

# § 7

## CÁC DẠNG VÔ ĐỊNH

Khi giải các bài toán về giới hạn, ta có thể gặp một số trường hợp sau đây :

- 1) Tìm  $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ , trong đó  $\lim f(x) = \lim g(x) = 0$  hoặc  $\lim f(x) = \pm \infty$ ,  
 $\lim g(x) = \pm \infty$ .
- 2) Tìm  $\lim [f(x)g(x)]$ , trong đó  $\lim f(x) = 0$ ,  $\lim g(x) = \pm \infty$ .

3) Tìm  $\lim[f(x) - g(x)]$ , trong đó  $\lim f(x) = \lim g(x) = +\infty$   
 hoặc  $\lim f(x) = \lim g(x) = -\infty$ .

(Khi  $x \rightarrow x_0$ , hoặc  $x \rightarrow x_0^+$ ,  $x \rightarrow x_0^-$ ,  $x \rightarrow +\infty$ ,  $x \rightarrow -\infty$ ).

Khi đó không áp dụng được các định lí về giới hạn hữu hạn cũng như các quy tắc tìm giới hạn vô cực. Ta gọi đó là các dạng vô định và kí hiệu chúng, theo thứ tự, là

$$1) \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}; \quad 2) 0 \cdot \infty; \quad 3) \infty - \infty.$$

Khi tìm giới hạn các dạng này, ta cần thực hiện một vài phép biến đổi để có thể sử dụng được các định lí và quy tắc đã biết. Làm như vậy gọi là *khiến dạng vô định*. Sau đây là một số ví dụ.

### 1. Dạng $\frac{0}{0}$ và $\frac{\infty}{\infty}$

**Ví dụ 1.** Tìm  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{2x - 1}}{x^2 - 12x + 11}$ .

*Giải*

Ta có dạng vô định  $\frac{0}{0}$ . Nhân tử và mẫu của phân thức với  $x + \sqrt{2x - 1}$ , ta được

$$\begin{aligned} \frac{x - \sqrt{2x - 1}}{x^2 - 12x + 11} &= \frac{(x - \sqrt{2x - 1})(x + \sqrt{2x - 1})}{(x^2 - 12x + 11)(x + \sqrt{2x - 1})} \\ &= \frac{x^2 - 2x + 1}{(x - 1)(x - 11)(x + \sqrt{2x - 1})} \\ &= \frac{x - 1}{(x - 11)(x + \sqrt{2x - 1})}, \text{ với } x \neq 1. \end{aligned}$$

Do đó

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{2x - 1}}{x^2 - 12x + 11} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{(x - 11)(x + \sqrt{2x - 1})} = 0. \quad \square$$

**H1** Tim  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^4 - 16}{x^3 + 2x^2}$ .

**Ví dụ 2.** Tìm  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^6 - 3x}}{2x^2 + 1}$ .

*Giải*

Ta có dạng vô định  $\frac{\infty}{\infty}$ . Với mọi  $x < 0$ , ta có

$$\sqrt{x^6 - 3x} = \sqrt{x^6 \left(1 - \frac{3}{x^5}\right)} = |x|^3 \sqrt{1 - \frac{3}{x^5}} = -x^3 \sqrt{1 - \frac{3}{x^5}}.$$

Do đó

$$\frac{\sqrt{x^6 - 3x}}{2x^2 + 1} = -\frac{x^3 \sqrt{1 - \frac{3}{x^5}}}{2x^2 + 1} = -\frac{\sqrt{1 - \frac{3}{x^5}}}{\frac{2}{x} + \frac{1}{x^3}}.$$

Vì  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{1 - \frac{3}{x^5}} = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x^3}\right) = 0$  và  $\frac{2}{x} + \frac{1}{x^3} < 0$  với mọi  $x < 0$

nên

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^6 - 3x}}{2x^2 + 1} = +\infty.$$

□

**[H2]** Tìm  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^6 - 3x}}{2x^2 + 1}$ .

## 2. Dạng $0.\infty$

**Ví dụ 3.** Tìm  $\lim_{x \rightarrow 2^+} (x - 2) \sqrt{\frac{x}{x^2 - 4}}$ .

*Giải*

Ta có dạng vô định  $0.\infty$ . Với mọi  $x > 2$ , ta có

$$(x - 2) \sqrt{\frac{x}{x^2 - 4}} = (x - 2) \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{(x - 2)(x + 2)}} = \frac{\sqrt{x - 2} \cdot \sqrt{x}}{\sqrt{x + 2}}.$$

Do đó

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} (x - 2) \sqrt{\frac{x}{x^2 - 4}} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x - 2} \cdot \sqrt{x}}{\sqrt{x + 2}} = \frac{0 \cdot \sqrt{2}}{2} = 0.$$

□

### 3. Dạng $\infty - \infty$

**Ví dụ 4.** Tìm  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{1+x} - \sqrt{x})$ .

*Giải*

Ta có dạng vô định  $\infty - \infty$ . Nhân và chia biểu thức đã cho với biểu thức  $\sqrt{1+x} + \sqrt{x}$ , ta được

$$\sqrt{1+x} - \sqrt{x} = \frac{(\sqrt{1+x} - \sqrt{x})(\sqrt{1+x} + \sqrt{x})}{\sqrt{1+x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{1+x} + \sqrt{x}}.$$

Do đó

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{1+x} - \sqrt{x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x} + \sqrt{x}} = 0.$$

( $\sqrt{1+x} + \sqrt{x}$  được gọi là biểu thức liên hợp của biểu thức  $\sqrt{1+x} - \sqrt{x}$ ).  $\square$

## Câu hỏi và bài tập

**38.** Tìm các giới hạn sau :

a)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$  ;

b)  $\lim_{x \rightarrow (-3)^+} \frac{2x^2 + 5x - 3}{(x + 3)^2}$  ;

c)  $\lim_{x \rightarrow (-3)^-} \frac{2x^2 + 5x - 3}{(x + 3)^2}$  ;

d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^3 + 1} - 1}{x^2 + x}$  .

**39.** Tìm các giới hạn sau :

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + x - 10}{9 - 3x^3}$  ;

b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{2x^2 - 7x + 12}}{3|x| - 17}$  .

**40.** Tìm các giới hạn sau :

a)  $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} (x^3 + 1) \sqrt{\frac{x}{x^2 - 1}}$  ;

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 2) \sqrt{\frac{x - 1}{x^3 + x}}$  .

**41.** Tìm các giới hạn sau :

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sqrt{x^2 + 1} - x \right)$  ;

b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x - x^2} - 1}{x^2 - x}$  .

## Luyện tập

42. Tìm các giới hạn sau :

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right);$

c)  $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{3 - \sqrt{x}}{9 - x};$

e)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - x^3 + 11}{2x - 7};$

b)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x + 2};$

d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{4 - x}}{x};$

f)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^4 + 4}}{x + 4}.$

43. Tìm các giới hạn sau :

a)  $\lim_{x \rightarrow -\sqrt{3}} \frac{x^3 + 3\sqrt{3}}{3 - x^2};$

c)  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x-1}}{x^2 - x};$

b)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 4x};$

d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + x + 1} - 1}{3x}.$

44. Tìm các giới hạn sau :

a)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \sqrt{\frac{2x^3 + x}{x^5 - x^2 + 3}};$

c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x^4 + x^2 - 1}}{1 - 2x};$

b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| + \sqrt{x^2 + x}}{x + 10};$

d)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{2x^2 + 1} + x).$

45. Tìm các giới hạn sau :

a)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x}}{x^2};$

c)  $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{3 - x}{\sqrt{27 - x^3}};$

b)  $\lim_{x \rightarrow 1^-} x \frac{\sqrt{1-x}}{2\sqrt{1-x} + 1 - x};$

d)  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x^3 - 8}}{x^2 - 2x}.$