

§4. Thể tích của khối đa diện

I - CÁC KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Thể tích của khối hộp chữ nhật bằng tích số ba kích thước.
2. Thể tích của khối chóp bằng một phần ba tích số của diện tích mặt đáy và chiều cao của khối chóp.
3. Thể tích của khối lăng trụ bằng tích số của diện tích mặt đáy và chiều cao của khối lăng trụ.
4. Cho khối chóp $S.ABC$. Trên ba đường thẳng SA, SB, SC lần lượt lấy ba điểm A', B', C' khác S . Khi đó $\frac{V_{S.ABC}}{V_{S.A'B'C'}} = \frac{SA}{SA'} \cdot \frac{SB}{SB'} \cdot \frac{SC}{SC'}$.

II - ĐỀ BÀI

22. Cho khối hộp \mathcal{H} có tâm I . Chứng minh rằng nếu mp(α) chia \mathcal{H} thành hai phần có thể tích bằng nhau thì (α) phải đi qua điểm I .

23. Cho khối lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và A_1D bằng 2 và độ dài đường chéo của mặt bên bằng 5 .
- Hạ $AK \perp A_1D$ ($K \in A_1D$). Chứng minh rằng $AK = 2$.
 - Tính thể tích khối lăng trụ $ABCD.A_1B_1C_1D_1$.
24. Đáy của khối lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ là tam giác đều. Mặt phẳng (A_1BC) tạo với đáy một góc 30° và tam giác A_1BC có diện tích bằng 8 . Tính thể tích khối lăng trụ.
25. Cho khối lăng trụ đứng $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có đáy là hình bình hành và $\hat{B}AD = 45^\circ$. Các đường chéo AC_1 và DB_1 lần lượt tạo với đáy những góc 45° và 60° . Hãy tính thể tích của khối lăng trụ nếu biết chiều cao của nó bằng 2 .
26. Cho khối hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có tất cả các cạnh bằng nhau và bằng a , $\hat{A}_1AB = \hat{B}AD = \hat{A}_1AD = \alpha$ ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$). Hãy tính thể tích của khối hộp.
27. Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình chữ nhật với $AB = \sqrt{3}$, $AD = \sqrt{7}$. Hai mặt bên $(ABB'A')$ và $(ADD'A')$ lần lượt tạo với đáy những góc 45° và 60° . Hãy tính thể tích khối hộp nếu biết cạnh bên bằng 1 .
28. Cho khối lăng trụ tam giác $ABC.A_1B_1C_1$ mà mặt bên ABB_1A_1 có diện tích bằng 4 . Khoảng cách giữa cạnh CC_1 và mặt (ABB_1A_1) bằng 7 .
Hãy tính thể tích khối lăng trụ.
29. Cho khối lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$ có đáy ABC là tam giác vuông cân với cạnh huyền AB bằng $\sqrt{2}$. Cho biết mặt phẳng (AA_1B) vuông góc với mặt phẳng (ABC) , $AA_1 = \sqrt{3}$, góc \hat{A}_1AB nhọn, góc giữa mặt phẳng (A_1AC) và mặt phẳng (ABC) bằng 60° .
Hãy tính thể tích khối lăng trụ.
30. Lấy một mặt phẳng vuông góc với cạnh bên của một khối lăng trụ. Hình chiếu của mặt đáy của khối lăng trụ trên mặt phẳng đó được gọi là *diện thẳng* của khối lăng trụ.
Chứng minh rằng thể tích của khối lăng trụ bằng tích của diện tích thiết diện thẳng với độ dài cạnh bên.

31. Hãy tính thể tích của khối hộp nếu biết độ dài cạnh bên bằng a , diện tích hai mặt chéo lần lượt là S_1, S_2 và góc giữa hai mặt chéo bằng α .
32. Cho khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ mà trung đoạn của nó (đường cao của một mặt bên hạ từ đỉnh hình chóp) bằng 6 còn góc giữa hai mặt bên đối diện bằng 60° . Qua CD , dựng mặt phẳng (α) vuông góc với mp(SAB), cắt SA, SB lần lượt tại P_1 và P .
Hãy tính thể tích khối chóp $S.CDP_1P$.
33. Cho khối chóp tam giác đều $S.ABC$ có chiều cao bằng h và góc ASB bằng 2φ . Hãy tính thể tích khối chóp.
34. Khối chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân đỉnh C và $SA \perp (ABC)$, $SC = a$. Hãy tìm góc giữa hai mặt phẳng (SCB) và (ABC) để thể tích khối chóp lớn nhất.
35. Cho khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ mà khoảng cách từ đỉnh A đến mp(SBC) bằng $2a$. Với giá trị nào của góc giữa mặt bên và mặt đáy của khối chóp thì thể tích của khối chóp nhỏ nhất ?
36. Khối chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$; đáy là tam giác ABC cân tại A , độ dài trung tuyến AD bằng a , cạnh bên SB tạo với đáy một góc α và tạo với mặt (SAD) góc β . Tính thể tích khối chóp.
37. Biết thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ bằng V . Tính thể tích khối tứ diện $ACB'D'$.
38. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi d là khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD , α là góc giữa hai đường thẳng đó. Chứng minh rằng
- $$V_{ABCD} = \frac{1}{6} AB.CD.d.\sin \alpha.$$
39. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 2a$. Gọi B', D' lần lượt là hình chiếu của A trên SB và SD . Mặt phẳng ($AB'D'$) cắt SC tại C' . Tính thể tích khối chóp $S.AB'C'D'$.
40. Tính thể tích khối tứ diện $ABCD$ có các cặp cạnh đối bằng nhau :
 $AB = CD = a, AC = BD = b, AD = BC = c$.
41. Cho khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a , chiều cao bằng h . Tính thể tích khối chóp $A.BC'A'$.

42. Cho đường tròn đường kính AB nằm trên mặt phẳng (P) và một điểm M di động trên đường tròn. Trên đường thẳng vuông góc với $mp(P)$ tại A , lấy một điểm S . Mặt phẳng (Q) qua A vuông góc với SB tại K cắt SM tại H . Tìm vị trí của M để thể tích khối chóp $S.AHK$ lớn nhất. Chứng minh rằng khi đó cung $\overset{\curvearrowleft}{AM}$ nhỏ hơn cung $\overset{\curvearrowright}{BM}$.
43. Khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi B' , D' lần lượt là trung điểm của SB , SD . Mặt phẳng ($AB'D'$) cắt SC tại C' . Tính tỉ số thể tích của hai khối chóp $S.AB'C'D'$ và $S.ABCD$.
44. Khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M , N , P lần lượt là trung điểm của AB , AD và SC . Chứng minh mặt phẳng (MNP) chia khối chóp thành hai phần có thể tích bằng nhau.
45. Cho khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Một mặt phẳng (α) đi qua A , B và trung điểm M của cạnh SC . Tính tỉ số thể tích của hai phần khối chóp bị phân chia bởi mặt phẳng đó.
46. Cho khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Các điểm E và F lần lượt là trung điểm của $C'B'$ và $C'D'$.
- Dựng thiết diện của khối lập phương khi cắt bởi $mp(AEF)$.
 - Tính tỉ số thể tích hai phần của khối lập phương bị chia bởi mặt phẳng (AEF).
47. Cho điểm M trên cạnh SA , điểm N trên cạnh SB của khối chóp tam giác $S.ABC$ sao cho $\frac{SM}{MA} = \frac{1}{2}$, $\frac{SN}{NB} = 2$. Một mặt phẳng (α) qua MN và song song với SC chia khối chóp thành hai phần. Tính tỉ số thể tích hai phần đó.
48. Bốn đường thẳng Δ_1 , Δ_2 , Δ_3 , Δ_4 đôi một song song và không có ba đường thẳng nào nằm trên cùng một mặt phẳng. Một mặt phẳng (P) cắt chúng theo thứ tự tại A , B , C , D . Một mặt phẳng (P') cắt chúng theo thứ tự tại A' , B' , C' , D' . Chứng minh hai khối tứ diện $D'ABC$ và $DA'B'C'$ có thể tích bằng nhau.
49. Cho khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Gọi K là trung điểm của DD' . Tính khoảng cách giữa CK và $A'D$.
50. Cho tứ diện $ABCD$ có điểm O nằm trong tứ diện và cách đều các mặt của tứ diện một khoảng r . Gọi h_A , h_B , h_C , h_D lần lượt là khoảng cách từ các điểm A , B , C , D đến các mặt đối diện. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{h_A} + \frac{1}{h_B} + \frac{1}{h_C} + \frac{1}{h_D}.$$

51. Chứng minh rằng tổng các khoảng cách từ một điểm nằm trong một hình lăng trụ đều đến các mặt của nó không phụ thuộc vào vị trí của điểm nằm trong hình lăng trụ đó.
52. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ mà đáy là tam giác vuông tại B có $AB = a, BC = b, AA' = c$ ($c^2 \geq a^2 + b^2$). Một mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với CA' .
- Xác định thiết diện của hình lăng trụ khi cắt bởi $\text{mp}(P)$.
 - Tính diện tích thiết diện nói trên.
53. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ và M là một điểm nằm trong tam giác ABC . Các đường thẳng qua M song song với SA, SB, SC lần lượt cắt các mặt $(BCS), (CAS), (ABS)$ tại A', B', C' . Chứng minh rằng :
- $$\frac{V_{M.BCS}}{V_{S.ABC}} = \frac{MA'}{SA};$$
 - $$\frac{MA'}{SA} + \frac{MB'}{SB} + \frac{MC'}{SC}$$
 không đổi. Tìm tổng đó.
54. Hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Một mặt phẳng (P) cắt SA, SB, SC, SD theo thứ tự tại K, L, M, N .
- Chứng minh rằng :
- $V_{S.ABC} = V_{S.ACD} = V_{S.ABD} = V_{S.BCD};$
 - $$\frac{SA}{SK} + \frac{SC}{SM} = \frac{SB}{SL} + \frac{SD}{SN}.$$