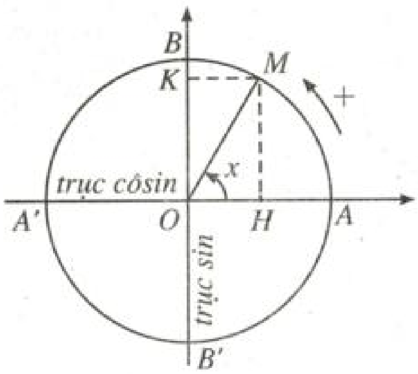
# § 1 CÁC HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

Các hàm số lượng giác thường được dùng để mô tả những hiện tượng thay đổi một cách tuần hoàn hay gặp trong thực tiễn, khoa học và kĩ thuật. Trong bài này, ta tìm hiểu các hàm số lượng giác $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$, $y = \cot x$.

## 1. Các hàm số $y = \sin x$ và $y = \cos x$

**H1** *Trên hình 1.1, hãy chỉ ra các đoạn thẳng có độ dài đại số bằng* $\sin x$, *bằng* $\cos x$. *Tính* $\sin\frac{\pi}{2}$, $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$, $\cos 2\pi$.




*Hình 1.1*

### a) Định nghĩa

> Quy tắc đặt tương ứng mỗi số thực $x$ với sin của góc lượng giác có số đo rađian bằng $x$ được gọi là **hàm số sin**, kí hiệu là $y = \sin x$.
>
> Quy tắc đặt tương ứng mỗi số thực $x$ với côsin của góc lượng giác có số đo rađian bằng $x$ được gọi là **hàm số côsin**, kí hiệu là $y = \cos x$.

Tập xác định của các hàm số $y = \sin x$, $y = \cos x$ là $\mathbb{R}$. Do đó các hàm số sin và côsin được viết là

$$\mathbf{sin} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad\qquad \mathbf{cos} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \sin x \qquad\qquad x \mapsto \cos x.$$

***Nhận xét***

Hàm số $y = \sin x$ là một *hàm số lẻ* vì $\sin(-x) = -\sin x$ với mọi $x$ thuộc $\mathbb{R}$.

**H2** *Tại sao có thể khẳng định hàm số* $y = \cos x$ *là một hàm số chẵn ?*

### b) Tính chất tuần hoàn của các hàm số $y = \sin x$ và $y = \cos x$

Ta đã biết, với mỗi số nguyên $k$, số $k2\pi$ thoả mãn

$$\sin(x + k2\pi) = \sin x \text{ với mọi } x.$$

Ngược lại, có thể chứng minh rằng số $T$ sao cho

$$\sin(x+T) = \sin x \text{ với mọi } x$$

phải có dạng $T = k2\pi$, $k$ là một số nguyên.

Rõ ràng, trong các số dạng $k2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), số dương nhỏ nhất là $2\pi$.

Vậy đối với hàm số $y = \sin x$, số $T = 2\pi$ là số dương nhỏ nhất thoả mãn

$$\sin(x+T) = \sin x \text{ với mọi } x.$$

Hàm số $y = \cos x$ cũng có tính chất tương tự.

Ta nói hai hàm số đó là những *hàm số tuần hoàn với chu kì* $2\pi$.

Từ tính chất tuần hoàn với chu kì $2\pi$, ta thấy khi biết giá trị các hàm số $y = \sin x$ và $y = \cos x$ trên một đoạn có độ dài $2\pi$ (chẳng hạn đoạn $[0\,;\,2\pi]$ hay đoạn $[-\pi\,;\,\pi]$) thì ta tính được giá trị của chúng tại mọi $x$. (Cứ mỗi khi biến số được cộng thêm $2\pi$ thì giá trị của các hàm số đó lại trở về như cũ ; điều này giải thích từ "tuần hoàn").

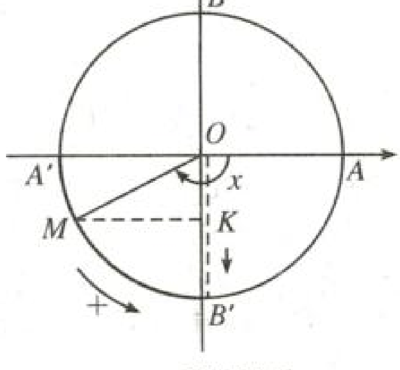
**c) Sự biến thiên và đồ thị của hàm số $y = \sin x$**

Do hàm số $y = \sin x$ là hàm số tuần hoàn với chu kì $2\pi$ nên ta chỉ cần khảo sát hàm số đó trên một đoạn có độ dài $2\pi$, chẳng hạn trên đoạn $[-\pi\,;\,\pi]$.

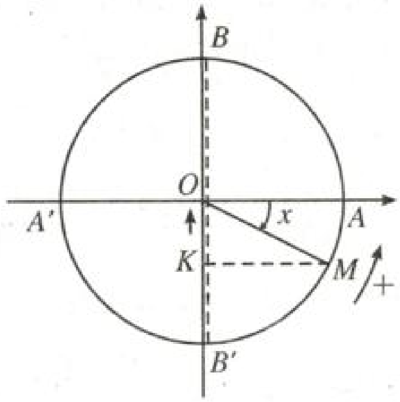
• *Chiều biến thiên* (xem các hình 1.2, 1.3, 1.4)

Cho $x = (OA, OM)$ tăng từ $-\pi$ đến $\pi$, tức là cho $M$ chạy trên đường tròn lượng giác theo chiều dương một vòng xuất phát từ $A'$ và quan sát sự thay đổi của điểm $K$ ($K$ là hình chiếu của $M$ trên trục sin, $\overline{OK} = \sin x$), ta thấy :

– Khi $x$ tăng từ $-\pi$ đến $-\dfrac{\pi}{2}$ thì điểm $M$ chạy trên đường tròn lượng giác theo chiều dương từ $A'$ đến $B'$ và điểm $K$ chạy dọc trục sin từ $O$ đến $B'$. Do đó $\overline{OK}$, tức là $\sin x$, giảm từ 0 đến $-1$ (h. 1.2).



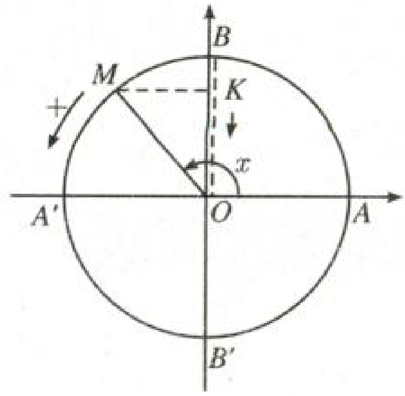
*Hình 1.2*



*Hình 1.3*

– Khi $x$ tăng từ $-\frac{\pi}{2}$ đến $\frac{\pi}{2}$ thì điểm $M$ chạy trên đường tròn lượng giác theo chiều dương từ $B'$ đến $B$ và điểm $K$ chạy dọc trục sin từ $B'$ đến $B$. Do đó $\overline{OK}$, tức là $\sin x$, tăng từ $-1$ đến 1 (h. 1.3).

– Khi $x$ tăng từ $\frac{\pi}{2}$ đến $\pi$ thì điểm $M$ chạy trên đường tròn lượng giác theo chiều dương từ $B$ đến $A'$ và điểm $K$ chạy dọc trục sin từ $B$ đến $O$. Do đó $\overline{OK}$, tức là $\sin x$, giảm từ 1 đến 0 (h. 1.4).



*Hình 1.4*

Vậy ta có bảng biến thiên của hàm số $y = \sin x$ trên đoạn $[-\pi ; \pi]$ như sau :

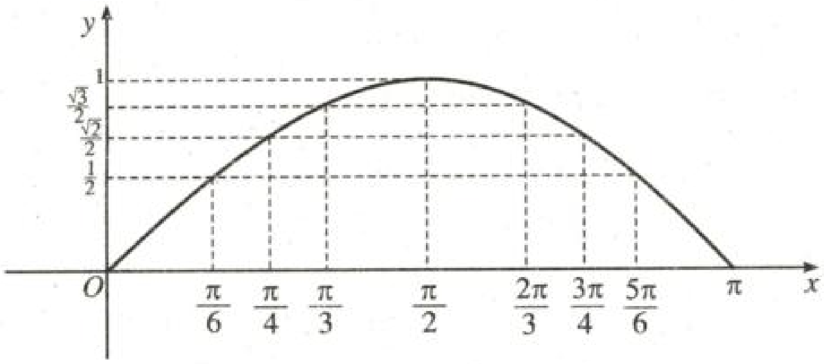
| $x$ | $-\pi$ | | $-\frac{\pi}{2}$ | | $0$ | | $\frac{\pi}{2}$ | | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y = \sin x$ | 0 | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | 0 | $\nearrow$ | 1 | $\searrow$ | 0 |

• *Đồ thị*

– Khi vẽ đồ thị của hàm số $y = \sin x$ trên đoạn $[-\pi ; \pi]$, ta nên để ý rằng : Hàm số $y = \sin x$ là một hàm số lẻ, do đó đồ thị của nó nhận gốc toạ độ làm tâm đối xứng. Vì vậy, đầu tiên ta vẽ đồ thị của hàm số $y = \sin x$ trên đoạn $[0 ; \pi]$.

Trên đoạn $[0 ; \pi]$, đồ thị của hàm số $y = \sin x$ (h. 1.5) đi qua các điểm có toạ độ $(x ; y)$ trong bảng sau :

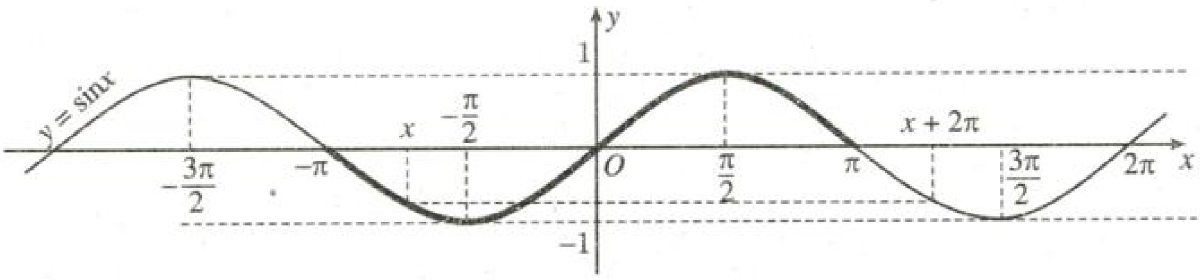
| $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y = \sin x$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ $(\approx 0{,}71)$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ $(\approx 0{,}87)$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ $(\approx 0{,}87)$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ $(\approx 0{,}71)$ | $\frac{1}{2}$ | 0 |




*Hình 1.5*

Phần đồ thị của hàm số $y = \sin x$ trên đoạn $[0 ; \pi]$ cùng với hình đối xứng của nó qua gốc $O$ lập thành đồ thị của hàm số $y = \sin x$ trên đoạn $[-\pi ; \pi]$ (h.1.6).

– Tịnh tiến phần đồ thị vừa vẽ sang trái, sang phải những đoạn có độ dài $2\pi$, $4\pi$, $6\pi$,... thì được toàn bộ đồ thị hàm số $y = \sin x$. Đồ thị đó được gọi là một *đường hình sin* (h. 1.6).




*Hình 1.6*

***Nhận xét***

1) Khi $x$ thay đổi, hàm số $y = \sin x$ nhận mọi giá trị thuộc đoạn $[-1 ; 1]$. Ta nói *tập giá trị* của hàm số $y = \sin x$ là đoạn $[-1 ; 1]$.

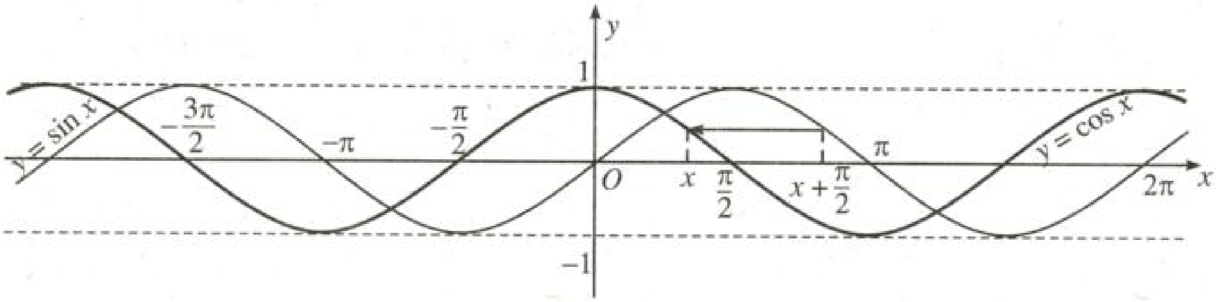
2) Hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right)$. Từ đó, do tính chất tuần hoàn với chu kì $2\pi$, hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi ; \frac{\pi}{2} + k2\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

**H3** *Hỏi khẳng định sau đây có đúng không ? Vì sao ?*

*Hàm số* $y = \sin x$ *nghịch biến trên khoảng* $\left(\frac{\pi}{2} ; \frac{3\pi}{2}\right)$ *và nghịch biến trên mỗi khoảng* $\left(\frac{\pi}{2} + k2\pi ; \frac{3\pi}{2} + k2\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

**d) Sự biến thiên và đồ thị của hàm số $y = \cos x$**

Ta có thể tiến hành khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = \cos x$ tương tự như đã làm đối với hàm số $y = \sin x$ trên đây. Tuy nhiên, ta nhận thấy $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ với mọi $x$, nên bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm số $y = \sin x$ sang trái một đoạn có độ dài $\frac{\pi}{2}$, ta được đồ thị hàm số $y = \cos x$ (nó cũng được gọi là một *đường hình sin*) (h. 1.7).




*Hình 1.7*

Căn cứ vào đồ thị của hàm số $y = \cos x$, ta lập được bảng biến thiên của hàm số đó trên đoạn $[-\pi ; \pi]$ :

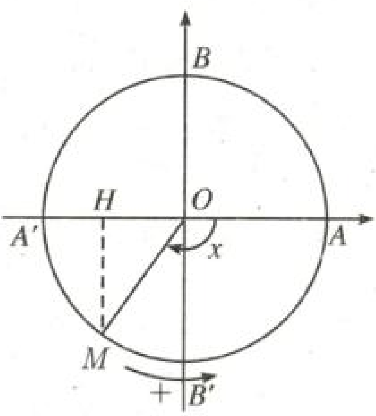
| $x$ | $-\pi$ | | $0$ | | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y = \cos x$ | $-1$ | ↗ | $1$ | ↘ | $-1$ |

**H4** *Hãy kiểm nghiệm lại bảng biến thiên trên bằng cách quan sát chuyển động của điểm H trên trục côsin, trong đó H là hình chiếu của điểm M trên trục côsin, khi điểm M chạy trên đường tròn lượng giác theo chiều dương một vòng xuất phát từ điểm A' (h. 1.8).*

***Nhận xét***

1) Khi $x$ thay đổi, hàm số $y = \cos x$ nhận mọi giá trị thuộc đoạn $[-1 ; 1]$. Ta nói *tập giá trị* của hàm số $y = \cos x$ là đoạn $[-1 ; 1]$.

2) Do hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn nên đồ thị của hàm số $y = \cos x$ nhận trục tung làm trục đối xứng.




*Hình 1.8*

3) Hàm số $y = \cos x$ đồng biến trên khoảng $(-\pi\ ;\ 0)$. Từ đó do tính chất tuần hoàn với chu kì $2\pi$, hàm số $y = \cos x$ đồng biến trên mỗi khoảng $(-\pi + k2\pi\ ;\ k2\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

**H5** *Hỏi khẳng định sau đây có đúng không ? Vì sao ?*

*Hàm số $y = \cos x$ nghịch biến trên khoảng $(0\ ;\ \pi)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $(k2\pi\ ;\ \pi + k2\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.*

GHI NHỚ

| Hàm số $y = \sin x$ | Hàm số $y = \cos x$ |
|---|---|
| – Có tập xác định là $\mathbb{R}$ ;<br>– Có tập giá trị là $[-1\ ;\ 1]$ ;<br>– Là hàm số lẻ ;<br>– Là hàm số tuần hoàn với chu kì $2\pi$ ;<br>– Đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi\ ;\ \frac{\pi}{2} + k2\pi\right)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(\frac{\pi}{2} + k2\pi\ ;\ \frac{3\pi}{2} + k2\pi\right), k \in \mathbb{Z}$ ;<br>– Có đồ thị là một đường hình sin. | – Có tập xác định là $\mathbb{R}$ ;<br>– Có tập giá trị là $[-1\ ;\ 1]$ ;<br>– Là hàm số chẵn ;<br>– Là hàm số tuần hoàn với chu kì $2\pi$ ;<br>– Đồng biến trên mỗi khoảng $(-\pi + k2\pi\ ;\ k2\pi)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $(k2\pi\ ;\ \pi + k2\pi), k \in \mathbb{Z}$ ;<br>– Có đồ thị là một đường hình sin. |

## 2. Các hàm số $y = \tan x$ và $y = \cot x$

### a) Định nghĩa

- Với mỗi số thực $x$ mà $\cos x \neq 0$, tức là $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, ta xác định được số thực $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Đặt $\mathcal{D}_1 = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \middle| k \in \mathbb{Z}\right\}$.

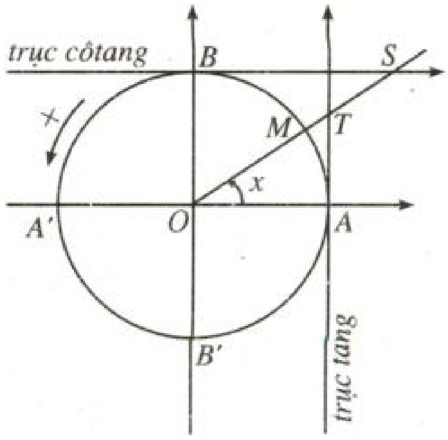
> Quy tắc đặt tương ứng mỗi số $x \in \mathcal{D}_1$ với số thực $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ được gọi là **hàm số tang**, kí hiệu là $y = \tan x$.

Vậy hàm số $y = \tan x$ có tập xác định $\mathcal{D}_1$ ; ta viết

$$\tan : \mathcal{D}_1 \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \tan x.$$

• Với mỗi số thực $x$ mà $\sin x \neq 0$, tức là $x \neq k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), ta xác định được số thực $\cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$. Đặt $\mathcal{D}_2 = \mathbb{R} \setminus \{ k\pi | k \in \mathbb{Z} \}$.




*Hình 1.9*

> Quy tắc đặt tương ứng mỗi số $x \in \mathcal{D}_2$ với số thực $\cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ được gọi là **hàm số côtang**, kí hiệu là $y = \cot x$.

Vậy hàm số $y = \cot x$ có tập xác định là $\mathcal{D}_2$ ; ta viết

$$\cot : \mathcal{D}_2 \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \cot x.$$

Trên hình 1.9 ta có $(OA, OM) = x$, $\tan x = \overline{AT}$, $\cot x = \overline{BS}$.

***Nhận xét***

1) Hàm số $y = \tan x$ là một *hàm số lẻ* vì nếu $x \in \mathcal{D}_1$ thì $-x \in \mathcal{D}_1$ và $\tan(-x) = -\tan x$.

2) Hàm số $y = \cot x$ cũng là một *hàm số lẻ* vì nếu $x \in \mathcal{D}_2$ thì $-x \in \mathcal{D}_2$ và $\cot(-x) = -\cot x$.

**b) Tính chất tuần hoàn**

Có thể chứng minh rằng $T = \pi$ là số dương nhỏ nhất thoả mãn

$$\tan(x + T) = \tan x \text{ với mọi } x \in \mathcal{D}_1,$$

và $T = \pi$ cũng là số dương nhỏ nhất thoả mãn

$$\cot(x + T) = \cot x \text{ với mọi } x \in \mathcal{D}_2.$$

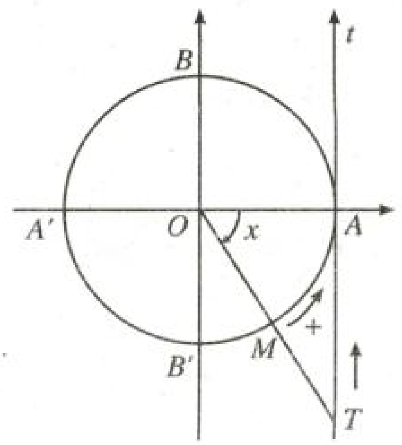
Ta nói các hàm số $y = \tan x$ và $y = \cot x$ là những *hàm số tuần hoàn với chu kì* $\pi$.

**c) Sự biến thiên và đồ thị của hàm số $y = \tan x$**

Do tính chất tuần hoàn với chu kì $\pi$ của hàm số $y = \tan x$, ta chỉ cần khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của nó trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \subset \mathcal{D}_1$, rồi tịnh tiến phần đồ thị vừa vẽ sang trái, sang phải các đoạn có độ dài $\pi$, $2\pi$, $3\pi$,... thì được toàn bộ đồ thị của hàm số $y = \tan x$.

• *Chiều biến thiên* (h. 1.10) :

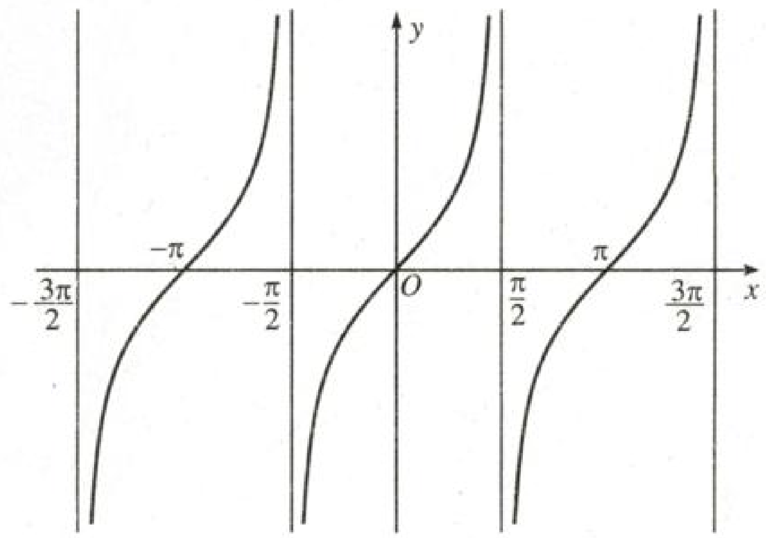
Khi cho $x = (OA, OM)$ tăng từ $-\frac{\pi}{2}$ đến $\frac{\pi}{2}$ (không kể $-\frac{\pi}{2}$ và $\frac{\pi}{2}$) thì điểm $M$ chạy trên đường tròn lượng giác theo chiều dương từ $B'$ đến $B$ (không kể $B'$ và $B$). Khi đó điểm $T$ thuộc trục tang $At$ sao cho $\overline{AT} = \tan x$ chạy dọc theo $At$ suốt từ dưới lên trên, nên $\tan x$ *tăng từ* $-\infty$ *đến* $+\infty$ (qua giá trị 0 khi $x = 0$).




*Hình 1.10*

**H6** *Tại sao có thể khẳng định hàm số $y = \tan x$ đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$ ?*

• *Đồ thị* : Đồ thị của hàm số $y = \tan x$ có dạng như ở hình 1.11.




*Hình 1.11*

*Nhận xét*

1) Khi $x$ thay đổi, hàm số $y = \tan x$ nhận mọi giá trị thực. Ta nói *tập giá trị* của hàm số $y = \tan x$ là $\mathbb{R}$.

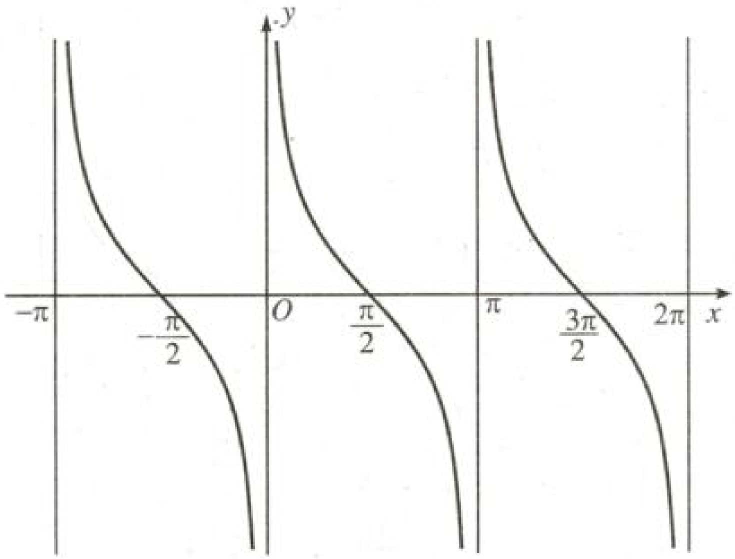
2) Vì hàm số $y = \tan x$ là hàm số lẻ nên đồ thị của nó nhận gốc toạ độ làm tâm đối xứng.

3) Hàm số $y = \tan x$ không xác định tại $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$. Với mỗi $k \in \mathbb{Z}$, đường thẳng vuông góc với trục hoành, đi qua điểm $\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\,;\, 0\right)$ gọi là một *đường tiệm cận* của đồ thị hàm số $y = \tan x$. (Từ "tiệm cận" có nghĩa là ngày càng gần. Chẳng hạn nói đường thẳng $x = \frac{\pi}{2}$ là một đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \tan x$ nhằm diễn tả tính chất : điểm $M$ trên đồ thị có hoành độ càng gần $\frac{\pi}{2}$ thì $M$ càng gần đường thẳng $x = \frac{\pi}{2}$).

**d) Sự biến thiên và đồ thị của hàm số $y = \cot x$**

Hàm số $y = \cot x$ xác định trên $\mathscr{D}_2 = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ là một hàm số tuần hoàn với chu kì $\pi$. Ta có thể khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của nó tương tự như đã làm đối với hàm số $y = \tan x$.

Đồ thị của hàm số $y = \cot x$ có dạng như hình 1.12. Nó nhận mỗi đường thẳng vuông góc với trục hoành, đi qua điểm $(k\pi\,;\,0)$, $k \in \mathbb{Z}$ làm một đường tiệm cận.




*Hình 1.12*

GHI NHỚ

| Hàm số $y = \tan x$ | Hàm số $y = \cot x$ |
|---|---|
| - Có tập xác định là<br>$\mathcal{D}_1 = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ ;<br>- Có tập giá trị là $\mathbb{R}$ ;<br>- Là hàm số lẻ ;<br>- Là hàm số tuần hoàn với chu kì $\pi$ ;<br>- Đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi ; \frac{\pi}{2} + k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$ ;<br>- Có đồ thị nhận mỗi đường thẳng $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ làm một đường tiệm cận. | - Có tập xác định là<br>$\mathcal{D}_2 = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ ;<br>- Có tập giá trị là $\mathbb{R}$ ;<br>- Là hàm số lẻ ;<br>- Là hàm số tuần hoàn với chu kì $\pi$ ;<br>- Nghịch biến trên mỗi khoảng $(k\pi ; \pi + k\pi), k \in \mathbb{Z}$ ;<br>- Có đồ thị nhận mỗi đường thẳng $x = k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ làm một đường tiệm cận. |

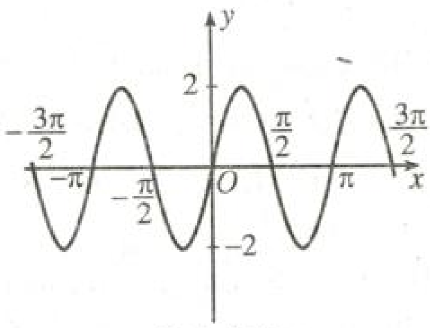
## 3. Về khái niệm hàm số tuần hoàn

Các hàm số $y = \sin x$, $y = \cos x$ là những hàm số tuần hoàn với chu kì $2\pi$ ; các hàm số $y = \tan x$, $y = \cot x$ là những hàm số tuần hoàn với chu kì $\pi$.

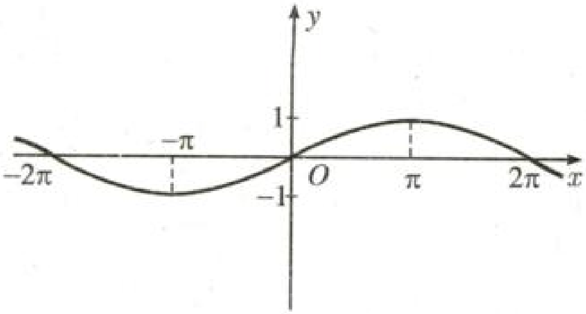
Một cách tổng quát :

> Hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập hợp $\mathcal{D}$ được gọi là **hàm số tuần hoàn** nếu có số $T \neq 0$ sao cho với mọi $x \in \mathcal{D}$ ta có
> $$x + T \in \mathcal{D},\ x - T \in \mathcal{D} \text{ và } f(x + T) = f(x).$$
> Nếu có số $T$ dương nhỏ nhất thoả mãn các điều kiện trên thì hàm số đó được gọi là một **hàm số tuần hoàn với chu kì** $T$.

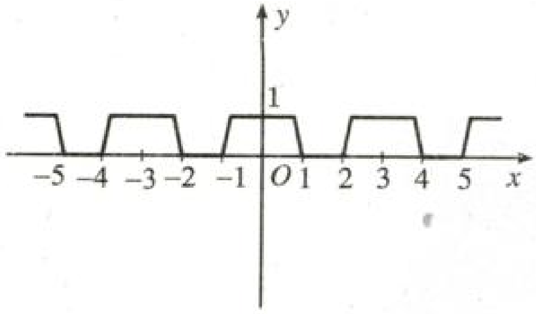
**Ví dụ.** Các hàm số $y = 2\sin 2x$ (đồ thị ở hình 1.13), hàm số $y = \sin \frac{x}{2}$ (đồ thị ở hình 1.14), và hàm số có đồ thị ở hình 1.15 là những hàm số tuần hoàn.




*Hình 1.13*




*Hình 1.14*




*Hình 1.15*

## Câu hỏi và bài tập

**1.** Tìm tập xác định của mỗi hàm số sau :

a) $y = \sqrt{3 - \sin x}$ ;  b) $y = \dfrac{1 - \cos x}{\sin x}$ ;

c) $y = \sqrt{\dfrac{1 - \sin x}{1 + \cos x}}$ ;  d) $y = \tan\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right)$.

**2.** Xét tính chẵn - lẻ của mỗi hàm số sau :

a) $y = -2\sin x$ ;  b) $y = 3\sin x - 2$ ;

c) $y = \sin x - \cos x$ ;  d) $y = \sin x \cos^2 x + \tan x$.

**3.** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của mỗi hàm số sau :

a) $y = 2\cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) + 3$ ;  b) $y = \sqrt{1 - \sin(x^2)} - 1$ ;

c) $y = 4\sin\sqrt{x}$.

**4.** Cho các hàm số $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$, $h(x) = \tan x$ và các khoảng $J_1 = \left(\pi ; \dfrac{3\pi}{2}\right)$, $J_2 = \left(-\dfrac{\pi}{4} ; \dfrac{\pi}{4}\right)$, $J_3 = \left(\dfrac{31\pi}{4} ; \dfrac{33\pi}{4}\right)$, $J_4 = \left(-\dfrac{452\pi}{3} ; -\dfrac{601\pi}{4}\right)$.

Hỏi hàm số nào trong ba hàm số đó đồng biến trên khoảng $J_1$ ? Trên khoảng $J_2$ ? Trên khoảng $J_3$ ? Trên khoảng $J_4$ ? (Trả lời bằng cách lập bảng).

**5.** Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng ? Khẳng định nào sai ? Giải thích vì sao.

a) Trên mỗi khoảng mà hàm số $y = \sin x$ đồng biến thì hàm số $y = \cos x$ nghịch biến.

b) Trên mỗi khoảng mà hàm số $y = \sin^2 x$ đồng biến thì hàm số $y = \cos^2 x$ nghịch biến.

**6.** Cho hàm số $y = f(x) = 2\sin 2x$.

a) Chứng minh rằng với số nguyên $k$ tuỳ ý, luôn có $f(x + k\pi) = f(x)$ với mọi $x$.

b) Lập bảng biến thiên của hàm số $y = 2\sin 2x$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

c) Vẽ đồ thị của hàm số $y = 2\sin 2x$.

*Bài đọc thêm*

## DAO ĐỘNG ĐIỀU HOÀ

Nhiều hiện tượng tự nhiên thay đổi có tính chất tuần hoàn (lặp đi lặp lại sau khoảng thời gian xác định) như :

– Chuyển động của các hành tinh trong hệ mặt trời,

– Chuyển động của guồng nước quay,

– Chuyển động của quả lắc đồng hồ,

– Sự biến thiên của cường độ dòng điện xoay chiều,...

Hiện tượng tuần hoàn đơn giản nhất là *dao động điều hoà* được mô tả bởi hàm số

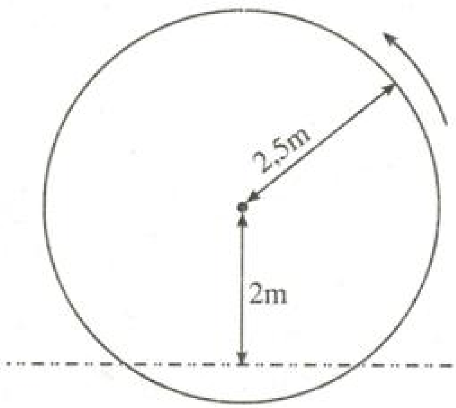
$$y = A\sin(\omega x + \alpha) + B,$$

trong đó $A$, $B$, $\omega$ và $\alpha$ là những hằng số ; $A$ và $\omega$ khác 0. Đó là hàm số tuần hoàn với chu kì $\frac{2\pi}{|\omega|}$ ; $|A|$ gọi là biên độ. Đồ thị của nó là một *đường hình sin* có được từ đồ thị của hàm số $y = A\sin\omega x$ bằng cách tịnh tiến thích hợp (theo vectơ $-\frac{\alpha}{\omega}\vec{i}$ rồi theo vectơ $B\vec{j}$, tức là tịnh tiến theo vectơ $-\frac{\alpha}{\omega}\vec{i} + B\vec{j}$ ).

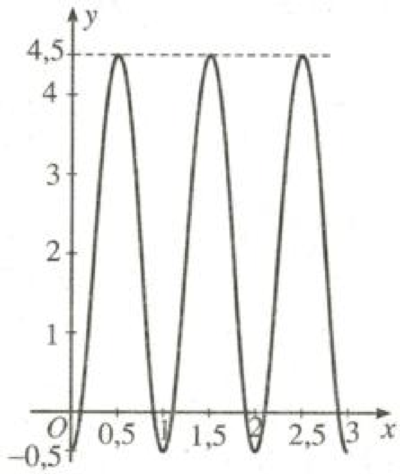
**Ví dụ.** Một guồng nước có bán kính 2,5m, có trục quay ở cách mặt nước 2m, quay đều mỗi phút một vòng (h. 1.16). Gọi $y$ (mét) là "khoảng cách" từ mặt nước đến một chiếc gầu của guồng nước ở thời điểm $x$ (phút) (quy ước rằng $y > 0$ khi gầu ở bên trên mặt nước và $y < 0$ khi gầu ở dưới nước). Biết rằng sau khi khởi động $\frac{1}{2}$ phút thì chiếc gầu đó ở đỉnh cao nhất của guồng nước. Từ các điều đó ta suy ra

$$y = 2 + 2{,}5\sin\left[2\pi\left(x - \frac{1}{4}\right)\right].$$

Đồ thị của hàm số này có dạng như ở hình 1.17.




*Hình 1.16*




*Hình 1.17*

## Luyện tập

**7.** Xét tính chẵn - lẻ của mỗi hàm số sau :

a) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ ; b) $y = \tan|x|$ ; c) $y = \tan x - \sin 2x$.

**8.** Cho các hàm số sau :

a) $y = -\sin^2 x$ ; b) $y = 3\tan^2 x + 1$ ;

c) $y = \sin x\cos x$ ; d) $y = \sin x\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x$.

Chứng minh rằng mỗi hàm số $y = f(x)$ đó đều có tính chất :

$f(x + k\pi) = f(x)$ với $k \in \mathbb{Z}$, $x$ thuộc tập xác định của hàm số $f$.

**9.** Cho hàm số $y = f(x) = A\sin(\omega x + \alpha)$ ($A$, $\omega$ và $\alpha$ là những hằng số ; $A$ và $\omega$ khác 0). Chứng minh rằng với mỗi số nguyên $k$, ta có $f\left(x + k.\dfrac{2\pi}{\omega}\right) = f(x)$ với mọi $x$.

**10.** Chứng minh rằng mọi giao điểm của đường thẳng xác định bởi phương trình $y = \dfrac{x}{3}$ với đồ thị của hàm số $y = \sin x$ đều cách gốc toạ độ một khoảng nhỏ hơn $\sqrt{10}$.

**11.** Từ đồ thị của hàm số $y = \sin x$, hãy suy ra đồ thị của các hàm số sau và vẽ đồ thị của các hàm số đó :

a) $y = -\sin x$ ; b) $y = |\sin x|$ ; c) $y = \sin|x|$.

**12.** a) Từ đồ thị hàm số $y = \cos x$, hãy suy ra đồ thị của các hàm số sau và vẽ đồ thị của các hàm số đó :

$$y = \cos x + 2 ; \qquad y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

b) Hỏi mỗi hàm số đó có phải là hàm số tuần hoàn không ?

**13.** Xét hàm số $y = f(x) = \cos\dfrac{x}{2}$.

a) Chứng minh rằng với mỗi số nguyên $k$, $f(x + k4\pi) = f(x)$ với mọi $x$.

b) Lập bảng biến thiên của hàm số $y = \cos\dfrac{x}{2}$ trên đoạn $[-2\pi ; 2\pi]$.

c) Vẽ đồ thị của các hàm số $y = \cos x$ và $y = \cos\dfrac{x}{2}$ trong cùng một hệ toạ độ vuông góc $Oxy$.

d) Trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$, xét phép biến hình F biến mỗi điểm $(x ; y)$ thành điểm $(x' ; y')$ sao cho $x' = 2x$ và $y' = y$. Chứng minh rằng F biến đồ thị của hàm số $y = \cos x$ thành đồ thị của hàm số $y = \cos\dfrac{x}{2}$.

## ÂM THANH

Âm thanh được tạo nên bởi sự thay đổi áp suất của môi trường vật chất (chất khí, chất lỏng, chất rắn) một cách tuần hoàn theo thời gian (dao động tuần hoàn) và được lan truyền trong môi trường đó (sóng âm thanh).

Nếu dao động tuần hoàn ấy có chu kì $T$ (đo bằng đơn vị thời gian là giây) thì $\frac{1}{T}$ gọi là *tần số* của dao động (tức là số chu kì trong một giây) ; đơn vị của tần số là Héc (Hertz) viết tắt là Hz. Âm thanh tai người nghe được là dao động có tần số trong khoảng từ 17-20 Hz đến 20 000 Hz. Dao động có tần số cao hơn 20 000 Hz được gọi là siêu âm.

Trong âm nhạc (nghệ thuật phối hợp các âm thanh) người ta thường dùng những nốt nhạc để ghi những âm có tần số xác định. Tần số dao động càng lớn thì âm càng cao. Khi tăng tần số một âm lên gấp đôi thì ta nói cao độ của âm đó được tăng thêm một quãng tám. Người ta thường chia quãng tám đó thành 12 quãng bằng nhau, mỗi quãng gọi là một bán cung để đo chênh lệch cao độ giữa các âm (xem Sách giáo khoa "Âm nhạc và mĩ thuật" lớp 7). Với hai âm cách nhau một bán cung, tỉ số các tần số của chúng bằng $\sqrt[12]{2}$ ; với hai âm cách nhau một cung (tức là hai bán cung), tỉ số các tần số của chúng bằng $(\sqrt[12]{2})^2 = \sqrt[6]{2}$. Ở khuông nhạc dưới đây có ghi các nốt nhạc của một "âm giai" (quãng tám) cùng khoảng cách cao độ giữa hai âm ứng với hai nốt kề nhau. Âm *la* của âm giai đó có tần số 440 Hz (do đó, chẳng hạn âm *si* kế đó có tần số $440\sqrt[6]{2}$ Hz).



Joseph Fourier
(1768 - 1830)

Trong âm nhạc, ngoài các âm riêng lẻ còn có hợp âm (kết hợp các âm thanh). Nhà toán học Pháp Phu-ri-ê (Fourier) đã chứng minh rằng một hàm số tuần hoàn với chu kì $T$ có thể phân tích thành "tổng" của một hằng số với những hàm số tuần hoàn có đồ thị là những đường hình sin với chu kì $\frac{T}{n}$ ($n$ là số nguyên dương). Điều đó giúp ta hiểu sâu hơn về hợp âm, hoà âm, âm bội và âm sắc.