Ôn tập chương I

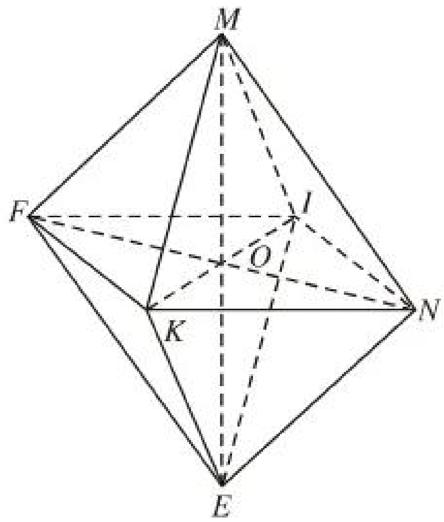
Bài tập tự luận

55. Với mỗi điểm M bất kì khác I, ta gọi M' là ảnh của M qua f, khi đó M và M' không trùng nhau. Vì hợp thành của f với chính nó là phép đồng nhất nên f biến M' thành M, vậy f biến đoạn thẳng MM' thành đoạn thẳng $M'M$. Từ đó suy ra f biến trung điểm của đoạn thẳng MM' thành chính nó và vì vậy, theo giả thiết, trung điểm của MM' phải là điểm I. Vậy f là phép đối xứng qua tâm I.

56. Các cạnh bên của hình chóp cụt đều phải đồng quy tại một điểm, ta gọi là S. Giả sử một cạnh bên của hình chóp cụt là A_1A_2 với A_1 là đỉnh của mặt đáy $Đ_1$ và A_2 là đỉnh của mặt đáy $Đ_2$. Khi đó, phép vị tự tâm S tỉ số $k = \frac{SA_2}{SA_1}$ sẽ biến $Đ_1$ thành $Đ_2$. (Chú ý rằng kết quả này đúng với mọi hình chóp cụt bất kì, không cần phải là hình chóp cụt đều).

Trong trường hợp các mặt đáy $Đ_1$ và $Đ_2$ là các đa giác đều có số cạnh là số chẵn, ta còn có thêm một phép vị tự thứ hai được xác định như sau : Gọi O_1 và O_2 lần lượt là tâm của $Đ_1$ và $Đ_2$ và S' là điểm sao cho $\overrightarrow{S'O_2} = -k\overrightarrow{S'O_1}$, với $k = \frac{SA_2}{SA_1}$. Khi đó, dễ thấy phép vị tự tâm S' tỉ số $-k$ sẽ biến $Đ_1$ thành $Đ_2$.

57. (h.39) Gọi độ dài cạnh của khối bát diện đều là b. Khối bát diện đều có thể phân chia thành hai khối chóp tứ giác đều mà các cạnh bằng b : $M.FKNI$ và $E.FKNI$.



Hình 39

Gọi MO là đường cao của khối chóp $M.FKNI$ thì ON bằng một nửa đường chéo của đáy.

Ta có :

$$MO^2 = MN^2 - ON^2 = b^2 - \left(b\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{b^2}{2}$$

$$\Rightarrow MO = \frac{b\sqrt{2}}{2}.$$

$$V_{M.FKNI} = \frac{1}{3}S_{FKNI}.MO = \frac{1}{3}b^2.b\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{b^3\sqrt{2}}{6}.$$

Như ta đã biết, b bằng một nửa đường chéo của một mặt của khối lập phương ngoại tiếp. Do đó $b = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ và $V_{M.FKNI} = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^3.\frac{\sqrt{2}}{6} = \frac{a^3}{12}.$

Vậy thể tích khối bát diện đều là :

$$V = 2V_{M.FKNI} = \frac{a^3}{6}.$$

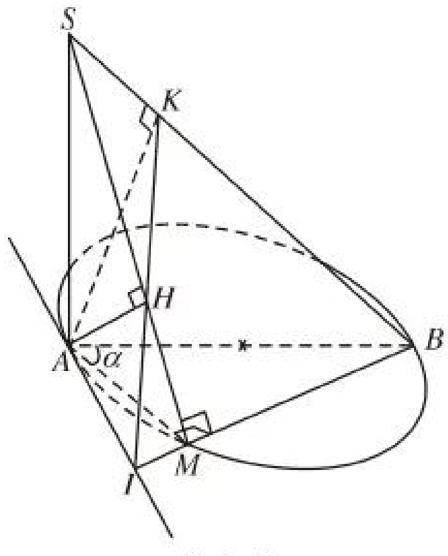
58. (h.40)

a) Ta có $BM \perp AM$ (vì M nằm trên đường tròn đường kính AB) và $BM \perp SA$ (do $SA \perp (P)$), suy ra $BM \perp (SAM) \Rightarrow BM \perp AH$.

Mặt khác $AH \perp SM$, suy ra $AH \perp SB$.

Theo giả thiết, ta lại có $AK \perp SB$.

Vậy $SB \perp (KHA)$.



Hình 40

b) Vì $SB \perp (KHA)$ nên $SB \perp AI$, mặt khác $SA \perp AI$ nên $AI \perp AB$, mà AI thuộc mp(P), suy ra AI là tiếp tuyến của đường tròn đã cho tại điểm A.

c) *Cách 1*. Ta có :

$$\frac{V_{S.KHA}}{V_{S.BMA}} = \frac{SK}{SB}.\frac{SH}{SM} = \frac{SK.SB}{SB^2}.\frac{SH.SM}{SM^2} = \frac{SA^4}{SB^2.SM^2}$$

$$= \frac{(2R)^4}{(4R^2+4R^2).(4R^2+AM^2)} = \frac{2R^2}{4R^2+4R^2\cos^2\alpha} = \frac{1}{2(1+\cos^2\alpha)},$$

$$V_{S.BMA} = \frac{1}{3}S_{BMA}.SA = \frac{1}{6}AM.BM.SA = \frac{1}{6}2R\cos\alpha.2R\sin\alpha.2R$$

$$= \frac{2R^3}{3}\sin 2\alpha = \frac{2R^3}{3}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{R^3\sqrt{3}}{3}.$$

Vậy $V_{S.KHA} = \dfrac{1}{2(1+\cos^2\alpha)}\cdot\dfrac{R^3\sqrt{3}}{3} = \dfrac{1}{2\left(1+\frac{3}{4}\right)}\cdot\dfrac{R^3\sqrt{3}}{3} = \dfrac{2R^3\sqrt{3}}{21}.$

Cách 2. Dễ thấy $V_{S.KHA} = \frac{1}{3}S_{KHA}.SK.$

Dùng hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có thể tính được SK, AH, AK, HK (với chú ý rằng tam giác KHA vuông ở H) theo R. Từ đó tính được thể tích khối chóp $S.KHA$.

59. (h.41) Giả sử hình lập phương $A'HB'O.GEFC'$ thoả mãn điều kiện của bài toán và điểm E thuộc mp(ABC). Khi đó

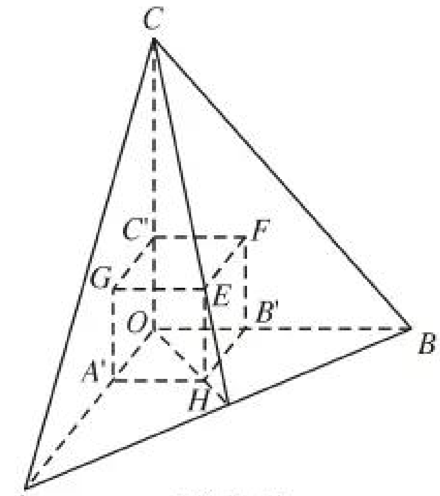
$$V_{O.ABC} = V_{E.OAB} + V_{E.OBC} + V_{E.OCA}.$$

Các khối chóp $E.OAB$, $E.OBC$, $E.OCA$ có chiều cao x bằng cạnh của khối lập phương nói trên. Bởi vậy ta có :

$$\frac{1}{6}abc = \frac{1}{3}x\left(\frac{ab}{2} + \frac{bc}{2} + \frac{ca}{2}\right)$$

$$\Rightarrow x = \frac{abc}{ab+bc+ca}.$$

Vậy : $V_{\text{lập phương}} = x^3 = \dfrac{a^3b^3c^3}{(ab+bc+ca)^3}.$



Hình 41

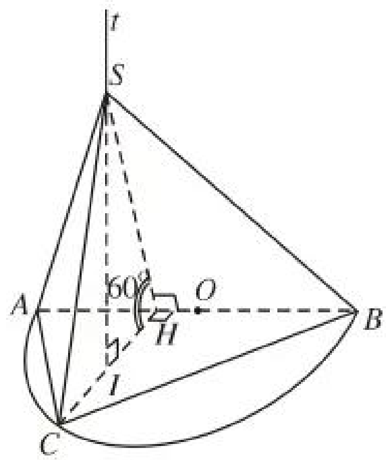
60. (h.42) 1. a) Do các tam giác ASB và ACB vuông nên :

$SH^2 = AH.BH$, $CH^2 = AH.BH$.

Vậy $SH = CH$. Mặt khác $SI \perp CH$ và $CI = IH$ nên $SC = SH$.

Vậy tam giác SCH đều, suy ra $\widehat{SHI} = 60^\circ$.

Mặt khác, ta có $AB \perp HI$, $AB \perp SH$ $\Rightarrow \widehat{SHI}$ là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (ABC). Vậy mặt phẳng (SAB) qua AB cố định và tạo với mặt phẳng cố định (ABC) một góc 60° nên nó phải cố định.



Hình 42

b) Gọi K là điểm cách đều các điểm S, A, B, I. Do K cách đều ba điểm S, A, B nên nó phải thuộc đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (SAB) tại trung điểm O của AB. Mặt phẳng (SAB) và AB cố định nên đường thẳng Δ cố định. Vậy K thuộc đường thẳng Δ cố định.

2. Trong tam giác ABC ta có :

$CH^2 = HA.HB \Rightarrow CH = \sqrt{x(2R-x)}$.

Do tam giác SCH đều nên $SI = \dfrac{CH.\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{x(2R-x)}$.

Vậy : $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{2}.AB.CH.SI = \dfrac{R\sqrt{3}}{6}x(2R-x)$.

$V_{S.ABC}$ lớn nhất $\Leftrightarrow x(2R-x)$ lớn nhất $\Leftrightarrow x = 2R - x$ (do $x + (2R-x) = 2R$ không đổi) $\Leftrightarrow x = R \Leftrightarrow C$ là điểm chính giữa của cung AB.

61. (h.43)

1. $SC \perp (AB'C'D') \Rightarrow SC \perp AB'$. Dễ thấy $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AB'$.

Từ đó suy ra :

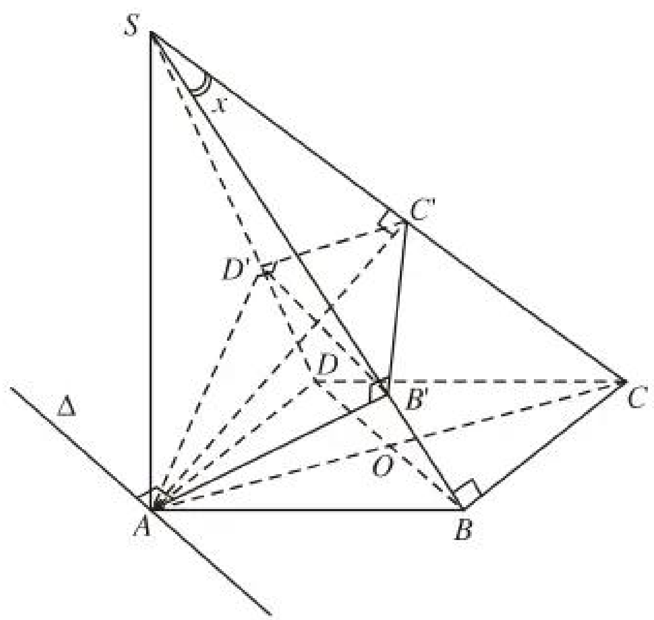
$AB' \perp (SBC) \Rightarrow AB' \perp B'C'$.

Tương tự ta có $AD' \perp D'C'$.

Như vậy, tứ giác $AB'C'D'$ có hai góc B' và D' vuông.

2. Gọi Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng (α) và mp$(ABCD)$.

Do Δ thuộc (α) nên $\Delta \perp SC$. Theo định lí ba đường vuông góc, ta có $\Delta \perp AC$. Hơn nữa, Δ nằm trong mp$(ABCD)$ và đi qua điểm A cố định, vậy Δ là đường thẳng cố định.



Hình 43

Do $AB' \perp (SBC)$, $AD' \perp (SCD)$

$\Rightarrow AB' \perp B'C$, $AD' \perp D'C$.

Các tam giác vuông ABC, ADC, $AB'C$, $AD'C$, $AC'C$ có chung cạnh huyền cố định AC, suy ra các đỉnh A, B, C, D, B', C', D' đều cách trung điểm O của AC một khoảng không đổi $\frac{AC}{2}$.

3. *Cách 1*. Do $BC \perp (SAB)$ nên SB là hình chiếu của SC trên mp(SAB) và do đó $\widehat{BSC} = x$. Ta có

$$V = V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}a^2 SA \ \ (a = AB = BC),$$

$$V' = V_{S.AB'C'D'} = \frac{1}{3}S_{AB'C'D'}.SC'.$$

Do $ABCD$ là hình vuông nên dễ dàng suy ra $SB' = SD' \Rightarrow B'D' \parallel BD$.

Từ đó dễ thấy $B'D' \perp (SAC) \Rightarrow B'D' \perp AC' \Rightarrow S_{AB'C'D'} = \frac{1}{2}AC'.B'D'$.

Ta có : $SB = BC\cot x = a\cot x,\ SC = \frac{BC}{\sin x} = \frac{a}{\sin x}$,

$$SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = \frac{a\sqrt{\cos 2x}}{\sin x},\ SB' = \frac{SA^2}{SB} = \frac{a\cos 2x}{\sin x\cos x},$$

$$SC' = \frac{SA^2}{SC} = \frac{a\cos 2x}{\sin x},\ B'D' = BD.\frac{SB'}{SB} = \frac{a\sqrt{2}\cos 2x}{\cos^2 x},$$

$$AC' = \frac{SA.AC}{SC} = a\sqrt{2\cos 2x}.$$

Vậy $V = \frac{a^3\sqrt{\cos 2x}}{3\sin x},\ V' = \frac{a^3\cos^2 2x\sqrt{\cos 2x}}{3\sin x\cos^2 x} \Rightarrow \frac{V'}{V} = \frac{\cos^2 2x}{\cos^2 x}$.

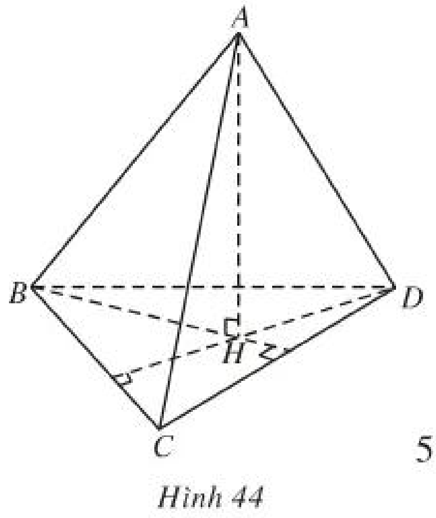
Cách 2. Dễ thấy : $\frac{V'}{V} = \frac{2V_{S.AB'C'}}{2V_{S.ABC}} = \frac{SB'.SC'}{SB.SC}$.

Từ đó dễ dàng suy ra kết quả cần tìm.

62. 1. (h.44) Do H là trực tâm ΔBCD nên $BH \perp CD$.

Mặt khác $AH \perp (BCD)$ nên $AH \perp CD$.

Vậy $CD \perp (ABH) \Rightarrow CD \perp AB$.

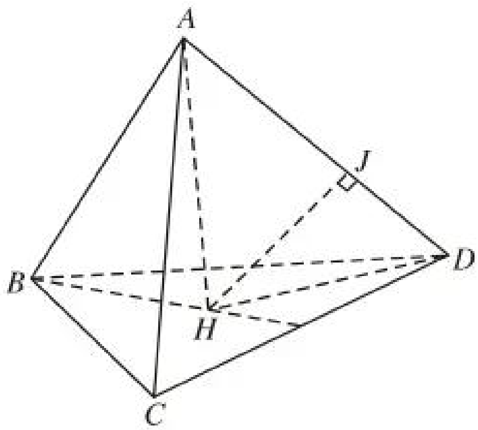


Hình 44

Cùng với giả thiết $AC \perp AB$, ta suy ra $AB \perp (ACD) \Rightarrow AB \perp AD$.

Tương tự $AC \perp AD$.

2. (h.45) Từ $AB = AC = AD$ suy ra $HB = HC = HD$, tức H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đều BCD.



Hình 45

Xét tam giác vuông AHD, ta có :

$$\frac{1}{HJ^2} = \frac{1}{AH^2} + \frac{1}{HD^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{HD^2} = \frac{1}{d^2} - \frac{1}{h^2}$$

$$\Rightarrow HD = \frac{hd}{\sqrt{h^2 - d^2}}.$$

Do tam giác BCD đều nên $DH = BC.\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, hay $BC = DH\sqrt{3}$. Vậy

$$V = \frac{1}{3}S_{BCD}.AH = \frac{\sqrt{3}d^2h^3}{4(h^2 - d^2)}.$$

Bài tập trắc nghiệm

1. (B), **2**. (B),**3**. (C),**4**. (D),**5**. (C),**6**. (B),

7. (B),**8**. (C),**9**. (B),**10**. (C),**11**. (A),**12**. (C),

13. (D),**14**. (B),**15**. (D),**16**. (A),**17**. (B),**18**. (B),

19. (C),**20**. (B),**21**. (A),**22**. (A),**23**. (B),**24**. (A),

25. (D),**26**. (C),**27**. (A),**28**. (A),**29**. (B),**30**. (C),

31. (D),**32**. (A).