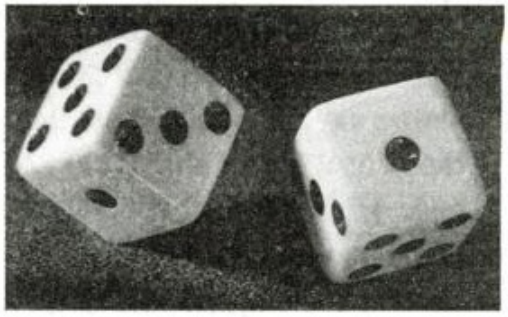
§ 4 BIẾN CỐ VÀ XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ

1. Biến cố

a) Phép thử ngẫu nhiên và không gian mẫu

Khi gieo một con súc sắc(*), số chấm trên mặt xuất hiện được coi là kết quả của việc gieo súc sắc. Ta nhận thấy rằng rất khó đoán trước được kết quả của mỗi lần gieo. Nó có thể là bất kì một con số nào trong tập hợp {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Ta gọi việc gieo con súc sắc nói trên là một phép thử ngẫu nhiên.



(*) Con súc sắc là một khối lập phương mà sáu mặt lần lượt có 1, 2, ..., 6 chấm. Mặt có k chấm gọi là mặt k chấm.

Phép thử ngẫu nhiên (gọi tắt là phép thử) là một thí nghiệm hay một hành động mà :

– Kết quả của nó không đoán trước được ;

– Có thể xác định được tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra của phép thử đó.

Phép thử thường được kí hiệu bởi chữ T.

Tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra của phép thử được gọi là **không gian mẫu** của phép thử và được kí hiệu bởi chữ Ω (đọc là ô-mê-ga).

Ví dụ 1. Không gian mẫu của phép thử "Gieo một con súc sắc" là tập hợp

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Ví dụ 2. Xét phép thử T là "Gieo hai đồng xu(*) phân biệt". Nếu dùng kí hiệu S để chỉ đồng xu lật sấp (mặt sấp xuất hiện) và N để chỉ đồng xu lật ngửa thì không gian mẫu của phép thử trên là

$$\Omega = \{SN, SS, NN, NS\}.$$

H1 *Cho phép thử T là "Gieo ba đồng xu phân biệt". Hãy cho biết không gian mẫu của phép thử đó.*

b) Biến cố

Ví dụ 3. Giả sử T là phép thử "Gieo một con súc sắc".

Không gian mẫu là $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Xét biến cố (hay sự kiện) A : "Số chấm trên mặt xuất hiện là một số chẵn". Ta thấy việc xảy ra hay không xảy ra biến cố A tuỳ thuộc vào kết quả của T. Biến cố A xảy ra khi và chỉ khi kết quả của T là 2, hoặc 4, hoặc 6. Các kết quả này được gọi là các kết quả thuận lợi cho A. Do đó biến cố A được mô tả bởi tập hợp $\Omega_A = \{2, 4, 6\}$, đó là một tập con của Ω.

Biến cố A được gọi là biến cố liên quan đến phép thử T.

(*) Đồng xu là đồng tiền kim loại có hai mặt, trên một mặt có ghi giá trị của đồng tiền : người ta thường gọi đó là mặt ngửa. Mặt kia là mặt sấp.

Một cách tổng quát :

> Biến cố A **liên quan đến phép thử** T là biến cố mà việc xảy ra hay không xảy ra của A tuỳ thuộc vào kết quả của T.
>
> Mỗi kết quả của phép thử T làm cho A xảy ra, được gọi là một **kết quả thuận lợi cho** A.
>
> Tập hợp các kết quả thuận lợi cho A được kí hiệu là Ω_A. Khi đó người ta nói **biến cố** A **được mô tả bởi tập** Ω_A.

H2 *Xét biến cố B : "Số chấm trên mặt xuất hiện là một số lẻ" và biến cố C : "Số chấm trên mặt xuất hiện là một số nguyên tố". Hãy viết ra tập hợp Ω_B mô tả biến cố B và tập hợp Ω_C mô tả biến cố C.*

– *Biến cố chắc chắn* là biến cố luôn xảy ra khi thực hiện phép thử T. Biến cố chắc chắn được mô tả bởi tập Ω và được kí hiệu là Ω.

– *Biến cố không thể* là biến cố không bao giờ xảy ra khi phép thử T được thực hiện. Rõ ràng không có một kết quả thuận lợi nào cho biến cố không thể. Biến cố không thể được mô tả bởi tập $\varnothing$ và được kí hiệu là $\varnothing$.

2. Xác suất của biến cố

Trong cuộc sống hàng ngày, khi nói về biến cố ta thường nói biến cố này có nhiều khả năng xảy ra, biến cố kia có ít khả năng xảy ra, biến cố này có nhiều khả năng xảy ra hơn biến cố kia. Toán học đã định lượng hoá các khả năng này bằng cách gán cho mỗi biến cố một số không âm, nhỏ hơn hay bằng 1 gọi là *xác suất của biến cố đó*. Xác suất của biến cố A được kí hiệu là $P(A)$. Nó đo lường khả năng khách quan sự xuất hiện của biến cố A.

a) Định nghĩa cổ điển của xác suất

Ví dụ 4. Giả sử T là phép thử "Gieo hai con súc sắc". Kết quả của T là cặp số $(x ; y)$, trong đó x và y tương ứng là kết quả của việc gieo con súc sắc thứ nhất và thứ hai. Các kết quả có thể xảy ra của T được cho trong bảng sau đây :

$(x ; y)$ (x \ y)	1	2	3	4	5	6
1	(1 ; 1)	(1 ; 2)	(1 ; 3)	(1 ; 4)	(1 ; 5)	(1 ; 6)
2	(2 ; 1)	(2 ; 2)	(2 ; 3)	(2 ; 4)	(2 ; 5)	(2 ; 6)
3	(3 ; 1)	(3 ; 2)	(3 ; 3)	(3 ; 4)	(3 ; 5)	(3 ; 6)
4	(4 ; 1)	(4 ; 2)	(4 ; 3)	(4 ; 4)	(4 ; 5)	(4 ; 6)
5	(5 ; 1)	(5 ; 2)	(5 ; 3)	(5 ; 4)	(5 ; 5)	(5 ; 6)
6	(6 ; 1)	(6 ; 2)	(6 ; 3)	(6 ; 4)	(6 ; 5)	(6 ; 6)

Không gian mẫu của T là $\Omega = \{(1 ; 1), (2 ; 1), (3 ; 1), (4 ; 1), (5 ; 1), (6 ; 1), ..., (1 ; 6), (2 ; 6), (3 ; 6), (4 ; 6), (5 ; 6), (6 ; 6)\}$. Phép thử T có 36 kết quả có thể. Nếu con súc sắc được chế tạo cân đối thì các mặt của con súc sắc đều có cùng khả năng xuất hiện. Ta nói 36 kết quả của T là *đồng khả năng*.

Xét biến cố A : "Tổng số chấm trên mặt xuất hiện của hai con súc sắc là 7". Tập con Ω_A các kết quả thuận lợi cho A là

$$\Omega_A = \{(1 ; 6), (2 ; 5), (3 ; 4), (4 ; 3), (5 ; 2), (6 ; 1)\}.$$

Khi đó tỉ số $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ được coi là xác suất của A. □

Một cách tổng quát :

ĐỊNH NGHĨA

Giả sử phép thử T có không gian mẫu Ω là một tập hữu hạn và các kết quả của T là đồng khả năng. Nếu A là một biến cố liên quan với phép thử T và Ω_A là tập hợp các kết quả thuận lợi cho A thì **xác suất** của A là một số, kí hiệu là $P(A)$, được xác định bởi công thức

$$P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|}.$$

Như vậy, việc tính xác suất của biến cố A trong trường hợp này được quy về việc đếm số kết quả có thể của phép thử T và số kết quả thuận lợi cho A.

CHÚ Ý

Từ định nghĩa trên ta suy ra

- $0 \leq P(A) \leq 1$;
- $P(\Omega) = 1$, $P(\varnothing) = 0$.

Ví dụ 5. Một vé xổ số có 4 chữ số. Khi quay số, nếu vé bạn mua có số trùng hoàn toàn với kết quả thì bạn trúng giải nhất. Nếu vé bạn mua có đúng 3 chữ số trùng với 3 chữ số của kết quả (kể cả vị trí) thì bạn trúng giải nhì. Bạn An mua một vé xổ số.

a) Tính xác suất để An trúng giải nhất.

b) Tính xác suất để An trúng giải nhì.

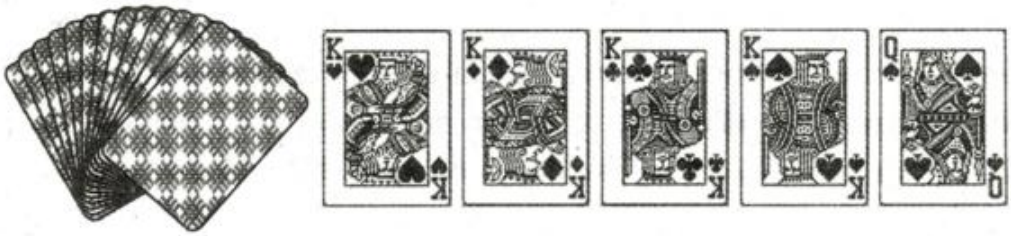
Giải

a) Số kết quả có thể là $10^4 = 10\,000$ và chỉ có một kết quả trùng với số vé của An. Do đó xác suất trúng giải nhất của An là $\frac{1}{10000} = 0{,}0001$.

b) Giả sử số vé của An là $\overline{abcd}$. Các kết quả trùng với đúng 3 chữ số của An là $\overline{abct}$ $(t \neq d)$ hoặc $\overline{abtd}$ $(t \neq c)$ hoặc $\overline{atcd}$ $(t \neq b)$ hoặc $\overline{tbcd}$ $(t \neq a)$. Vì mỗi trường hợp trên đều có 9 khả năng nên có 9 + 9 + 9 + 9 = 36 kết quả ở đó vé của An trúng giải nhì. Do đó xác suất trúng giải nhì của An là $\frac{36}{10000} = 0{,}0036$. □

Ví dụ 6. Một cỗ bài tú lơ khơ gồm 52 quân bài chia thành bốn chất : rô, cơ (màu đỏ), pích và nhép (màu đen). Mỗi chất có 13 quân bài là : 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K, A (đọc là át). Bốn quân 2 (gồm 2 rô, 2 cơ, 2 pích và 2 nhép) làm thành một bộ 2 ; bốn quân 3 (gồm 3 rô, 3 cơ, 3 pích và 3 nhép) làm thành một bộ 3 ; ... ; bốn quân át (gồm át rô, át cơ, át pích và át nhép) làm thành một bộ át.

Chọn ngẫu nhiên 5 quân bài. Tính xác suất để trong 5 quân bài đó ta có một bộ.



Giải

Số kết quả có thể là C_{52}^5. Số kết quả trong đó có một bộ 2 bằng số cách chọn một quân bài trong số 52 – 4 = 48 quân còn lại (không phải là quân 2). Vậy có 48 kết quả trong đó có một bộ 2. Tương tự có 48 kết quả trong đó có một bộ 3 ; ... ; có 48 kết quả trong đó có một bộ át. Vì có tất cả 13 bộ, nên số kết quả trong đó có xuất hiện một bộ là 13 . 48 = 624. Do đó, xác suất cần tìm là

$$\frac{624}{C_{52}^5} \approx 0{,}00024.$$ □

b) Định nghĩa thống kê của xác suất

Trong định nghĩa cổ điển của xác suất, ta cần giả thiết phép thử T có một số hữu hạn các kết quả có thể và các kết quả này là đồng khả năng. Nhưng trong nhiều trường hợp, giả thiết đồng khả năng không được thoả mãn. Chẳng hạn khi gieo một con súc sắc không cân đối thì các mặt của con súc sắc không có cùng khả năng xuất hiện. Trong trường hợp đó ta sử dụng định nghĩa sau đây gọi là định nghĩa thống kê của xác suất.

Xét phép thử T và biến cố A liên quan đến phép thử đó. Ta tiến hành lặp đi lặp lại N lần phép thử T và thống kê xem biến cố A xuất hiện bao nhiêu lần.

> Số lần xuất hiện biến cố A được gọi là **tần số** của A trong N lần thực hiện phép thử T.
>
> Tỉ số giữa tần số của A với số N được gọi là **tần suất** của A trong N lần thực hiện phép thử T.

Người ta chứng minh được rằng khi số lần thử N càng lớn thì tần suất của A càng gần với một số xác định, số đó được gọi là **xác suất của A theo nghĩa thống kê** (số này cũng chính là $P(A)$ trong định nghĩa cổ điển của xác suất).

Như vậy, tần suất được xem như giá trị gần đúng của xác suất. Trong khoa học thực nghiệm, người ta thường lấy tần suất làm xác suất. Vì vậy tần suất còn được gọi là *xác suất thực nghiệm*.

Ví dụ 7. Nếu ta gieo một đồng xu cân đối thì xác suất xuất hiện mặt ngửa là 0,5. Buýp-phông (Buffon), nhà toán học người Pháp thế kỉ XVIII, đã thí nghiệm việc gieo đồng xu nhiều lần và thu được kết quả sau :

Số lần gieo	Tần số xuất hiện mặt ngửa	Tần suất xuất hiện mặt ngửa
4 040	2 048	0,5070
12 000	6 019	0,5016
24 000	12 012	0,5005

Ví dụ 8. Một công ti bảo hiểm nhân thọ đã thống kê được trong 100 000 đàn ông 50 tuổi có 568 người chết trước khi bước sang tuổi 51 và trong 100 000 phụ nữ 50 tuổi có 284 người chết trước khi bước sang tuổi 51. Khi đó xác suất

thực nghiệm để một người đàn ông 50 tuổi chết trước khi bước sang tuổi 51 là $\frac{568}{100000} = 0,00568$ và xác suất thực nghiệm để một người phụ nữ 50 tuổi chết trước khi bước sang tuổi 51 là $\frac{284}{100000} = 0,00284$. □

H3 *Gieo con súc sắc 50 lần. Ghi lại kết quả của việc gieo này và tính tần suất xuất hiện mỗi mặt 1, 2, 3, 4, 5, 6 chấm.*

Số chấm xuất hiện	Tần số	Tần suất
1		
2		
3		
4		
5		
6		

Câu hỏi và bài tập

25. Chọn ngẫu nhiên một số nguyên dương không lớn hơn 50.

a) Mô tả không gian mẫu.

b) Gọi A là biến cố "Số được chọn là số nguyên tố". Hãy liệt kê các kết quả thuận lợi cho A.

c) Tính xác suất của A.

d) Tính xác suất để số được chọn nhỏ hơn 4.

26. Chọn ngẫu nhiên một số nguyên dương nhỏ hơn 9. Tính xác suất để :

a) Số được chọn là số nguyên tố ;

b) Số được chọn chia hết cho 3.

27. Danh sách lớp của Hường được đánh số từ 1 đến 30. Hường có số thứ tự là 12. Chọn ngẫu nhiên một bạn trong lớp.

a) Tính xác suất để Hường được chọn.

b) Tính xác suất để Hường không được chọn.

c) Tính xác suất để một bạn có số thứ tự nhỏ hơn số thứ tự của Hường được chọn.

28. Gieo hai con súc sắc cân đối.

a) Mô tả không gian mẫu.

b) Gọi A là biến cố "Tổng số chấm trên mặt xuất hiện của hai con súc sắc nhỏ hơn hoặc bằng 7". Liệt kê các kết quả thuận lợi cho A. Tính $P(A)$.

c) Cũng hỏi như trên cho các biến cố B : "Có ít nhất một con súc sắc xuất hiện mặt 6 chấm" và C : "Có đúng một con súc sắc xuất hiện mặt 6 chấm".

29. Chọn ngẫu nhiên 5 người có tên trong một danh sách 20 người được đánh số từ 1 đến 20. Tính xác suất để 5 người được chọn có số thứ tự không lớn hơn 10 (tính chính xác đến hàng phần nghìn).

Luyện tập

30. Chọn ngẫu nhiên 5 học sinh có tên trong một danh sách được đánh số thứ tự từ 001 đến 199. Tính xác suất để 5 học sinh này có số thứ tự :

a) Từ 001 đến 099 (tính chính xác đến hàng phần nghìn) ;

b) Từ 150 đến 199 (tính chính xác đến hàng phần vạn).

31. Một túi đựng 4 quả cầu đỏ, 6 quả cầu xanh. Chọn ngẫu nhiên 4 quả cầu. Tính xác suất để trong bốn quả đó có cả quả màu đỏ và màu xanh.

32. Chiếc kim của bánh xe trong trò chơi "Chiếc nón kì diệu" có thể dừng lại ở một trong 7 vị trí với khả năng như nhau. Tính xác suất để trong ba lần quay, chiếc kim của bánh xe đó lần lượt dừng lại ở ba vị trí khác nhau.

33. Gieo đồng thời hai con súc sắc cân đối. Tính xác suất để số chấm xuất hiện trên hai con súc sắc hơn kém nhau 2.

CUỐN SÁCH TIẾNG VIỆT VỀ XÁC SUẤT - THỐNG KÊ XUẤT BẢN LẦN ĐẦU TIÊN Ở NƯỚC TA

Tạ Quang Bửu
(1910 - 1986)

Vào năm 1948 cuốn sách "Thống kê thường thức" được xuất bản tại chiến khu Việt Bắc, căn cứ địa của cuộc kháng chiến chống Pháp (1945 - 1954) của dân tộc ta. Tác giả của nó là cố giáo sư Tạ Quang Bửu. Lúc đó ông đang giữ trọng trách Thứ trưởng Bộ Quốc phòng.

Cuốn sách dày 81 trang. Do điều kiện khó khăn của cuộc kháng chiến lúc đó nên nó được in trên giấy xấu, màu vàng nâu, sản xuất tại các xưởng thủ công trong núi rừng Việt Bắc. Cuốn sách trình bày các kiến thức cơ bản về xác suất, thống kê và những ứng dụng của môn học này trong quân sự. Trong Lời nói đầu, tác giả viết : "*Cuộc thi đua yêu nước đặt vấn đề thống kê ra một cách cấp bách. Thuật thống kê phải được phổ biến. Khoa học thống kê phải được nghiên cứu. Các cán bộ cao cấp phải biết dùng thống kê, các cán bộ trung cấp phải biết làm thống kê...*".

Giáo sư Tạ Quang Bửu là một nhà khoa học toàn năng, uyên bác, một cán bộ lãnh đạo có tầm nhìn chiến lược về các vấn đề khoa học và giáo dục của nước nhà, một nhân cách lớn với lối sống giản dị trong sáng. Trên cương vị Giám đốc trường Đại học Bách Khoa (1956 - 1961), Bộ trưởng Bộ Đại học và Trung học chuyên nghiệp (1965 - 1976) ông đã có những đóng góp quan trọng trong công cuộc đào tạo đội ngũ cán bộ khoa học và xây dựng nền Đại học Việt Nam.