§ 2 CÁC QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM

Nói chung, việc tính đạo hàm bằng định nghĩa thường rất phức tạp. Bài này sẽ cung cấp cho chúng ta những quy tắc tính đạo hàm, nhờ đó việc tính đạo hàm của một hàm số phức tạp sẽ được quy về tính đạo hàm của những hàm số đơn giản hơn.

Để tiện cho việc diễn đạt, kể từ bài này, ta sẽ sử dụng kí hiệu J để chỉ *tập con của* $\mathbb{R}$ *gồm một khoảng hoặc hợp của nhiều khoảng.*

1. Đạo hàm của tổng hay hiệu hai hàm số

ĐỊNH LÍ 1

Nếu hai hàm số $u = u(x)$ và $v = v(x)$ có đạo hàm trên J thì hàm số $y = u(x) + v(x)$ và $y = u(x) - v(x)$ cũng có đạo hàm trên J, và

a) $[u(x) + v(x)]' = u'(x) + v'(x)$;

b) $[u(x) - v(x)]' = u'(x) - v'(x)$.

Ghi chú. Các công thức trên có thể viết gọn là

$$\boxed{(u+v)' = u' + v' \text{ và } (u-v)' = u' - v'}$$

Chứng minh

a) Tại mỗi điểm $x \in J$, ta có

• $\Delta y = \left[u(x+\Delta x) + v(x+\Delta x)\right] - \left[u(x) + v(x)\right]$

$= \left[u(x+\Delta x) - u(x)\right] + \left[v(x+\Delta x) - v(x)\right] = \Delta u + \Delta v.$

• $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta u + \Delta v}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta u}{\Delta x} + \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta v}{\Delta x} = u'(x) + v'(x)$.

Vậy $[u(x) + v(x)]' = u'(x) + v'(x)$.

b) Kết luận này được chứng minh tương tự. □

Nhận xét

Có thể mở rộng định lí trên cho tổng hay hiệu của nhiều hàm số : *Nếu các hàm số u, v, ..., w có đạo hàm trên J thì trên J ta có*

$$(u \pm v \pm ... \pm w)' = u' \pm v' \pm ... \pm w'.$$

Ví dụ 1. Tìm đạo hàm của hàm số $f(x) = x^6 - \sqrt{x} + 2$ trên khoảng $(0 ; +\infty)$.

Giải

Trên khoảng $(0 ; +\infty)$ ta có

$$(x^6 - \sqrt{x} + 2)' = (x^6)' - (\sqrt{x})' + (2)' = 6x^5 - \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Vậy $f'(x) = 6x^5 - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. □

H1 *a) Tính $f'(-1)$ nếu $f(x) = x^5 - x^4 + x^2 - 1$.*

b) Cho hai hàm số $f(x) = \dfrac{-1}{x^2+1}$ và $g(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$. Biết rằng hai hàm số này có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Chứng minh rằng với mọi x thuộc $\mathbb{R}$, ta có $f'(x) = g'(x)$.

2. Đạo hàm của tích hai hàm số

Định lí 1 có thể nói gọn là : Đạo hàm của tổng (hay hiệu) hai hàm số bằng tổng (hay hiệu) các đạo hàm của hai hàm số đó.

Liệu điều tương tự có xảy ra đối với tích của hai hàm số hay không ?

Định lí sau sẽ trả lời câu hỏi đó.

ĐỊNH LÍ 2

Nếu hai hàm số $u = u(x)$ và $v = v(x)$ có đạo hàm trên J thì hàm số $y = u(x)v(x)$ cũng có đạo hàm trên J, và

$$[u(x)\,v(x)]' = u'(x)\,.\,v(x) + u(x)\,.\,v'(x)\,;$$

Đặc biệt, nếu k là hằng số thì $[ku(x)]' = ku'(x)$.

Ghi chú. Các công thức trên có thể viết gọn là

$$(uv)' = u'v + uv' \text{ và } (ku)' = ku'.$$

Chứng minh

Đặt $f(x) = u(x)\cdot v(x)$. Ta sẽ tìm đạo hàm của f tại một điểm x tuỳ ý thuộc J.

Khi biến số nhận số gia Δx thì $\Delta u = u(x + \Delta x) - u(x)$ nên

$$u(x + \Delta x) = u(x) + \Delta u.$$

Tương tự, do $\Delta v = v(x + \Delta x) - v(x)$ nên

$$v(x + \Delta x) = v(x) + \Delta v.$$

Ta sẽ sử dụng các đẳng thức trên để tính đạo hàm của hàm số f.

- $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = u(x + \Delta x)\cdot v(x + \Delta x) - u(x)\cdot v(x)$

  $= [u(x) + \Delta u]\cdot[\,v(x) + \Delta v] - u(x)\cdot v(x)$

  $= \Delta u\cdot v(x) + u(x)\cdot\Delta v + \Delta u\cdot\Delta v.$

- $$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u\cdot v(x) + u(x)\cdot\Delta v + \Delta u\cdot\Delta v}{\Delta x}$$

  $$= \lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{\Delta u}{\Delta x}v(x)\right] + \lim_{\Delta x\to 0}\left[u(x)\frac{\Delta v}{\Delta x}\right] + \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u\cdot\Delta v}{\Delta x}.$$

Để ý rằng

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{\Delta u}{\Delta x}v(x)\right] = \left[\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\right]v(x) = u'(x)\cdot v(x),$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left[u(x)\frac{\Delta v}{\Delta x}\right] = u(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} = u(x)\cdot v'(x),$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u\cdot\Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x = u'(x)\cdot v'(x)\cdot 0 = 0,$$

ta có kết quả

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

Khi $v(x) = k$ (hằng số) thì $v'(x) = 0$ nên ta có $[k \cdot u(x)]' = k \cdot u'(x)$. □

H2 *Cách tính đạo hàm như sau đúng hay sai, tại sao ?*

$$[x^3(x^2 - 4)]' = (x^3)' \cdot (x^2 - 4)' = (3x^2)(2x) = 6x^3.$$

Ví dụ 2. Tính đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ trong mỗi trường hợp sau :

a) $f(x) = \dfrac{x^8}{4} - \dfrac{2x^6}{3} + 3x$;

b) $f(x) = (2x^2 + 1)\sqrt{x}$.

Giải

a) $f'(x) = \left(\dfrac{x^8}{4} - \dfrac{2x^6}{3} + 3x\right)' = \dfrac{1}{4}(x^8)' - \dfrac{2}{3}(x^6)' + 3(x)' = 2x^7 - 4x^5 + 3.$

b) $f'(x) = \left[(2x^2 + 1)\sqrt{x}\right]' = (2x^2 + 1)'\sqrt{x} + (2x^2 + 1)(\sqrt{x})'$

$= 4x\sqrt{x} + (2x^2 + 1)\dfrac{1}{2\sqrt{x}}.$ □

H3 *a) Chứng minh rằng nếu các hàm số u, v và w có đạo hàm trên J thì hàm số f xác định bởi $f(x) = u(x)v(x)w(x)$ (với mọi $x \in J$) cũng có đạo hàm trên J và*

$$(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'.$$

b) Áp dụng, tính đạo hàm của hàm số $y = x^2(1 - x)(x + 2)$ tại điểm $x = -2$.

3. Đạo hàm của thương hai hàm số

Sử dụng định nghĩa, ta cũng chứng minh được định lí sau

ĐỊNH LÍ 3

> Nếu hai hàm số $u = u(x)$ và $v = v(x)$ có đạo hàm trên J và $v(x) \neq 0$ với mọi $x \in J$ thì hàm số $y = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ cũng có đạo hàm trên J, và
>
> $$\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}.$$

Ghi chú. Công thức trên có thể viết gọn là

$$\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.}$$

H4 *Chứng minh hệ quả dưới đây*

HỆ QUẢ

a) Trên $(-\infty\,;0) \cup (0\,;+\infty)$ ta có $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$.

b) Nếu hàm số $v = v(x)$ có đạo hàm trên J và $v(x) \neq 0$ với mọi x thuộc J thì trên J ta có $\left(\frac{1}{v(x)}\right)' = -\frac{v'(x)}{v^2(x)}$.

Ghi chú. Công thức thứ hai trong hệ quả trên có thể viết gọn là

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}.$$

Ví dụ 3. Tính đạo hàm của hàm số $y = f(x)$, nếu :

a) $f(x) = \frac{1 + 9x}{x + 2a}$ (a là hằng số) ;

b) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$.

Giải

a) Áp dụng định lí 3 (ở đây $u = 1 + 9x$ và $v = x + 2a$), ta có

$$f'(x) = \frac{(1 + 9x)'(x + 2a) - (1 + 9x)(x + 2a)'}{(x + 2a)^2} = \frac{9(x + 2a) - (1 + 9x)}{(x + 2a)^2}$$

$$= \frac{18a - 1}{(x + 2a)^2}.$$

b) Áp dụng hệ quả của định lí 3 (ở đây $v = x^2 - 1$), ta có

$$f'(x) = -\frac{(x^2 - 1)'}{(x^2 - 1)^2} = -\frac{2x}{(x^2 - 1)^2}.$$ □

H5 *Chọn kết quả đúng trong các kết quả cho sau đây.*

Đạo hàm của hàm số $y = \dfrac{x^2 - 3x + 1}{2x - 1}$ *bằng*

(A) $\dfrac{2x-3}{(2x-1)^2}$; (B) $-\dfrac{2x-3}{(2x-1)^2}$; (C) $\dfrac{2x^2-2x+1}{(2x-1)^2}$; (D) $\dfrac{6x^2-14x+5}{(2x-1)^2}$.

4. Đạo hàm của hàm số hợp

a) Khái niệm hàm số hợp

Ví dụ 4. Cho hai hàm số $y = f(u)$ và $u = u(x)$, trong đó

$$f(u) = u^3 \text{ và } u(x) = x^2 + 3x + 1.$$

Nếu trong $f(u)$, ta thay thế biến số u bởi $u(x)$ thì được

$$f[u(x)] = (x^2 + 3x + 1)^3.$$

Đặt $g(x) = f[u(x)] = (x^2 + 3x + 1)^3$. Rõ ràng $y = g(x)$ là một hàm số biến số x. Ta gọi g là *hàm số hợp* của hàm số f qua hàm số trung gian u. □

Một cách tổng quát, ta có khái niệm hàm số hợp như sau (ở đây ta chỉ xét các hàm số được cho bởi biểu thức).

> Cho hai hàm số $y = f(u)$ và $u = u(x)$. Thay thế biến u trong biểu thức $f(u)$ bởi biểu thức $u(x)$, ta được biểu thức $f[u(x)]$ với biến x. Khi đó, hàm số $y = g(x)$ với $g(x) = f[u(x)]$ được gọi là **hàm số hợp** của hai hàm số f và u ; hàm số u gọi là **hàm số trung gian**.

Trong định nghĩa trên, tập xác định của hàm số hợp $y = g(x)$ là tập các giá trị của x sao cho biểu thức $f[u(x)]$ có nghĩa.

H6 *Cho* $f(u) = \sqrt{u}$ *và* $u(x) = x - 1$. *Hãy tìm hàm số hợp* $y = f[u(x)]$ *và tập xác định của nó.*

b) Cách tính đạo hàm của hàm số hợp

ĐỊNH LÍ 4

> a) Nếu hàm số $u = u(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 và hàm số $y = f(u)$ có đạo hàm tại điểm $u_0 = u(x_0)$ thì hàm số hợp $g(x) = f[u(x)]$ có đạo hàm tại điểm x_0, và
>
> $$g'(x_0) = f'(u_0) \cdot u'(x_0).$$
>
> b) Nếu giả thiết trong phần a) được thoả mãn đối với mọi điểm x thuộc J thì hàm số hợp $y = g(x)$ có đạo hàm trên J, và
>
> $$g'(x) = f'[u(x)] \cdot u'(x).$$

Ghi chú. Công thức thứ hai trong định lí trên còn được viết gọn là

$$\boxed{g'_x = f'_u \cdot u'_x}$$

Ví dụ 5. Đối với hàm số $g(x) = f[u(x)] = (x^2 + 3x + 1)^3$ được nêu trong ví dụ 4, ta tính đạo hàm của nó như sau :

Ta có $f'(u) = \left(u^3\right)' = 3u^2$. Do $u(x) = x^2 + 3x + 1$ nên

$$f'[u(x)] = 3(x^2 + 3x + 1)^2 \text{ và } u'(x) = (x^2 + 3x + 1)' = 2x + 3.$$

Vậy $g'(x) = f'[u(x)] \cdot u'(x) = 3(x^2 + 3x + 1)^2(2x + 3)$. □

Tổng quát ta xét hàm số $y = (u(x)^n)$ (với $n \in \mathbb{N}$ và $n \geq 2$). Có thể xem hàm số này là hàm số hợp của hàm số $f(u) = u^n$ và hàm số trung gian $u = u(x)$. Do đó, nếu hàm số $u = u(x)$ có đạo hàm trên J thì ta áp dụng định lí 4 để tính đạo hàm của hàm số hợp $y = (u(x))^n$ (còn viết là $y = u^n(x)$) như sau :

$$f(u) = u^n \Rightarrow f'(u) = n \,.\, u^{n-1} \Rightarrow f'[u(x)] = n \,.\, u^{n-1}(x) \,;$$

$$\left[u^n(x)\right]' = f'[u(x)] \cdot u'(x) = n \cdot u^{n-1}(x) \cdot u'(x).$$

Vậy ta có

HỆ QUẢ 1

> Nếu hàm số $u = u(x)$ có đạo hàm trên J thì hàm số $y = u^n(x)$ (với $n \in \mathbb{N}$ và $n \geq 2$) có đạo hàm trên J, và
>
> $$\left[u^n(x)\right]' = n \,.\, u^{n-1}(x) \,.\, u'(x).$$

Ghi chú. Công thức nêu trong hệ quả 1 được viết gọn là

$$\left(u^n\right)' = n u^{n-1} u'.$$

Tương tự, ta xét hàm số $y = \sqrt{u(x)}$.

H7 *a) Tìm hàm số f sao cho hàm số $y = \sqrt{u(x)}$ là hàm số hợp của hàm số f và hàm số trung gian $u = u(x)$.*

b) Chứng minh rằng nếu hàm số $u = u(x)$ có đạo hàm trên J và $u(x) > 0$ với mọi $x \in J$ thì hàm số $y = \sqrt{u(x)}$ cũng có đạo hàm trên J và $\left(\sqrt{u(x)}\right)' = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$.

HỆ QUẢ 2

Nếu hàm số $u = u(x)$ có đạo hàm trên J và $u(x) > 0$ với mọi $x \in J$ thì hàm số $y = \sqrt{u(x)}$ có đạo hàm trên J, và

$$\left(\sqrt{u(x)}\right)' = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}.$$

Ghi chú. Công thức nêu trong hệ quả 2 được viết gọn là

$$\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}.$$

Ví dụ 6. $\left(\sqrt{x^4 - 3x^2 + 7}\right)' = \dfrac{(x^4 - 3x^2 + 7)'}{2\sqrt{x^4 - 3x^2 + 7}} = \dfrac{2x^3 - 3x}{\sqrt{x^4 - 3x^2 + 7}}.$ □

GHI NHỚ

a) Đạo hàm của một số hàm số thường gặp (ở đây $u = u(x)$)

$(c)' = 0$ *(c là hằng số)*	
$(x)' = 1$	
$(x^n)' = nx^{n-1}$ $(n \in \mathbb{N},\ n \geq 2)$	$\left(u^n\right)' = nu^{n-1}u'$
$\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$ $(x \neq 0)$	$\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$
$\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ $(x > 0)$	$\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

b) Các quy tắc tính đạo hàm (ở đây $u = u(x)$, $v = v(x)$)

$$(u \pm v)' = u' \pm v'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

c) Đạo hàm của hàm số hợp (ở đây $g(x) = f[u(x)]$)

$$\boxed{g'_x = f'_u \cdot u'_x}$$

Câu hỏi và bài tập

16. Tính đạo hàm của mỗi hàm số sau tại điểm x_0 được cho kèm theo

a) $y = 7 + x - x^2,\ x_0 = 1$; b) $y = x^3 - 2x + 1,\ x_0 = 2$;

c) $y = 2x^5 - 2x + 3,\ x_0 = 1$.

17. Tìm đạo hàm của mỗi hàm số sau (a và b là hằng số)

a) $y = x^5 - 4x^3 + 2x - 3\sqrt{x}$; b) $y = \frac{1}{4} - \frac{1}{3}x + x^2 - 0,5x^4$;

c) $y = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x + a^3$; d) $y = \frac{ax + b}{a + b}$.

18. Tìm đạo hàm của mỗi hàm số sau

a) $y = (x^7 + x)^2$; b) $y = (x^2 + 1)(5 - 3x^2)$;

c) $y = \frac{2x}{x^2 - 1}$; d) $y = \frac{5x - 3}{x^2 + x + 1}$;

e) $y = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$; f) $y = x(2x - 1)(3x + 2)$.

19. Tìm đạo hàm của mỗi hàm số sau

a) $y = (x - x^2)^{32}$; b) $y = \frac{1}{x\sqrt{x}}$;

c) $y = \frac{1 + x}{\sqrt{1 - x}}$; d) $y = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ (a là hằng số).

20. Cho hàm số $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$. Hãy giải bất phương trình $f'(x) \leq f(x)$.

Luyện tập

21. Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$. Hãy giải bất phương trình :

a) $f'(x) > 0$; b) $f'(x) \leq 3$.

22. Tìm các nghiệm của phương trình sau (làm tròn kết quả nghiệm gần đúng đến hàng phần nghìn)

a) $f'(x) = 0$ với $f(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 - 6x - 1$;

b) $f'(x) = -5$ với $f(x) = \frac{x^4}{4} - x^3 - \frac{3x^2}{2} - 3$.

23. Tính đạo hàm của mỗi hàm số sau

a) $y = \frac{2x+3}{x^2 - 5x + 5}$;

b) $y = \frac{1}{(x^2 - x + 1)^5}$;

c) $y = x^2 + x\sqrt{x} + 1$;

d) $y = (x+1)(x+2)^2(x+3)^3$;

e) $y = \sqrt{\frac{x^2+1}{x}}$.

24. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số

a) $y = \frac{x-1}{x+1}$, biết hoành độ tiếp điểm là $x_0 = 0$;

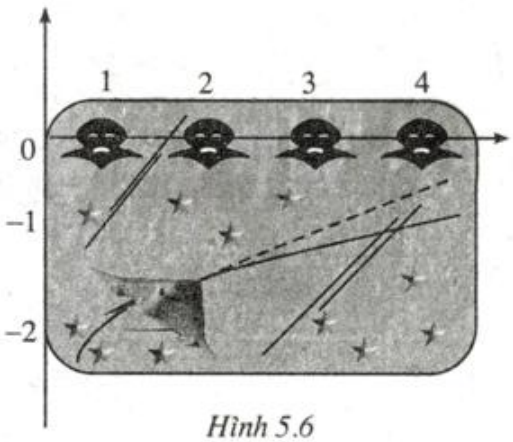
b) $y = \sqrt{x+2}$, biết tung độ tiếp điểm là $y_0 = 2$.

25. Viết phương trình tiếp tuyến của parabol $y = x^2$, biết rằng tiếp tuyến đó đi qua điểm $A(0 ; -1)$.

Hướng dẫn : Trước hết viết phương trình tiếp tuyến tại điểm có hoành độ x_0 thuộc parabol đã cho. Sau đó tìm x_0 để tiếp tuyến đi qua điểm A (chú ý rằng điểm A không thuộc parabol).

26. Hình 5.6 thể hiện màn hình của một trò chơi điện tử. Một máy bay xuất hiện ở bên trái màn hình rồi bay sang phải theo một quỹ đạo (C) là đồ thị của hàm số $y = f(x)$, trong đó $f(x) = -1 - \frac{1}{x}$, $(x > 0)$.

Biết rằng tên lửa được bắn ra từ máy bay tại một điểm thuộc (C) sẽ bay theo phương tiếp tuyến của (C) tại điểm đó. Tìm hoành độ các điểm thuộc (C)



Hình 5.6

sao cho tên lửa bắn ra từ đó có thể bắn trúng một trong bốn mục tiêu nằm ở trên màn hình có toạ độ (1 ; 0), (2 ; 0), (3 ; 0) và (4 ; 0) (làm tròn kết quả đến hàng phần vạn).

27. Một viên đạn được bắn lên từ mặt đất theo phương thẳng đứng với tốc độ ban đầu $v_0 = 196$ m/s (bỏ qua sức cản của không khí). Tìm thời điểm tại đó tốc độ của viên đạn bằng 0. Khi đó, viên đạn cách mặt đất bao nhiêu mét ?