Ôn tập chương III

Bài tập tự luận

89. a) Xét hai vectơ : $\vec{u} = (1\ ;\ 1\ ;\ 1)$ và $\vec{v} = (\sqrt{5x+2}\ ;\ \sqrt{5y+2}\ ;\ \sqrt{5z+2})$.

Ta có $\quad |\vec{u}| = \sqrt{3}$, $|\vec{v}| = \sqrt{5(x+y+z)+6} = 6$,

$\vec{u}.\vec{v} = \sqrt{5x+2} + \sqrt{5y+2} + \sqrt{5z+2}.$

Áp dụng bất đẳng thức $|\vec{u}.\vec{v}| \le |\vec{u}|.|\vec{v}|$ suy ra đpcm .

b) Xét hai vectơ : $\vec{u} = \left(\sin x ; 1 ; \sqrt{2-\sin^2 x}\right)$ và $\vec{v} = (1 ; \sqrt{2-\sin^2 x} ; \sin x)$.

Từ $|\vec{u}.\vec{v}| \le |\vec{u}|.|\vec{v}|$ suy ra đpcm.

c) Xét hai vectơ : $\vec{u}=\left(\sqrt{x+m};\sqrt{x+n};\sqrt{m+n}\right)$ và $\vec{v}=(1\ ;\ 1\ ;\ 1)$.

Ta có $\left|\vec{u}\right|=\sqrt{2}$, $\left|\vec{v}\right|=\sqrt{3}$ suy ra $f(x)=\vec{u}.\vec{v}\le\left|\vec{u}\right|\left|\vec{v}\right|=\sqrt{6}$.

Dấu bằng xảy ra khi $\vec{u}$, $\vec{v}$ cùng hướng, nghĩa là

$$\frac{\sqrt{x+m}}{1}=\frac{\sqrt{x+n}}{1}=\frac{\sqrt{m+n}}{1}>0\Leftrightarrow x=m=n>0.$$

Kết hợp với $x+m+n=1$ suy ra $x=m=n=\frac{1}{3}$

Vậy $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất bằng $\sqrt{6}$ khi $x=m=n=\frac{1}{3}$.

d) Đặt $\vec{u}=(x+1\ ;\ y\ ;\ 2)$, $\vec{v}=(-x\ ;\ -y-1\ ;\ 1)$, ta có $\vec{u}+\vec{v}=(1;-1;3)$.

Áp dụng bất đẳng thức $\left|\vec{u}+\vec{v}\right|\le\left|\vec{u}\right|+\left|\vec{v}\right|$, ta suy ra

$$A=\sqrt{(x+1)^2+y^2+4}+\sqrt{x^2+(y+1)^2+1}\ge\sqrt{11}.$$

Dấu bằng xảy ra khi $\vec{u},\vec{v}$ cùng hướng, nghĩa là

$$\frac{x+1}{-x}=\frac{y}{-y-1}=\frac{2}{1}>0\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\dfrac{1}{3}\\ y=-\dfrac{2}{3}.\end{cases}$$

Vậy A đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\sqrt{11}$ khi $x=-\frac{1}{3}, y=-\frac{2}{3}$.

e) Trong không gian $Oxyz$, ta lấy các điểm $A(1\ ;\ 1\ ;\ -1)$, $B(-1\ ;\ 1\ ;\ 1)$ và $M(x\ ;\ y\ ;\ z)$. Khi đó $AB=2\sqrt{2}$ và

$$MA=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2+(z+1)^2}\ ,\ MB=\sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2}\ .$$

Từ bất đẳng thức $MA+MB\ge AB$, ta suy ra

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2+(z+1)^2}+\sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2}\ge2\sqrt{2}.$$

Dấu = xảy ra khi M nằm giữa hai điểm A, B hay $\overrightarrow{AM}=t\overrightarrow{AB}, 0\le t\le1$. nghĩa là

$$\begin{cases}x-1=-2t\\ y-1=0\\ z+1=2t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1-2t\\ y=1\\ z=-1+2t\end{cases}\qquad 0\le t\le1.$$

90. a) Đường thẳng d đi qua điểm (12 ; 9 ; 1) và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_d}(4 ; 3 ; 1)$.

Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P} = (3 ; 5 ; -1)$.

Vì $\overrightarrow{u_d}.\overrightarrow{n_P} = 4.3 + 3.5 + 1.(-1) = 26 \neq 0$ nên d cắt (P).

Gọi A là giao điểm của d với (P), toạ độ điểm $A(x ; y ; z)$ thoả mãn hệ

$$\begin{cases} x = 12 + 4t \\ y = 9 + 3t \\ z = 1 + t \\ 3x + 5y - z - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow t = -3 \Rightarrow A = (0 ; 0 ; -2).$$

Gọi α là góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P), ta có :

$$\sin\alpha = \frac{\left|\overrightarrow{u_d}.\overrightarrow{n_P}\right|}{\left|\overrightarrow{u_d}\right|.\left|\overrightarrow{n_P}\right|} = \frac{26}{\sqrt{26}.\sqrt{35}} = \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{35}}.$$

b) Mặt phẳng (P) vuông góc với d nên có vectơ pháp tuyến là vectơ chỉ phương của d. Do đó, (P) có phương trình :

$$4(x-1) + 3(y-2) + 1(z+1) = 0 \text{ hay } 4x + 3y + z - 9 = 0.$$

c) Hình chiếu d' của d trên mp(P) là giao tuyến của mp(P) và mp(Q), với (Q) đi qua d và vuông góc với (P). Như vậy, (Q) có vectơ pháp tuyến là :

$$\overrightarrow{n_Q} = \left[\overrightarrow{u_d}, \overrightarrow{n_P}\right] = \left(\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}\right) = (-8 ; 7 ; 11).$$

Phương trình tổng quát của mp(Q) là

$$-8(x-12) + 7(y-9) + 11(z-1) = 0 \text{ hay } 8x - 7y - 11z - 22 = 0.$$

Vậy hình chiếu d' của d trên mp(P) là giao tuyến của hai mặt phẳng :

$$3x + 5y - z - 2 = 0 \text{ và } 8x - 7y - 11z - 22 = 0.$$

Đường thẳng d' có phương trình tham số là

$$\begin{cases} x = 62t \\ y = -25t \\ z = -2 + 61t. \end{cases}$$

d) (P) là mặt phẳng trung trực của BB' khi và chỉ khi $BB' \perp (P)$ và giao điểm của BB' với (P) là trung điểm của đoạn thẳng BB'.

Ta có phương trình đường thẳng BB' là

$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 5t \\ z = -1 - t. \end{cases}$$

Gọi H là giao điểm của BB' với (P) thì toạ độ $(x\,;\,y\,;\,z)$ của H thoả mãn hệ :

$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 5t \\ z = -1 - t \\ 3x + 5y - z - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow t = -\frac{2}{35} \Rightarrow H = \left(\frac{29}{35}\,;\,-\frac{2}{7}\,;\,-\frac{33}{35}\right).$$

H là trung điểm của BB' nên

$$\begin{cases} x_B = 2x_H - x_B = \dfrac{23}{35} \\ y_B = 2y_H - y_B = -\dfrac{4}{7} \\ z_B = 2z_H - z_B = -\dfrac{31}{35} \end{cases} \Rightarrow B = \left(\frac{23}{35};-\frac{4}{7};-\frac{31}{35}\right).$$

e) Đường thẳng Δ phải tìm nằm trong mp(P), đồng thời nằm trong mặt phẳng (R) đi qua $A(0\,;\,0\,;\,-2)$ và vuông góc với d.

Mặt phẳng (R) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_R} = (4\,;\,3\,;\,1)$ nên có phương trình

$$4x + 3y + z + 2 = 0.$$

Vậy Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng $3x + 5y - z - 2 = 0$ và $4x + 3y + z + 2 = 0$, suy ra Δ có phương trình tham số là

$$\begin{cases} x = 8t \\ y = -7t \\ z = -2 - 11t. \end{cases}$$

91. a) Vì $\overrightarrow{n_\alpha} = (2\,;\,-1\,;\,3)$, $\overrightarrow{n_{\alpha'}} = (1\,;\,-1\,;\,1)$ nên $\overrightarrow{n_\alpha}$ và $\overrightarrow{n_{\alpha'}}$ không cùng phương, do đó hai mặt phẳng (α) và (α') cắt nhau.

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng đó, ta có :

$$\cos\varphi = \frac{\left|\overrightarrow{n_\alpha}.\overrightarrow{n_{\alpha'}}\right|}{\left|\overrightarrow{n_\alpha}\right|.\left|\overrightarrow{n_{\alpha'}}\right|} = \frac{|2.1 + (-1)(-1) + 3.1|}{\sqrt{4+1+9}.\sqrt{1+1+1}} = \frac{6}{\sqrt{14}.\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{14}}.$$

b) $M(x; y; z)$ thuộc Δ khi và chỉ khi toạ độ của M thoả mãn hệ phương trình :

$$\begin{cases} 2x - y + 3z + 1 = 0 \\ x - y + z + 5 = 0. \end{cases}$$

Đặt $z = t$, ta có

$$\begin{cases} 2x - y = -1 - 3t \\ x - y = -5 - t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 - 2t \\ y = 9 - t. \end{cases}$$

Vậy phương trình tham số của đường thẳng Δ là

$$\begin{cases} x = 4 - 2t \\ y = 9 - t \\ z = t. \end{cases}$$

c) Vì H là giao điểm của đường thẳng đi qua M, vuông góc với (α) và (α) nên toạ độ $(x\,;\,y\,;\,z)$ của H thoả mãn hệ :

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -t \\ z = 5 + 3t \\ 2x - y + 3z + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow t = -\frac{9}{7} \Rightarrow H = \left(-\frac{11}{7}\,;\,\frac{9}{7}\,;\,\frac{8}{7}\right).$$

Vì K là giao điểm của đường thẳng đi qua M, vuông góc với (α') và (α') nên toạ độ $(x\,;\,y\,;\,z)$ của K thoả mãn hệ :

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -t \\ z = 5 + t \\ x - y + z + 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow t = -\frac{11}{3} \Rightarrow K = \left(-\frac{8}{3}\,;\,\frac{11}{3}\,;\,\frac{4}{3}\right).$$

Vậy $HK = \sqrt{\left(-\frac{8}{3} + \frac{11}{7}\right)^2 + \left(\frac{11}{3} - \frac{9}{7}\right)^2 + \left(\frac{4}{3} - \frac{8}{7}\right)^2}$

$$= \sqrt{\left(\frac{23}{21}\right)^2 + \left(\frac{50}{21}\right)^2 + \left(\frac{4}{21}\right)^2} = \frac{\sqrt{3045}}{21}.$$

d) Δ là đường thẳng đi qua $M_o(4\ ;\ 9\ ;\ 0)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_\Delta}(-2\,;-1\,;1)$.

Ta có $\overrightarrow{M_oM} = (-3\ ;\ -9\ ;\ 5)$, suy ra

$$\left[\overrightarrow{M_oM},\overrightarrow{u_\Delta}\right] = \left(\begin{vmatrix}-9 & 5\\-1 & 1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}5 & -3\\1 & -2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-3 & -9\\-2 & -1\end{vmatrix}\right) = (-4\ ;\ -7\ ;\ -15).$$

Vậy $d(M,\Delta) = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{M_oM},\overrightarrow{u_\Delta}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{u_\Delta}\right|} = \dfrac{\sqrt{(-4)^2+(-7)^2+(-15)^2}}{\sqrt{(-2)^2+(-1)^2+1^2}} = \dfrac{\sqrt{145}}{\sqrt{3}}.$

e) Gọi (β) là mặt phẳng đi qua M và vuông góc với Δ. Phương trình của (β) là $-2(x-1)-1(y-0)+1(z-5)=0$ hay $2x+y-z+3=0$.

Gọi $J(x\ ;\ y\ ;\ z)$ là giao điểm của đường thẳng Δ với mặt phẳng (β). Toạ độ của J thoả mãn hệ

$$\begin{cases}x = 4-2t\\ y = 9-t\\ z = t\\ 2x+y-z+3=0\end{cases} \Rightarrow t = \frac{10}{3} \Rightarrow J = \left(-\frac{8}{3}\ ;\ \frac{17}{3}\ ;\ \frac{10}{3}\right).$$

MJ chính là đường thẳng qua M, vuông góc và cắt đường thẳng Δ ; nó có phương trình chính tắc là

$$\frac{x-1}{11} = \frac{y}{-17} = \frac{z-5}{5}.$$

g) Gọi (R) là mặt phẳng qua Δ (giao tuyến của (α) và (α')) và vuông góc với mp(P): $3x-y+1=0$. Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P} = (3\ ;\ -1\ ;\ 0)$.

Khi đó (R) đi qua điểm $M_o = (4\ ;\ 9\ ;\ 0)$ và có vectơ pháp tuyến

$$\overrightarrow{n_R} = \left[\overrightarrow{u_\Delta},\overrightarrow{n_P}\right] = \left(\begin{vmatrix}-1 & 1\\-1 & 0\end{vmatrix};\begin{vmatrix}1 & -2\\0 & 3\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-2 & -1\\3 & -1\end{vmatrix}\right) = (1\ ;\ 3\ ;\ 5).$$

Vậy phương trình của mp(R) là

$$1(x-4)+3(y-9)+5(z-0)=0 \text{ hay } x+3y+5z-31=0.$$

92. a) Đường thẳng Δ đi qua $N_o\ (3\ ;\ -1\ ;\ 4)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}(1\,;2\,;0)$.

Đường thẳng Δ' đi qua $N_o\,(-2\ ;\ 0\ ;\ 2)$ và có vectơ chỉ phương

$$\overrightarrow{u'} = \left(\begin{vmatrix}-3 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}1 & -3\\ 1 & 1\end{vmatrix}\right) = (2\ ;\ 2\ ;\ 4).$$

Ta có $\left[\vec{u},\overrightarrow{u'}\right] = (8\ ;\ -4\ ;\ -2)$, $\overrightarrow{N_oN_o} = (-5\ ;\ 1\ ;\ -2)$, suy ra

$$\left[\vec{u},\overrightarrow{u'}\right].\overrightarrow{N_oN_o} = 8(-5) + (-4).1 - 2(-2) = -40 \neq 0.$$

Vậy Δ và Δ' chéo nhau.

b) Gọi (P) là mặt phẳng chứa Δ' và song song với Δ, khi đó (P) đi qua điểm $N'_o(-2\ ;\ 0\ ;\ 2) \in \Delta'$ và có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P} = \dfrac{1}{2}\left[\vec{u},\overrightarrow{u'}\right] = (4\ ;\ -2\ ;\ -1)$.

Vậy phương trình mp(P) là :

$$4(x+2) - 2(y-0) - 1(z-2) = 0 \text{ hay } 4x - 2y - z + 10 = 0.$$

c) Gọi (Q) là mặt phẳng qua $M_o(1\ ;\ 1\ ;\ 2)$ và vuông góc với Δ. Khi đó, (Q) nhận vectơ $\vec{u} = (1\ ;\ 2\ ;\ 0)$ làm vectơ pháp tuyến. Vậy (Q) có phương trình :

$$1(x-1) + 2(y-1) = 0 \text{ hay } x + 2y - 3 = 0.$$

d) Gọi d là đường thẳng qua M_o, cắt cả Δ và Δ'. Khi đó, d là giao tuyến của hai mặt phẳng $(\beta) = (M_o, \Delta)$ và $(\beta') = (M_o, \Delta')$.

Mặt phẳng (β) đi qua $M_o(1\,;1\,;2)$ và có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_\beta} = \left[\overrightarrow{M_oN_o},\vec{u}\right]$.

Ta có $\overrightarrow{M_oN_o} = (2\ ;\ -2\ ;\ 2)$, $\vec{u} = (1\ ;\ 2\ ;\ 0)$, suy ra

$$\overrightarrow{n_\beta} = \left(\begin{vmatrix}-2 & 2\\ 2 & 0\end{vmatrix};\begin{vmatrix}2 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}2 & -2\\ 1 & 2\end{vmatrix}\right) = (-4\ ;\ 2\ ;\ 6).$$

Vậy phương trình mp(β) là :

$$-4(x-1) + 2(y-1) + 6(z-2) = 0 \quad \text{hay} \quad -2x + y + 3z - 5 = 0.$$

Mặt phẳng (β') đi qua $M_o(1\,;1\,;2)$ và có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_{\beta'}} = \left[\overrightarrow{M_oN'_o},\overrightarrow{u'}\right]$.

Ta có $\overrightarrow{M_oN_o} = (-3\ ;\ -1\ ;\ 0)$, $\overrightarrow{u'} = (2\ ;\ 2\ ;\ 4)$, suy ra

$$\left[\overrightarrow{M_oN_o},\vec{u'}\right] = \left(\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 2 & 4\end{vmatrix};\begin{vmatrix}0 & -3\\ 4 & 2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-3 & -1\\ 2 & 2\end{vmatrix}\right) = (-4\ ;\ 12\ ;\ -4).$$

Ta chọn một vectơ pháp tuyến khác của (β') là (1 ; –3 ; 1), từ đó (β') có phương trình là :

$$1(x-1)-3(y-1)+1(z-2)=0 \quad \text{hay} \quad x-3y+z=0.$$

Dễ thấy rằng đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng

$$-2x+y+3z-5=0 \quad \text{và} \quad x-3y+z=0$$

thoả mãn bài toán. Do đó, phương trình tham số của d là

$$\begin{cases} x=-3+2t\\ y=-1+t\\ z=t. \end{cases}$$

Dễ thấy d cắt cả Δ và Δ'.

e) $d(\Delta, \Delta') = \dfrac{\left|\left[\vec{u},\vec{u'}\right].\overrightarrow{N_oN'_o}\right|}{\left|\left[\vec{u},\vec{u'}\right]\right|} = \dfrac{20}{\sqrt{21}}.$

g) Gọi đường vuông góc chung của Δ và Δ' là δ. Khi đó, vectơ chỉ phương của δ là $\overrightarrow{u_\delta} = \dfrac{1}{2}\left[\vec{u},\vec{u'}\right] = (4\,;-2\,;-1)$.

Gọi (β_1) là mp(Δ, δ) thì (β_1) đi qua N_o và có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_1} = \left[\vec{u},\overrightarrow{u_\delta}\right] = (-2\,;1\,;-10)$. Vậy phương trình của ($\beta_1$) là

$$-2(x-3)+1(y+1)-10(z-4)=0 \text{ hay } 2x-y+10z-47=0.$$

Gọi (β_2) là mp(Δ', δ) thì (β_2) đi qua N'_o và có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_2} = \left[\vec{u'},\overrightarrow{u_\delta}\right] = (6\,;18\,;-12)$. Vậy ($\beta_2$) có phương trình là

$$(\beta_2) : x+3y-2z+6=0.$$

Do đó, đường vuông góc chung δ của Δ và Δ' là giao tuyến của hai mặt phẳng :

$$2x-y+10z-47=0 \text{ và } x+3y-2z+6=0.$$

Phương trình tham số của δ là $\begin{cases} x = \dfrac{23}{7} - 4t \\ y = -\dfrac{3}{7} + 2t \\ z = 4 + t. \end{cases}$

93. a) Ta có $\overrightarrow{AB} = (2 ; 3 ; -1)$, $\overrightarrow{AC} = (7 ; 0 ; -7)$, suy ra

$$\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = \left(\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & -7 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -7 & 7 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 0 \end{vmatrix}\right) = (-21 ; 7 ; -21).$$

Lại có $\overrightarrow{AD} = (0 ; 7 ; -7)$ nên $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD} = 49 + 147 \neq 0.$

Do đó A, B, C, D là các đỉnh của một tứ diện.

b) $V_{ABCD} = \dfrac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right| = \dfrac{196}{6} = \dfrac{98}{3}.$

c) Gọi $I(x ; y ; z)$ là tâm của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện, ta có :

$$\begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IA^2 = IC^2 \\ IA^2 = ID^2. \end{cases}$$

Từ đó suy ra $x = -2, y = 1, z = -5$. Vậy $I = (-2 ; 1 ; -5)$ và $R = IA = 7$.

Do đó, mặt cầu (S) ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ có phương trình :

$$(S) : (x+2)^2 + (y-1)^2 + (z+5)^2 = 49.$$

d) Dạng tham số của đường thẳng d là : $\begin{cases} x = -5 + 3t \\ y = -11 + 5t \\ z = 9 - 4t. \end{cases}$

Toạ độ $(x ; y ; z)$ của giao điểm của d và (S) thoả mãn hệ :

$$\begin{cases} x = -5 + 3t \\ y = -11 + 5t \\ z = 9 - 4t \\ (x+2)^2 + (y-1)^2 + (z+5)^2 = 49 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (3t-3)^2 + (5t-12)^2 + (-4t+14)^2 = 49$$

$$\Leftrightarrow t^2 - 5t + 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = 3. \end{array}\right.$$

Khi $t = 2$ thì $x = 1$; $y = -1$; $z = 1$, ta được điểm $M(1 ; -1 ; 1)$.

Khi $t = 3$ thì $x = 4$; $y = 4$; $z = -3$, ta được điểm $N(4 ; 4 ; -3)$.

Vậy d cắt (S) tại hai điểm $M(1 ; -1 ; 1)$ và $N(4 ; 4 ; -3)$.

e) Gọi (P) là mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu (S) tại M. Khi đó, (P) đi qua điểm $M(1 ; -1 ; 1)$ và có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P} = \overrightarrow{IM} = (3 ; -2 ; 6)$.

Vậy phương trình của (P) là : $3(x-1) - 2(y+1) + 6(z-1) = 0$ hay

$$3x - 2y + 6z - 11 = 0.$$

Gọi (Q) là mặt phẳng tiếp xúc với (S) tại N. Khi đó, mp(Q) đi qua điểm $N(4 ; 4 ; -3)$ và có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_Q} = \overrightarrow{IN} = (6 ; 3 ; 2)$.

Vậy phương trình của (Q) là : $6(x-4) + 3(y-4) + 2(z+3) = 0$ hay

$$6x + 3y + 2z - 30 = 0.$$

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q), ta có

$$\cos\varphi = \frac{\left|\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{n_Q}\right|}{\left|\overrightarrow{n_P}\right|\left|\overrightarrow{n_Q}\right|} = \frac{|18 - 6 + 12|}{\sqrt{9 + 4 + 36}.\sqrt{36 + 9 + 4}} = \frac{24}{49}.$$

94. Ta chọn hệ toạ độ $Oxyz$ có gốc là đỉnh A, tia Ox chứa AB, tia Oy chứa AD và tia Oz chứa AA' (h.105). Khi đó :

$A = (0 ; 0 ; 0)$ $\quad A' = (0 ; 0 ; a)$

$B = (a ; 0 ; 0)$ $\quad B' = (a ; 0 ; a)$

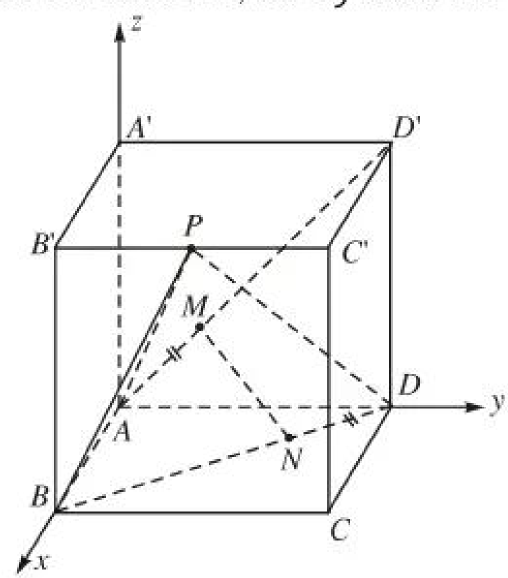
$D = (0 ; a ; 0)$ $\quad D' = (0 ; a ; a)$

$C = (a ; a ; 0)$ $\quad C' = (a ; a ; a)$

$P = \left(a ; \frac{a}{2} ; a\right)$

a) Ta có $\overrightarrow{AP} = \left(a ; \frac{a}{2} ; a\right)$,

$\overrightarrow{BC'} = (0 ; a ; a)$.



Hình 105

Gọi α là góc giữa hai đường thẳng AP và BC, ta có :

$$\cos\alpha = \frac{\left|0 + \frac{a^2}{2} + a^2\right|}{\sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4} + a^2}.\sqrt{a^2 + a^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha = 45^{\circ}.$$

b) Ta có : $\overrightarrow{AP} = \left(a\ ;\ \frac{a}{2}\ ;\ a\right)$, $\overrightarrow{AB} = (a\ ;0\ ;0)$, $\overrightarrow{AC} = (a\ ;\ a\ ;\ a)$

$$\Rightarrow \left[\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AB}\right] = \left(\begin{vmatrix} \frac{a}{2} & a \\ 0 & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a & a \\ 0 & a \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a & \frac{a}{2} \\ a & 0 \end{vmatrix}\right) = \left(0\ ;\ a^2\ ;\ -\frac{a^2}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \left[\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AB}\right].\overrightarrow{AC} = 0 + a^3 - \frac{a^3}{2} = \frac{a^3}{2}.$$

Vậy $V_{APBC} = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AB}\right].\overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{6}.\frac{a^3}{2} = \frac{a^3}{12}.$

c) Mặt phẳng $(A'D'CB)$ song song với trục Oy nên có phương trình :

$$px + qz + n = 0 \qquad (n \neq 0,\ p^2 + q^2 > 0).$$

Vì mặt phẳng này đi qua A', B, C nên ta xác định được $p = q$ và $n = -pa.$

Cho $p = 1$, ta được phương trình mp$(A'D'CB)$ là $x + z - a = 0$. Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng này là $\vec{n} = (1\ ;0\ ;1)$.

Từ giả thiết $M \in AD'$, $N \in DB$; $AM = DN = k$, ta tính được :

$$M = \left(0\ ;\ \frac{k}{\sqrt{2}}\ ;\ \frac{k}{\sqrt{2}}\right), N = \left(\frac{k}{\sqrt{2}}\ ;\ \frac{a\sqrt{2} - k}{\sqrt{2}}\ ;0\right).$$

Suy ra $\overrightarrow{MN} = \left(\frac{k}{\sqrt{2}}\ ;\ \frac{a\sqrt{2} - 2k}{\sqrt{2}}\ ;\ -\frac{k}{\sqrt{2}}\right).$

Ta có $\overrightarrow{MN}.\vec{n} = 1.\frac{k}{\sqrt{2}} + 0\left(\frac{a\sqrt{2} - 2k}{\sqrt{2}}\right) + 1.\left(-\frac{k}{\sqrt{2}}\right) = 0 \Rightarrow \overrightarrow{MN} \perp \vec{n}.$

Rõ ràng $N \notin$ mp$(A'D'CB)$. Suy ra MN song song với mp$(A'D'CB)$.

d) Ta có $MN^2 = \left(\dfrac{k}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\dfrac{a\sqrt{2} - 2k}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(-\dfrac{k}{\sqrt{2}}\right)^2$

$$= 3k^2 - 2a\sqrt{2}\,k + a^2$$

$$= 3\left[\left(k - \frac{a\sqrt{2}}{3}\right)^2 + \frac{a^2}{9}\right] \geq 3\frac{a^2}{9} = \frac{a^2}{3}.$$

MN^2 nhỏ nhất bằng $\dfrac{a^2}{3}$ khi $k = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$ (thoả mãn điều kiện $0 < k < a\sqrt{2}$).

Vậy MN ngắn nhất bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$ khi $k = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$.

e) Khi MN ngắn nhất thì $k = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. Khi đó $\overrightarrow{MN} = \left(\dfrac{a}{3}\,;\,\dfrac{a}{3}\,;\,\dfrac{-a}{3}\right)$.

Ta lại có $\overrightarrow{AD'} = (0\,;\,a\,;\,a)$, $\overrightarrow{DB} = (a\,;\,-a\,;\,0)$ nên $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AD'} = 0, \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{DB} = 0$.

Vậy MN là đường vuông góc chung của AD' và DB.

Mặt khác $\overrightarrow{A'C} = (a\,;\,a\,;\,-a) = 3\overrightarrow{MN}$, chứng tỏ $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{A'C}$ cùng phương.

Do $N \notin A'C$ nên $MN \,//\, A'C$.

95. a) Mặt phẳng (ABC) có phương trình theo đoạn chắn là $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} + \dfrac{z}{3} = 1$ nên có phương trình tổng quát

$$3x + 2y + 2z - 6 = 0.$$

Mặt phẳng này có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (3\,;\,2\,;\,2)$.

Mặt phẳng $(A'B'C')$ có phương trình theo đoạn chắn là $\dfrac{x}{6} + \dfrac{y}{4} + \dfrac{z}{4} = 1$ nên có phương trình tổng quát

$$2x + 3y + 3z - 12 = 0.$$

Mặt phẳng này có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n'} = (2\,;\,3\,;\,3)$.

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng đó, ta có

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{n}.\overrightarrow{n'}|}{|\vec{n}|.|\overrightarrow{n'}|} = \frac{|6 + 6 + 6|}{\sqrt{17}.\sqrt{22}} = \frac{18}{\sqrt{374}}.$$

b) Gọi Δ là giao tuyến của (ABC) và $(A'B'C')$. Điểm $M(x;\,y;\,z) \in \Delta$ nên toạ độ của M là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} 3x + 2y + 2z - 6 = 0 \\ 2x + 3y + 3z - 12 = 0. \end{cases}$$

Cho $z = 0$, ta tính được $x = -\frac{6}{5}, y = \frac{24}{5}$.

Vậy điểm $I\left(-\frac{6}{5}\ ;\ \frac{24}{5}\ ;\ 0\right)$ thuộc Δ và vectơ chỉ phương của Δ là

$$\overrightarrow{u_\Delta} = \frac{1}{5}\left[\vec{n}, \vec{n'}\right] = (0\ ; -1\ ; 1).$$

Gọi d là khoảng cách từ O tới Δ, ta có : $d = \frac{\left\|\left[\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{u_\Delta}\right]\right\|}{\left|\overrightarrow{u_\Delta}\right|}$.

Vì $\overrightarrow{OI} = \left(-\frac{6}{5}\ ;\ \frac{24}{5}\ ;\ 0\right)$, $\left[\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{u_\Delta}\right] = \left(\frac{24}{5}\ ; \frac{6}{5}\ ; \frac{6}{5}\right)$ nên

$$d(O\ ; \Delta) = \frac{\sqrt{\left(\frac{24}{5}\right)^2 + \left(\frac{6}{5}\right)^2 + \left(\frac{6}{5}\right)^2}}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{18}{5}.$$

c) Gọi G là trọng tâm tam giác ABC, ta có $G = \left(\frac{2}{3}\ ;\ 1\ ;\ 1\right)$. Vectơ pháp tuyến của mp($A'B'C'$) là $\vec{n'} = (2\ ;\ 3\ ;\ 3) = 3\overrightarrow{OG}$. Vậy đường thẳng OG vuông góc với mp($A'B'C'$).

Mặt khác, tứ diện $OA'B'C'$ vuông tại O nên trực tâm H của tam giác $A'B'C'$ là hình chiếu vuông góc của O trên mp($A'B'C'$). Do đó, O, G, H thẳng hàng.

Để xác định toạ độ của H, ta giải hệ

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 3t \\ z = 3t \\ 2x + 3y + 3z - 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow t = \frac{6}{11} \Rightarrow H = \left(\frac{12}{11}\ ;\ \frac{18}{11}\ ;\ \frac{18}{11}\right).$$

d) Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên mp(ABC). Toạ độ của H thoả mãn hệ

$$\begin{cases} x = 3t \\ y = 2t \\ z = 2t \\ 3x + 2y + 2z - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow t = \frac{6}{17} \Rightarrow H = \left(\frac{18}{17}\ ;\ \frac{12}{17}\ ;\ \frac{12}{17}\right).$$

Gọi O' là điểm đối xứng của O qua mp(ABC). Vì H là trung điểm của OO' nên $O' = \left(\frac{36}{17}\ ;\ \frac{24}{17}\ ;\ \frac{24}{17}\right)$.

Thay toạ độ của O' vào phương trình mp($A'B'C'$), ta thấy không thoả mãn, vậy O' không thuộc mp($A'B'C'$).

e) Giả sử (S) có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0$.

Vì A, A', B, $C \in$ (S) nên ta có hệ :

$$\begin{cases} 4 + 4a + d = 0 \\ 36 + 12a + d = 0 \\ 9 + 6b + d = 0 \\ 9 + 6c + d = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = c = -\dfrac{7}{2} \\ d = 12. \end{cases}$$

Vậy (S) có phương trình : $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 7y - 7z + 12 = 0$.

(S) có tâm $K = \left(4\ ;\ \frac{7}{2}\ ;\ \frac{7}{2}\right)$ và $R = \frac{\sqrt{114}}{2}$.

Toạ độ B', C' cũng thoả mãn (S) nên mặt cầu (S) cũng đi qua B', C'.

g) Gọi (α) là mặt phẳng song song với (Oxy) có phương trình $z + D = 0$ ($D \neq 0$). Khi đó (α) tiếp xúc với (S) khi và chỉ khi $d(K, (\alpha)) = R$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{7}{2} + D\right| = \frac{\sqrt{114}}{2} \Rightarrow D = -\frac{7}{2} \pm \frac{\sqrt{114}}{2}.$$

Vậy có hai mặt phẳng tiếp xúc mặt cầu (S) và song song với mp(Oxy) là :

$$z - \frac{7}{2} \pm \frac{\sqrt{114}}{2} = 0.$$

Bài tập trắc nghiệm

1. (A),	2. (C),	3. (B),	4. (C),	5. (D),	6. (B),
7. (A),	8. (D),	9. (B),	10. (A),	11. (B),	12. (C),
13. (D),	14. (A),	15. (A),	16. (A),	17. (B),	18. (C),
19. (C),	20. (D),	21. (A),	22. (B),	23. (A),	24. (B),
25. (D),	26. (B),	27. (C),	28. (A),	29. (A),	30. (B),
31. (D),	32. (D).				