Ôn tập chương II

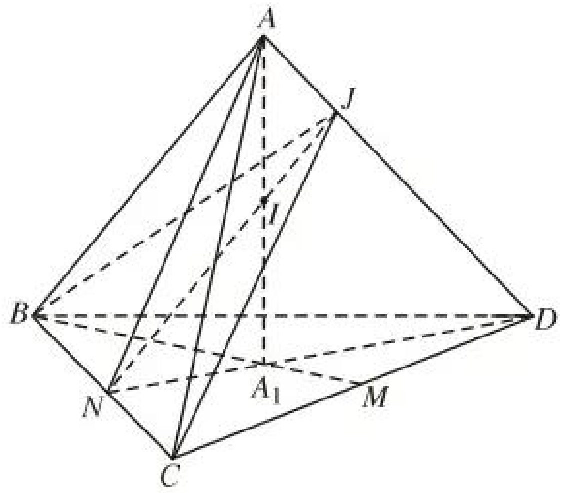
Bài tập tự luận

45. (h.89a,b) Gọi N là trung điểm của BC và J là giao điểm của NI với AD, khi đó mp(BCI) chia tứ diện đã cho thành hai tứ diện $BCDJ$ và $ABCJ$.

Dễ thấy $AJ = \dfrac{1}{4}AD$.

Vì $AA_1 \perp$ mp(BCD) nên mọi điểm thuộc AA_1 cách đều B, C, D. Khi đó, tâm O_1 của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $BCDJ$ là giao điểm của AA_1 với đường trung trực của JD (xét trong mp(AA_1D)).

Tương tự như trên, tâm O_2 của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCJ$ là giao của DD_1 với đường trung trực của AJ (xét trong mp(ADD_1)) (DD_1 là đường cao kẻ từ đỉnh D của tứ diện $ABCD$).

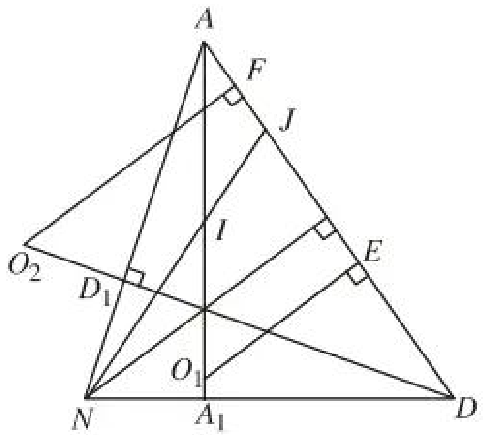


Hình 89a

Gọi E và F lần lượt là trung điểm của DJ và AJ. Xét tứ giác nội tiếp O_1A_1DE (hình 89b), ta có

$$AE.\,AD = AO_1.AA_1$$

$$\Rightarrow AO_1 = \frac{AE.AD}{AA_1}.$$



Hình 89b

Mặt khác

$$AA_1 = \frac{a\sqrt{6}}{3},\ AE = \frac{a}{4} + \frac{3a}{8} = \frac{5a}{8}.$$

Từ đó

$$AO_1 = \frac{5a.a}{8.\frac{a\sqrt{6}}{3}} = \frac{5a\sqrt{6}}{16}$$

và do đó $A_1O_1 = A_1A - AO_1 = \dfrac{a\sqrt{6}}{3} - \dfrac{5a\sqrt{6}}{16} = \dfrac{a\sqrt{6}}{48}$.

Vậy bán kính R_1 của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $BCDJ$ là

$$R_1^2 = O_1D^2 = A_1O_1^2 + A_1D^2 = \frac{6a^2}{48^2} + \frac{3a^2}{9} = \frac{a^2}{48.8} + \frac{a^2}{3} = \frac{129.a^2}{48.8}$$

$$\Rightarrow R_1 = \frac{a\sqrt{129}}{8\sqrt{6}}.$$

Tứ giác O_2D_1FA nội tiếp đường tròn nên

$$DD_1.DO_2 = DF.DA \Rightarrow DO_2 = \frac{DF.DA}{DD_1}.$$

Mặt khác $DF = \dfrac{3a}{4} + \dfrac{a}{8} = \dfrac{7a}{8}$, $DA = a$, $DD_1 = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$, từ đó

$$DO_2 = \frac{\frac{7a}{8}.a}{\frac{a\sqrt{6}}{3}} = \frac{21a\sqrt{6}}{8.6} = \frac{7a\sqrt{6}}{16}.$$

Suy ra $D_1O_2 = \dfrac{7a\sqrt{6}}{16} - \dfrac{a\sqrt{6}}{3} = \dfrac{5a\sqrt{6}}{48}$ và do đó, bán kính R_2 của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCJ$ là

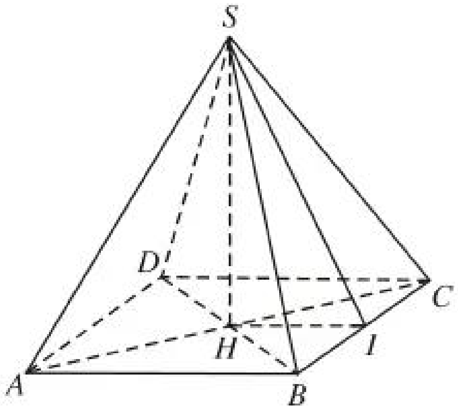
$$R_2^2 = O_2A^2 = O_2D_1^2 + D_1A^2 = \frac{25a^2.6}{48^2} + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{25a^2}{48.8} + \frac{a^2}{3} = \frac{153a^2}{48.8},$$

từ đó $R_2 = \frac{a\sqrt{153}}{8\sqrt{6}}$. Vậy $\frac{R_1}{R_2} = \frac{a\sqrt{129}}{8\sqrt{6}} : \frac{a\sqrt{153}}{8\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{43}{51}}$.

46. (h.90) Gọi x là độ dài cạnh đáy, y là chiều cao của hình chóp ; R, r lần lượt là bán kính mặt cầu ngoại tiếp và nội tiếp hình chóp thì dễ tính được $R = \frac{x^2 + 2y^2}{4y}$,

$r = \frac{xy}{x + \sqrt{x^2 + 4y^2}}$. Vậy

$$\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{R}{r}\right)^3 = \left[\frac{\left(x^2 + 2y^2\right)\left(x + \sqrt{x^2 + 4y^2}\right)}{4xy^2}\right]^3.$$



Hình 90

Từ đó $\frac{V_1}{V_2}$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $\frac{R}{r}$ nhỏ nhất.

Gọi φ là góc giữa mặt bên và mặt đáy của hình chóp) thì $\varphi = \widehat{SIH}$ (I là trung điểm của BC). Khi đó $y = \frac{x}{2}\tan\varphi \Rightarrow 4y^2 = x^2\tan^2\varphi$, từ đó

$$\frac{R}{r} = \frac{\left(x^2 + \frac{x^2\tan^2\varphi}{2}\right)\left(x + \sqrt{x^2 + x^2\tan^2\varphi}\right)}{x^3\tan^2\varphi}$$

$$= \frac{(2 + \tan^2\varphi)\left(1 + \frac{1}{\cos\varphi}\right)}{2\tan^2\varphi} = \frac{\left(1 + \frac{1}{\cos^2\varphi}\right)\left(\frac{\cos\varphi + 1}{\cos\varphi}\right)}{2\frac{1 - \cos^2\varphi}{\cos^2\varphi}}$$

$$= \frac{1 + \cos^2\varphi}{2\cos\varphi(1 - \cos\varphi)} = \frac{1}{2}.\frac{1 + t^2}{t(1 - t)} \text{ với } 0 < t = \cos\varphi < 1.$$

Như vậy, $\frac{V_1}{V_2}$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $f(t) = \frac{1 + t^2}{t(1 - t)}$ đạt giá trị nhỏ nhất ($0 < t < 1$).

Ta có : $f'(t) = \dfrac{2t(t - t^2) - (1 - 2t)(1 + t^2)}{[t(1 - t)]^2}$

$$= \frac{2t^2 - 2t^3 - 1 + 2t - t^2 + 2t^3}{[t(1 - t)]^2} = \frac{t^2 + 2t - 1}{t^2(1 - t)^2}.$$

$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t^2 + 2t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = -1 + \sqrt{2}$ (do $0 < t < 1$)

Ta có bảng biến thiên

t	0		$-1 + \sqrt{2}$		1
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$		$\searrow$		$\nearrow$	

Vậy $f(t)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $t = -1 + \sqrt{2}$, tức là $\cos\varphi = -1 + \sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow 1 + \tan^2\varphi = \frac{1}{3 - 2\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \tan^2\varphi = \frac{1 - 3 + 2\sqrt{2}}{3 - 2\sqrt{2}} = \frac{2\left(\sqrt{2} - 1\right)}{\left(\sqrt{2} - 1\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{2} - 1} = 2\left(\sqrt{2} + 1\right)$$

$$\Leftrightarrow \tan\varphi = \sqrt{2\sqrt{2} + 2}.$$

Vậy hệ thức liên hệ giữa x và y là $y = x\dfrac{\sqrt{2\sqrt{2} + 2}}{2}$.

Khi đó $\dfrac{V_1}{V_2}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

47. • Vì $IA = IB = 2a$, $\widehat{AIB} = 120^o$ nên $AB^2 = IA^2 + IB^2 - 2IA.\,IB\cos\widehat{AIB} = 12a^2$, từ đó $AB = 2a\sqrt{3}$. Do $CD \perp$ mp(AIB) tại I, $IA = IB$ nên $CA = CB$. Kết hợp với giả thiết ABC là tam giác vuông, ta có ABC là tam giác vuông tại C và $CA = CB = \dfrac{AB}{\sqrt{2}} = a\sqrt{6}$.

Vì ABD là tam giác đều nên $AD = AB = 2a\sqrt{3}$.

Từ đó $CI^2 = AC^2 - AI^2 = 6a^2 - 4a^2 = 2a^2$, tức là $CI = a\sqrt{2}$,

$DI^2 = AD^2 - AI^2 = 12a^2 - 4a^2 = 8a^2$, tức là $DI = 2a\sqrt{2}$.

• Hai điểm C, D thuộc đường thẳng Δ vuông góc với mp(AIB) tại điểm I nên có hai trường hợp xảy ra.

Trường hợp 1. C, D nằm về hai phía đối với điểm I (h. 91a).

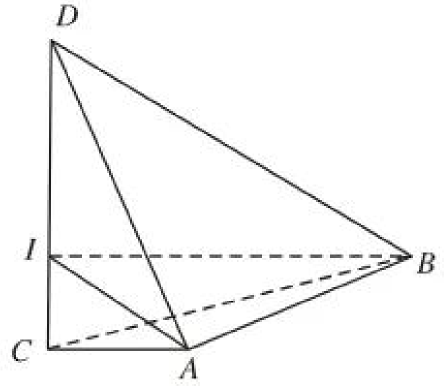
Dễ thấy $CD = 3a\sqrt{2}$, từ đó $CD^2 = 18a^2$; mặt khác $AC^2 + AD^2 = 18a^2$, tức là $CD^2 = AC^2 + AD^2$. Như vậy $\widehat{CAD} = 90^o$. Tương tự ta cũng có $\widehat{CBD} = 90^o$.

1) $V_{ABCD} = V_{D.AIB} + V_{C.AIB} = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}AI.BI \sin\widehat{AIB}.(ID + IC)$

$$= \frac{1}{3}.\frac{1}{2}.2a.2a.\frac{\sqrt{3}}{2}.3a\sqrt{2} = a^3\sqrt{6}.$$

Gọi S_{tp} là diện tích toàn phần của tứ diện $ABCD$ thì

$$S_{tp} = S_{ACD} + S_{BCD} + S_{ABC} + S_{ABD}$$
$$= 2.\frac{1}{2}CD.AI + \frac{AC^2}{2} + \frac{AB^2\sqrt{3}}{4}$$
$$= 3a\sqrt{2}.2a + \frac{1}{2}.6a^2 + 12a^2.\frac{\sqrt{3}}{4}$$
$$= 6a^2\sqrt{2} + 3a^2 + 3a^2\sqrt{3}$$
$$= 3a^2(1 + \sqrt{3} + 2\sqrt{2}).$$



Hình 91a

2) Vì $\widehat{CAD} = \widehat{CBD} = 90^o$ nên CD là đường kính của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$, từ đó bán kính mặt cầu phải tìm bằng $\frac{3a\sqrt{2}}{2}$ và diện tích mặt cầu bằng $18\pi a^2$.

3) Gọi r là bán kính mặt cầu nội tiếp tứ diện $ABCD$ thì dễ thấy $r = \frac{3V_{ABCD}}{S_{tp}}$,

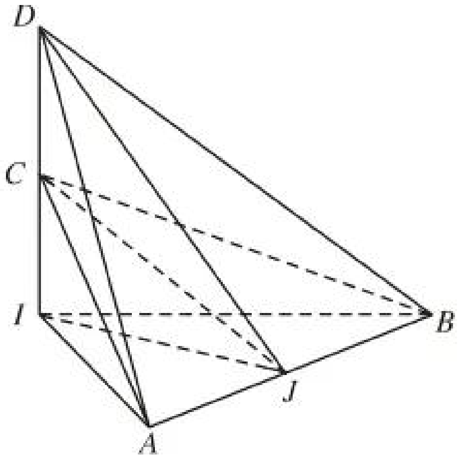
từ đó $r = \frac{3a^3\sqrt{6}}{3a^2\left(1 + \sqrt{3} + 2\sqrt{2}\right)}$

$$= \frac{a\sqrt{6}}{1 + \sqrt{3} + 2\sqrt{2}}.$$

Trường hợp 2. C, D nằm về một phía đối với điểm I (h.91b).

1) $V_{ABCD} = V_{DAIB} - V_{CAIB} = \frac{a^3\sqrt{6}}{3}$,

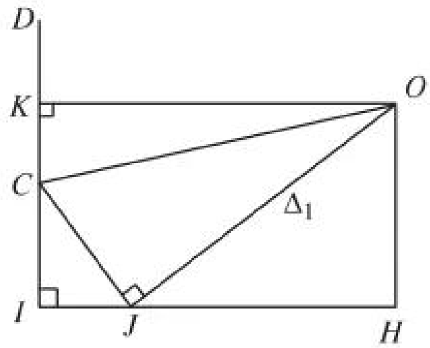
$$S_{tp} = 2a^2\sqrt{2} + 3a^2 + 3a^2\sqrt{3}$$
$$= a^2\left(3 + 2\sqrt{2} + 3\sqrt{3}\right).$$



Hình 91b

2) Gọi J là trung điểm của AB thì $JA = JB = JC$.

Xét đường thẳng Δ_1 đi qua J và vuông góc với mp(ABC). Khi đó, mọi điểm thuộc Δ_1 cách đều các điểm A, B, C và Δ_1 nằm trong mp(CDJ) (do mp(CDJ) vuông góc với mp(ABC)). Trong mp(CDJ), đường trung trực của CD cắt Δ_1 tại điểm O thì $OA = OB = OC = OD = R$ (h.91c).



Hình 91c

Ta có $IJ = a$, $CJ = a\sqrt{3}$. Kẻ $OH \perp IJ$ thì $OH = IK = \dfrac{3a\sqrt{2}}{2}$. Xét các tam giác ICJ và HJO, ta có $\sin C = \sin J$ hay

$$\frac{IJ}{JC} = \frac{OH}{JO}.\ \text{Vậy}\ JO = \frac{OH.JC}{IJ} = \frac{\dfrac{3a\sqrt{2}}{2}.a\sqrt{3}}{a} = \frac{3a\sqrt{6}}{2}.$$

Từ đó $OC^2 = CJ^2 + JO^2 = 3a^2 + \dfrac{54a^2}{4} = \dfrac{66a^2}{4}$.

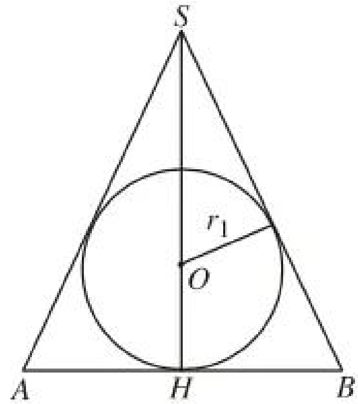
Vậy diện tích mặt cầu phải tìm là $66\pi a^2$.

3) $r = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{a^2\left(3 + 2\sqrt{2} + 3\sqrt{3}\right)} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3 + 3\sqrt{3} + 2\sqrt{2}}$.

48. (h.92)

Gọi (P) là mặt phẳng đi qua trục của hình nón thì (P) cắt hình nón theo tam giác cân SAB, cắt mặt cầu theo đường tròn lớn, đường tròn này nội tiếp tam giác cân. Khi đó, bán kính r_1 của hình cầu nội tiếp hình nón được tính bởi công thức

$$r_1 = \frac{rh}{r + \sqrt{h^2 + r^2}}.$$



Hình 92

1) Thể tích hình nón là $V_1 = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$.

Thể tích hình cầu nội tiếp hình nón là $V_2 = \dfrac{4\pi}{3}\left(\dfrac{rh}{r + \sqrt{r^2 + h^2}}\right)^3$.

Vậy $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{1}{4}\dfrac{\left(r + \sqrt{r^2 + h^2}\right)^3}{rh^2}$.

2) $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{1}{4}\dfrac{\left(\sqrt{1+\dfrac{h^2}{r^2}}+1\right)^3}{\dfrac{h^2}{r^2}} = \dfrac{1}{4}\dfrac{\left(1+\sqrt{1+x}\right)^3}{x}$, ở đó $\dfrac{h^2}{r^2} = x > 0$.

Xét $f(x) = \dfrac{\left(1+\sqrt{1+x}\right)^3}{4x}$, $f'(x) = \dfrac{\left(\sqrt{1+x}+1\right)^2\left(x-2-2\sqrt{1+x}\right)}{4.2x^2\sqrt{x+1}}$.

Vì $\dfrac{\left(\sqrt{1+x}+1\right)^2}{4.2x^2\sqrt{x+1}} > 0$ nên khi xét dấu của $f'(x)$, ta chỉ cần xét dấu của $g(x) = x - 2 - 2\sqrt{1+x}$. Ta có $g'(x) = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$.

Dễ thấy $g'(x) > 0$ vì khi $x > 0$ thì $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}} < 1$, đồng thời $g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 8$.

Vậy $g(x)$ là hàm tăng trên miền $x > 0$ và $g(8) = 0$ nên

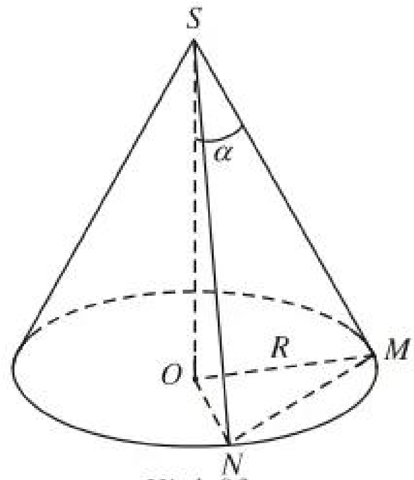
với $0 < x \leq 8$ thì $g(x) \leq 0$;

với $8 < x < +\infty$ thì $g(x) > 0$.

Bảng biến thiên của $f(x)$

x	0		8		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	+	
$f'(x)$		$-$	0	+	
$f(x)$		$\searrow$	2	$\nearrow$	

Vậy giá trị bé nhất của $\dfrac{V_1}{V_2}$ bằng 2.



Hình 93a

49. (h.93a,b)

1) Ta có $SM = \dfrac{OM}{\sin\alpha} = \dfrac{R}{\sin\alpha}$

$SO = R\cot\alpha$.

Diện tích xung quanh của hình nón là

$$S_{xq} = \pi R.\frac{R}{\sin\alpha} = \frac{\pi R^2}{\sin\alpha}.$$

Thể tích khối nón là

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2.R\cot\alpha = \frac{1}{3}\pi R^3\cot\alpha.$$

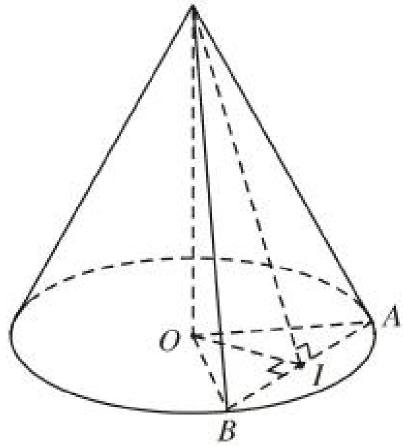
2) Giả sử (P) cắt hình nón theo thiết diện SMN và $SM \perp SN$, khi đó diện tích thiết diện là

$$S_1 = \frac{1}{2}SM.SN = \frac{R^2}{2\sin^2\alpha}.$$

3) Với I là trung điểm của AB thì $\widehat{SIO} = \beta$,

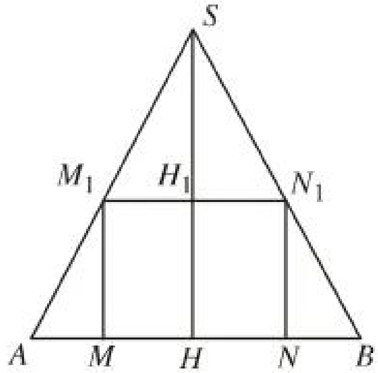
$OI = SO\cot\beta = R.\cot\alpha.\cot\beta$. Vậy điểm I thuộc đường tròn tâm O bán kính $R\cot\alpha.\cot\beta$ trong mặt phẳng chứa đáy hình nón.

Vì SI quay quanh S và dựa vào đường tròn tâm O, bán kính $R\cot\alpha.\cot\beta$ trong mặt phẳng chứa đáy hình nón đã cho nên SI thuộc một hình nón cố định với đường cao SO, đường tròn đáy của hình nón này là đường tròn nêu trên.



Hình 93b

50. (h.94) Xét mặt phẳng qua trục hình nón cắt hình nón và hình trụ nội tiếp hình nón, ta được tam giác cân SAB và hình chữ nhật MNN_1M_1 nội tiếp SAB. Ở đó $AB = 2r$, $SH = 3r$, MN bằng đường kính của đáy hình trụ, NN_1 bằng chiều cao của hình trụ.



Hình 94

Kí hiệu r_1 là bán kính đáy hình trụ, h_1 là chiều cao hình trụ, ta có $0 < r_1 < r$, $0 < h_1 < h$ và

$\frac{r_1}{r} = \frac{SH_1}{SH} = \frac{SH - h_1}{SH} = \frac{3r - h_1}{3r}$, từ đó $h_1 = 3(r - r_1)$. Khi đó

1) Thể tích hình trụ là

$$V = 3\pi r_1^2(r - r_1) = \frac{3\pi}{2}r_1.r_1(2r - 2r_1).$$

Từ đó, V đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $r_1 = \frac{2r}{3}$.

2) Diện tích xung quanh của hình trụ là

$$S = 2\pi r_1.h_1 = 3.2\pi r_1(r - r_1) = 6\pi r_1(r - r_1).$$

Từ đó S đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $r_1 = \frac{r}{2}$.

Bài tập trắc nghiệm

1. (B) ,	**2**. (C) ,	**3**. (D) ,	**4**. (D) ,	**5**. (D) ,	**6**. (A) ,
7. (C) ,	**8**. (D) ,	**9**. (C) ,	**10**. (B) ,	**11**. (A) ,	**12**. (C) ,
13. (B) ,	**14**. (D) ,	**15**. (B) ,	**16**. (A) ,	**17**. (D) ,	**18**. (C) ,
19. (B) ,	**20**. (D) ,	**21**. (B) ,	**22**. (A) ,	**23**. (B) ,	**24**. (C) ,
25. (D) ,	**26**. (A) ,	**27**. (B) ,	**28**. (A) ,	**29**. (A) ,	**30**. (A).