}d\big(S,(ABC)\big).$$

$$V_{P.CIK} = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}CI.CK\sin\widehat{ICK}.d\big(P,(ABC)\big)$$

$$= \frac{1}{3}.\frac{1}{2}.\frac{3}{2}CB.\frac{3}{2}CD\sin\widehat{BCD}.\frac{1}{2}d\big(S,(ABC)\big)$$

$$= \frac{9}{16}\left(\frac{1}{3}CB.CD\sin\widehat{BCD}.d\big(S,(ABC)\big)\right)$$

$$\Rightarrow V_{P.CIK} = \frac{9}{16}V_{S.ABCD}.$$



*Hình 29*

Ta có : $\dfrac{V_{I.BEM}}{V_{I.CPK}} = \dfrac{IB}{IC}.\dfrac{IE}{IP}.\dfrac{IM}{IK} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{18}$

$$\Rightarrow V_{I.BEM} = \frac{1}{18}V_{I.CPK} = \frac{1}{18}V_{P.CIK} = \frac{1}{32}V_{S.ABCD}.$$

Tương tự, ta cũng có $V_{K.NDF} = \dfrac{1}{18}V_{P.CIK} = \dfrac{1}{32}V_{S.ABCD}$.

Vậy nếu gọi $V_2$ là thể tích của phần khối chóp giới hạn bởi mp($MNP$) với mặt phẳng đáy thì :

$$V_2 = V_{P.CIK} - (V_{I.BEM} + V_{K.NDF})$$
$$= \frac{9}{16}V_{S.ABCD} - \left(\frac{1}{32}V_{S.ABCD} + \frac{1}{32}V_{S.ABCD}\right)$$
$$= \frac{9}{16}V_{S.ABCD} - \frac{1}{16}V_{S.ABCD} = \frac{1}{2}V_{S.ABCD}.$$

Vậy phần còn lại, tức là phần của khối chóp nằm trên mp($MNP$), có thể tích $V_1$ cũng bằng $\frac{1}{2}V_{S.ABCD}$. Do đó $V_1 = V_2$.

**45.** (h.30) Kẻ $MN \parallel CD$ ($N \in SD$) thì hình thang $ABMN$ là thiết diện của khối chóp khi cắt bởi mp($ABM$). Ta có

$$\frac{V_{S.ANB}}{V_{S.ADB}} = \frac{SN}{SD} = \frac{1}{2} \Rightarrow V_{S.ANB} = \frac{1}{2}V_{S.ADB} = \frac{1}{4}V_{S.ABCD}.$$

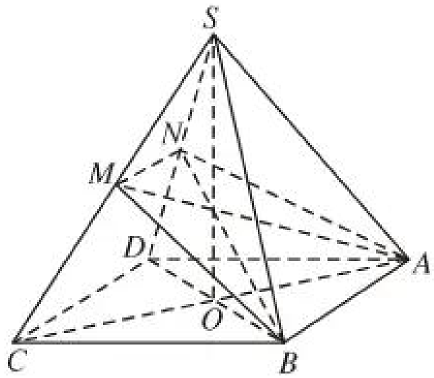
$$\frac{V_{S.BMN}}{V_{S.BCD}} = \frac{SM}{SC}.\frac{SN}{SD} = \frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow V_{S.BMN} = \frac{1}{4}V_{S.BCD} = \frac{1}{8}V_{S.ABCD}.$$

Vậy $V_{S.ABMN} = V_{S.ANB} + V_{S.BMN}$

$$= \frac{3}{8}V_{S.ABCD}.$$

Do đó : $\frac{V_{S.ABMN}}{V_{ABMNCD}} = \frac{3}{5}$.



Hình 30

**46.** (h.31)

a) Đường thẳng $EF$ cắt $A'D'$ tại $N$, cắt $A'B'$ tại $M$, $AN$ cắt $DD'$ tại $P$, $AM$ cắt $BB'$ tại $Q$. Vậy thiết diện là ngũ giác $APFEQ$.

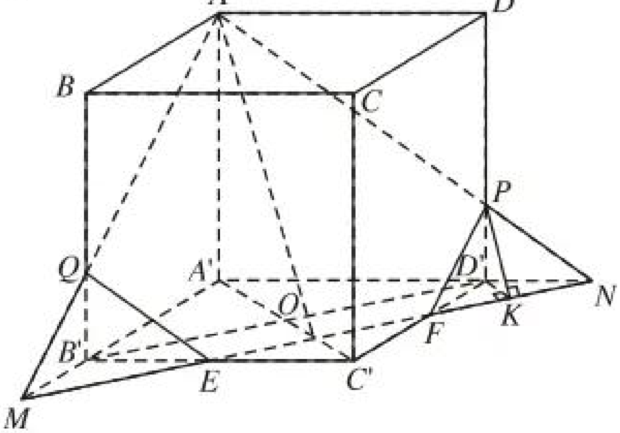
b) Đặt $V = V_{ABCD.A'B'C'D'}$,

$V_1 = V_{ABCDC'QEFP}$,

$V_2 = V_{AQEFP.B'A'D'}$,

$V_3 = V_{A.MA'N}$,

$V_4 = V_{PFD'N}$, $V_5 = V_{QMB'E}$.



Hình 31

Dễ thấy $V_4 = V_5$ (do tính đối xứng của hình lập phương),

$$V_3 = \frac{1}{6}AA'.A'M.A'N = \frac{1}{6}a.\frac{3a}{2}.\frac{3a}{2} = \frac{3a^3}{8},$$

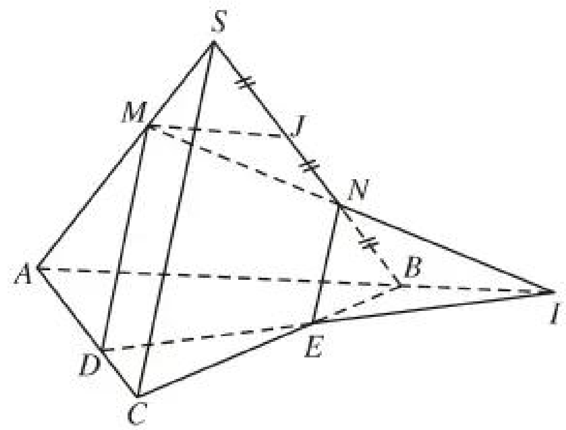
$$V_4 = \frac{1}{6}PD'.D'F.D'N = \frac{1}{6}.\frac{a}{3}.\frac{a}{2}.\frac{a}{2} = \frac{a^3}{72},$$

$$V_2 = V_3 - 2V_4 = \frac{3a^3}{8} - \frac{2a^3}{72} = \frac{25a^3}{72},$$

$$V_1 = V - V_2 = a^3 - \frac{25a^3}{72} = \frac{47}{72}a^3.$$

Mặt phẳng $(AEF)$ chia khối lập phương thành hai phần lần lượt có thể tích là $V_1 = \frac{47}{72}a^3$, $V_2 = \frac{25a^3}{72}$. Vậy : $\frac{V_1}{V_2} = \frac{47}{25}$.

**47.** (h.32) Kéo dài $MN$ cắt $AB$ tại $I$. Kẻ $MD$ song song với $SC$ ($D \in AC$). $DI$ cắt $CB$ tại $E$. Vậy tứ giác $MNED$ là thiết diện của khối chóp khi cắt bởi mp($\alpha$). Ta có




*Hình 32*

$$\frac{V_{A.MDI}}{V_{A.SCB}} = \frac{AM}{AS}.\frac{AD}{AC}.\frac{AI}{AB} = \frac{2}{3}.\frac{2}{3}.\frac{4}{3} = \frac{16}{27}$$

$$\Rightarrow V_{A.MDI} = \frac{16}{27}V_{S.ABC}$$

$$\left(BI = MJ, MJ = \frac{1}{3}AB \Rightarrow BI = \frac{1}{3}AB, AI = \frac{4}{3}AB\right).$$

$$\frac{V_{I.BNE}}{V_{I.AMD}} = \frac{IB}{IA}.\frac{IN}{IM}.\frac{IE}{ID} = \frac{1}{4}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{16}$$

$$\Rightarrow V_{I.BNE} = \frac{1}{16}V_{A.MDI} = \frac{1}{27}V_{S.ABC}.$$

Gọi $V_1 = V_{AMD.BNE}$, $V_2$ là phần còn lại thì

$$V_1 = V_{A.MDI} - V_{I.BNE} = \frac{15}{27}V_{S.ABC} = \frac{5}{9}V_{S.ABC}$$

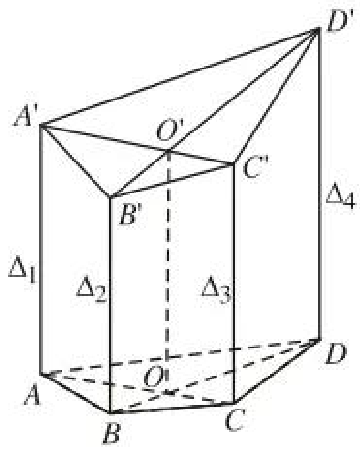
nên $V_2 = V_{S.ABC} - V_1 = \frac{4}{9}V_{S.ABC}$ và $\frac{V_1}{V_2} = \frac{5}{4}$.

**48.** (h.33)

Gọi $O = AC \cap BD$, $O' = A'C' \cap B'D'$.

Do $DD' \,//\, OO'$ nên dễ thấy

$$\frac{d(D', (ABC))}{d(O', (ABC))} = \frac{DD'}{OO'}, \frac{d(D, (A'B'C'))}{d(O, (A'B'C'))} = \frac{DD'}{OO'}.$$



*Hình 33*

Vậy :

$$\left.\begin{aligned} V_{D'.ABC} &= \frac{DD'}{OO'}V_{O'.ABC} \\ V_{D.A'B'C'} &= \frac{DD'}{OO'}V_{O.A'B'C'} \end{aligned}\right\} (1)$$

Đặt $h = d\left(BB', (ACC'A')\right)$. Ta có $h = d\left(B, (ACC'A')\right)$ và

$$V_{O'.ABC} = V_{B.O'AC} = \frac{1}{3}h.S_{O'AC}, (2)$$

$$V_{O.A'B'C'} = V_{B'.OA'C'} = \frac{1}{3}h.S_{OA'C'}. (3)$$

Đặt $d = d(AA', CC')$ thì $S_{O'AC} = S_{OA'C'} = \frac{1}{2}OO'.d$ (4)

$(S_{O'AC} = S_{AOO'} + S_{COO'} = \frac{1}{2}OO'\left(d(A,OO') + d(C,OO')\right) = \frac{1}{2}OO'.d$ ; tương tự

$S_{OA'C'} = \frac{1}{2}OO'.d)$.

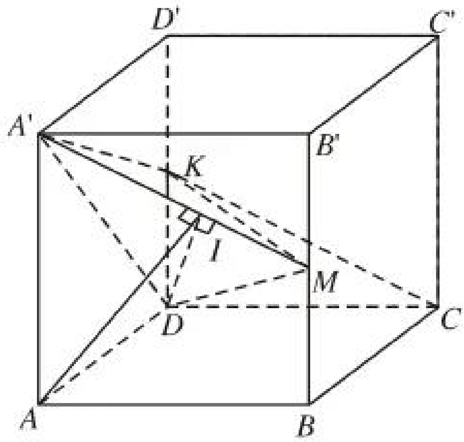
Từ (2), (3), (4) suy ra $V_{O'.ABC} = V_{O.A'B'C'}$. (5)

Từ (1) và (5) ta suy ra : $V_{D'.ABC} = V_{D.A'B'C'}$.

**49.** (h.34) Gọi $M$ là trung điểm của $BB'$.

Ta có $A'M \,//\, KC$ nên

$$d(CK, A'D) = d(CK, (A'MD))$$
$$= d(K, (A'MD)).$$



*Hình 34*

Đặt $d(CK, A'D) = x$. Ta có

$$V_{A'.MDK} = V_{K.A'MD} = \frac{1}{3}S_{A'MD}.x. \ (1)$$

Mặt khác $V_{A'.MDK} = V_{M.A'DK}$

$$= \frac{1}{3}S_{A'DK}.d(M,(A'DK)) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}a.\frac{1}{2}a\right).a = \frac{a^3}{12}. \ (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra : $S_{A'MD}.x = \frac{a^3}{4}$. (3)

Hạ $DI \perp A'M \Rightarrow AI \perp A'M$

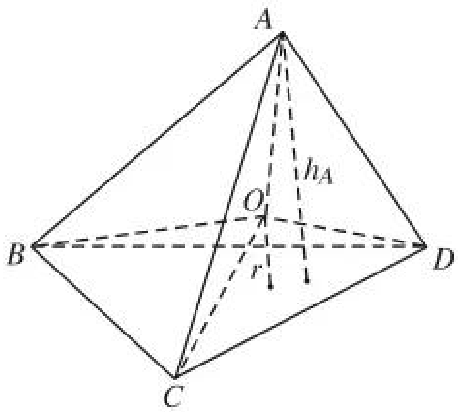
$$\Rightarrow AI.\,A'M = AA'.d(M, AA') = a^2 \Rightarrow AI = \frac{2a}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow DI^2 = DA^2 + AI^2 = a^2 + \frac{4a^2}{5} = \frac{9a^2}{5} \Rightarrow DI = \frac{3a}{\sqrt{5}}.$$

Vậy $S_{A'MD} = \frac{1}{2}DI.A'M = \frac{1}{2}\frac{3a}{\sqrt{5}}.\frac{a\sqrt{5}}{2} = \frac{3a^2}{4}$. (4)

Từ (3) và (4) suy ra $x = \frac{a}{3}$.

**50.** (h.35) Khối tứ diện $ABCD$ được phân chia thành bốn khối tứ diện $OBCD$, $OCAD$, $OABD$, $OABC$. Từ đó dễ thấy rằng :



*Hình 35*

$$\frac{V_{O.BCD}}{V_{ABCD}} = \frac{r}{h_A}, \frac{V_{O.CAD}}{V_{ABCD}} = \frac{r}{h_B},$$

$$\frac{V_{O.ABD}}{V_{ABCD}} = \frac{r}{h_C}, \frac{V_{O.ABC}}{V_{ABCD}} = \frac{r}{h_D}.$$

Suy ra :

$$\frac{V_{O.BCD} + V_{O.CAD} + V_{O.ABD} + V_{O.ABC}}{V_{ABCD}} = r\left(\frac{1}{h_A} + \frac{1}{h_B} + \frac{1}{h_C} + \frac{1}{h_D}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{V_{ABCD}}{V_{ABCD}} = r\left(\frac{1}{h_A} + \frac{1}{h_B} + \frac{1}{h_C} + \frac{1}{h_D}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{1}{h_A} + \frac{1}{h_B} + \frac{1}{h_C} + \frac{1}{h_D}.$$

**51.** Gọi hình lăng trụ đều đã cho là $\mathscr{H}$. Khi đó, dễ thấy tổng các khoảng cách từ một điểm nằm trong $\mathscr{H}$ đến hai mặt đáy của nó luôn bằng chiều cao $h$ của $\mathscr{H}$.

Giả sử $I$ là một điểm trong nào đó của $\mathscr{H}$. Dựng qua $I$ một mặt phẳng $(P)$ vuông góc với cạnh bên của $\mathscr{H}$, ta được thiết diện thẳng $A_1A_2...A_n$ của $\mathscr{H}$. Khi đó, $A_1A_2...A_n$ là một đa giác đều bằng đa giác đáy của $\mathscr{H}$ (do $\mathscr{H}$ là lăng trụ đều).

Từ $I$ ta kẻ đường $IH_1 \perp A_1A_2,\ IH_2 \perp A_2A_3, \ldots,\ IH_n \perp A_nA_1$.

Do thiết diện thẳng vuông góc với các mặt bên nên từ đó dễ dàng suy ra : $IH_1, IH_2, ..., IH_n$ lần lượt vuông góc với các mặt bên của hình lăng trụ. Đặt $IH_1 = h_1, IH_2 = h_2, \ldots, IH_n = h_n$ và $a$ là độ dài cạnh đáy của lăng trụ. Gọi $S$ là diện tích một mặt đáy thì $S$ cũng là diện tích của $A_1A_2...A_n$. Vậy

$$S = \frac{1}{2}ah_1 + \frac{1}{2}ah_2 + ... + \frac{1}{2}ah_n = \frac{1}{2}a\left(h_1 + h_2 + ... + h_n\right)$$

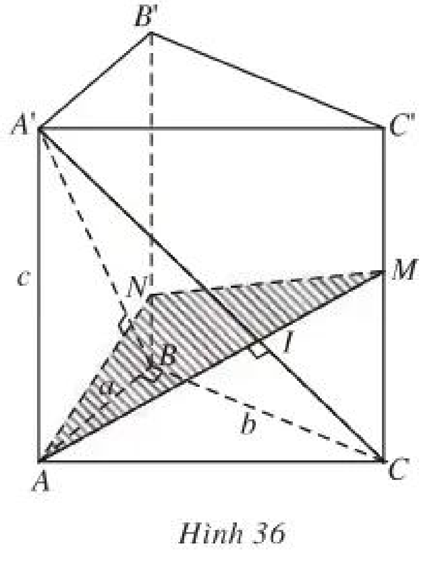
$$\Rightarrow h_1 + h_2 + ... + h_n = \frac{2S}{a}.$$

Vậy tổng các khoảng cách từ $I$ đến các mặt của lăng trụ là không đổi. Tổng này bằng $h + \frac{2S}{a}$.

**52.** (h.36)

a) Trong mp$(AA'C'C)$, dựng đường thẳng qua $A$ vuông góc với $CA'$ lần lượt cắt $CA'$ và $CC'$ tại $I$ và $M$.

Vì $AC = \sqrt{a^2 + b^2} \leq c$ nên $IC \leq IA'$, do đó $M$ phải thuộc đoạn $CC'$.



Hình 36

Bây giờ ta tìm giao điểm $N$ của $(P)$ và $BB'$. Dễ thấy $AN \perp BC$, $AN \perp CA'$

$\Rightarrow AN \perp A'B$. Vậy để tìm $N$, ta kẻ qua $A$ (trong mp$(A'B'BA)$) đường thẳng vuông góc với $A'B$ cắt $B'B$ tại $N$.

Vậy thiết diện là tam giác $AMN$.

b) Ta có : $V_{A'.AMN} = V_{M.AA'N} = V_{M.AA'B} = V_{C.A'AB} = \dfrac{1}{6}abc$

(do $NB \parallel AA'$, $MC \parallel AA'$).

Mặt khác :

$$V_{A'.AMN} = \frac{1}{3}.S_{AMN}.A'I \Rightarrow S_{AMN} = \frac{3V_{A'.AMN}}{A'I} = \frac{abc}{2A'I}.$$

Xét tam giác vuông $A'AC$ ta có :

$$A'I.A'C = AA'^2 = c^2 \Rightarrow A'I = \frac{c^2}{A'C} = \frac{c^2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

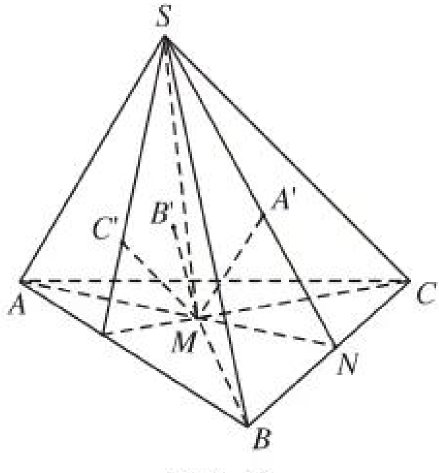
Vậy $S_{AMN} = \dfrac{ab\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{2c}$.

**53.** (h.37)

a) Gọi $N$ là giao điểm của $MA$ và $BC$. Khi đó $S$, $A'$, $N$ thẳng hàng vì chúng cùng nằm trên giao tuyến của hai mặt phẳng $(SBC)$ và $(SA, A'M)$.

Gọi $MM_1$ và $AA_1$ là các đường vuông góc hạ từ $M$ và $A$ xuống mp$(SBC)$ thì :

$$\frac{MM_1}{AA_1} = \frac{MN}{AN} = \frac{MA'}{SA}.$$



*Hình 37*

Vậy $\dfrac{V_{M.BCS}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{V_{M.BCS}}{V_{A.BCS}} = \dfrac{\frac{1}{3}S_{BCS}.MM_1}{\frac{1}{3}S_{BCS}.AA_1} = \dfrac{MM_1}{AA_1} = \dfrac{MA'}{SA}$.

b) Chứng minh tương tự như câu a), ta có :

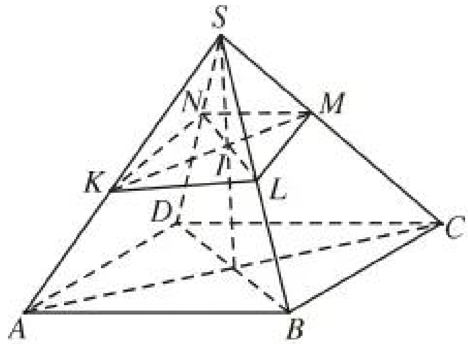
$$\frac{V_{M.CAS}}{V_{S.ABC}} = \frac{MB'}{SB}, \frac{V_{M.ABS}}{V_{S.ABC}} = \frac{MC'}{SC}.$$

Vậy :

$$\frac{MA'}{SA} + \frac{MB'}{SB} + \frac{MC'}{SC} = \frac{V_{M.BCS} + V_{M.CAS} + V_{M.ABS}}{V_{S.ABC}} = \frac{V_{S.ABC}}{V_{S.ABC}} = 1.$$

**54.** (h.38)

a) Dễ thấy các tam giác $ABC$, $ACD$, $ABD$, $BCD$ đều có diện tích bằng nhau và bằng nửa diện tích $S$ của hình bình hành $ABCD$ ; các hình chóp $S.ABC$, $S.ACD$, $S.ABD$, $S.BCD$ có chiều cao bằng nhau và bằng chiều cao $h$ của hình chóp $S.ABCD$. Vậy



*Hình 38*

$$V_{S.ABC} = V_{S.ACD} = V_{S.ABD} = V_{S.BCD}$$

$$= \frac{V_{S.ABCD}}{2} = \frac{V}{2}.$$

b) Ta có : $\dfrac{V_{S.KLM}}{\dfrac{V}{2}} = \dfrac{SK}{SA}.\dfrac{SL}{SB}.\dfrac{SM}{SC}, \dfrac{V_{S.KMN}}{\dfrac{V}{2}} = \dfrac{SK}{SA}.\dfrac{SM}{SC}.\dfrac{SN}{SD}$

$$\Rightarrow \frac{V_{S.KLMN}}{\frac{V}{2}} = \frac{SK}{SA}.\frac{SL}{SB}.\frac{SM}{SC} + \frac{SK}{SA}.\frac{SM}{SC}.\frac{SN}{SD}. \quad (1)$$

Tương tự

$$\frac{V_{S.KLMN}}{\frac{V}{2}} = \frac{SL}{SB}.\frac{SM}{SC}.\frac{SN}{SD} + \frac{SL}{SB}.\frac{SN}{SD}.\frac{SK}{SA}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$\frac{SK}{SA}.\frac{SL}{SB}.\frac{SM}{SC} + \frac{SK}{SA}.\frac{SM}{SC}.\frac{SN}{SD} = \frac{SL}{SB}.\frac{SM}{SC}.\frac{SN}{SD} + \frac{SL}{SB}.\frac{SN}{SD}.\frac{SK}{SA}.$$

Nhân hai vế với $\dfrac{SA}{SK}.\dfrac{SB}{SL}.\dfrac{SC}{SM}.\dfrac{SD}{SN}$, ta được đẳng thức phải chứng minh.