§ 5 CÁC QUY TẮC TÍNH XÁC SUẤT

Trong tiết này ta luôn giả thiết các biến cố đang xét cùng liên quan đến phép thử T và các kết quả của T là đồng khả năng.

1. Quy tắc cộng xác suất

a) Biến cố hợp

> Cho hai biến cố A và B. Biến cố "A hoặc B xảy ra", kí hiệu là $A \cup B$, được gọi là **hợp của hai biến cố** A và B.

Nếu Ω_A và Ω_B lần lượt là tập hợp các kết quả thuận lợi cho A và B thì tập hợp các kết quả thuận lợi cho $A \cup B$ là $\Omega_A \cup \Omega_B$.

Ví dụ 1. Chọn ngẫu nhiên một học sinh trong trường em. Gọi A là biến cố "Bạn đó là học sinh giỏi Toán" và B là biến cố "Bạn đó là học sinh giỏi Văn". Khi đó $A \cup B$ là biến cố "Bạn đó là học sinh giỏi Văn hoặc giỏi Toán".

Một cách tổng quát :

> Cho k biến cố $A_1, A_2, ..., A_k$. Biến cố "Có ít nhất một trong các biến cố $A_1, A_2, ..., A_k$ xảy ra", kí hiệu là $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k$, được gọi là **hợp của** k **biến cố** đó.

b) Biến cố xung khắc

> Cho hai biến cố A và B. Hai biến cố A và B được gọi là **xung khắc** nếu biến cố này xảy ra thì biến cố kia không xảy ra.

Hai biến cố A và B là hai biến cố xung khắc nếu và chỉ nếu $\Omega_A \cap \Omega_B = \varnothing$.

Ví dụ 2. Chọn ngẫu nhiên một học sinh trong trường em. Gọi A là biến cố "Bạn đó là học sinh khối 10", B là biến cố "Bạn đó là học sinh khối 11". Khi đó A và B là hai biến cố xung khắc.

H1 *Hỏi hai biến cố A và B trong ví dụ 1 có phải là hai biến cố xung khắc hay không ?*

c) Quy tắc cộng xác suất

Để tính xác suất của biến cố hợp, ta cần đến quy tắc cộng xác suất sau đây :

> Nếu hai biến cố A và B xung khắc thì xác suất để A hoặc B xảy ra là
>
> $$P(A \cup B) = P(A) + P(B). \qquad (1)$$

Ví dụ 3. Một chiếc hộp có chín thẻ đánh số từ 1 đến 9. Rút ngẫu nhiên hai thẻ rồi nhân hai số ghi trên hai thẻ với nhau. Tính xác suất để kết quả nhận được là một số chẵn.

Giải

Kết quả nhận được là số chẵn khi và chỉ khi trong hai thẻ có ít nhất một thẻ đánh số chẵn (gọi tắt là thẻ chẵn). Gọi A là biến cố "Rút được một thẻ chẵn và một thẻ lẻ", B là biến cố "Cả hai thẻ được rút là thẻ chẵn". Khi đó biến cố "Tích hai số ghi trên hai thẻ là một số chẵn" là $A \cup B$.

Do hai biến cố A và B xung khắc, nên $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. Vì có 4 thẻ chẵn và 5 thẻ lẻ nên

ta có

$$P(A) = \frac{C_5^1 C_4^1}{C_9^2} = \frac{20}{36},\ P(B) = \frac{C_4^2}{C_9^2} = \frac{6}{36}.$$

Do đó

$$P(A \cup B) = \frac{20}{36} + \frac{6}{36} = \frac{13}{18}.$$ □

Quy tắc cộng xác suất cho nhiều biến cố được phát biểu như sau :

> Cho k biến cố $A_1, A_2, \ldots, A_k$ đôi một xung khắc. Khi đó
>
> $$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_k). \qquad (2)$$

d) Biến cố đối

> Cho A là một biến cố. Khi đó biến cố "Không xảy ra A", kí hiệu là $\overline{A}$, được gọi là **biến cố đối** của A.

Nếu Ω_A là tập hợp các kết quả thuận lợi cho A thì tập hợp các kết quả thuận lợi cho $\overline{A}$ là $\Omega \setminus \Omega_A$. Ta nói A và $\overline{A}$ là hai biến cố đối nhau.

CHÚ Ý

Hai biến cố đối nhau là hai biến cố xung khắc. Tuy nhiên hai biến cố xung khắc chưa chắc là hai biến cố đối nhau. Chẳng hạn trong ví dụ 2, A và B là hai biến cố xung khắc nhưng không phải là hai biến cố đối nhau.

ĐỊNH LÍ

Cho biến cố A. Xác suất của biến cố đối $\overline{A}$ là $$\mathrm{P}(\overline{A}) = 1 - \mathrm{P}(A). \quad (3)$$

Chứng minh

Kí hiệu $S = \overline{A} \cup A$. Do $\overline{A}$ và A là hai biến cố xung khắc nên theo công thức (1) ta có $\mathrm{P}(S) = \mathrm{P}(\overline{A}) + \mathrm{P}(A)$. Rõ ràng biến cố S luôn luôn xảy ra nên S là biến cố chắc chắn. Vậy $\mathrm{P}(S) = 1$. Suy ra

$$\mathrm{P}(\overline{A}) = 1 - \mathrm{P}(A). \qquad \square$$

H2 *Xét ví dụ 3. Tính xác suất để kết quả nhận được là một số lẻ.*

Ví dụ 4. Một hộp đựng 4 viên bi xanh, 3 viên bi đỏ và 2 viên bi vàng. Chọn ngẫu nhiên 2 viên bi.

a) Tính xác suất để chọn được 2 viên bi cùng màu.

b) Tính xác suất để chọn được 2 viên bi khác màu.

Giải

a) Gọi A là biến cố "Chọn được 2 viên bi xanh", B là biến cố "Chọn được 2 viên bi đỏ", C là biến cố "Chọn được 2 viên bi vàng" và H là biến cố "Chọn được 2 viên bi cùng màu". Ta có $H = A \cup B \cup C$ và các biến cố A, B, C đôi một xung khắc. Vậy theo công thức (2), ta có

$$\mathrm{P}(H) = \mathrm{P}(A \cup B \cup C) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(C).$$

Ta có $$\mathrm{P}(A) = \frac{\mathrm{C}_4^2}{\mathrm{C}_9^2} = \frac{6}{36}, \mathrm{P}(B) = \frac{\mathrm{C}_3^2}{\mathrm{C}_9^2} = \frac{3}{36}, \mathrm{P}(C) = \frac{\mathrm{C}_2^2}{\mathrm{C}_9^2} = \frac{1}{36}.$$

Vậy $$\mathrm{P}(H) = \frac{6}{36} + \frac{3}{36} + \frac{1}{36} = \frac{5}{18}.$$

b) Biến cố "Chọn được 2 viên bi khác màu" chính là biến cố $\overline{H}$. Vậy theo công thức (3), ta có

$$P(\overline{H}) = 1 - P(H) = 1 - \frac{5}{18} = \frac{13}{18}.$$ □

2. Quy tắc nhân xác suất

a) Biến cố giao

Cho hai biến cố A và B. Biến cố "Cả A và B cùng xảy ra", kí hiệu là AB, được gọi là **giao của hai biến cố** A và B.

Nếu Ω_A và Ω_B lần lượt là tập hợp các kết quả thuận lợi cho A và B thì tập hợp các kết quả thuận lợi cho AB là $\Omega_A \cap \Omega_B$.

Ví dụ 5. Chọn ngẫu nhiên một học sinh trong trường em. Gọi A là biến cố "Bạn đó là học sinh giỏi Toán", B là biến cố "Bạn đó là học sinh giỏi Văn". Khi đó AB là biến cố "Bạn đó là học sinh giỏi cả Văn và Toán".

Một cách tổng quát :

Cho k biến cố $A_1, A_2, ..., A_k$. Biến cố "Tất cả k biến cố $A_1, A_2, ..., A_k$ đều xảy ra", kí hiệu là $A_1A_2 ... A_k$, được gọi là **giao của** k **biến cố** đó.

b) Biến cố độc lập

Hai biến cố A và B được gọi là **độc lập** với nhau nếu việc xảy ra hay không xảy ra của biến cố này không làm ảnh hưởng tới xác suất xảy ra của biến cố kia.

Ví dụ 6. Xét phép thử T là "Gieo một đồng xu liên tiếp hai lần". Gọi A là biến cố "Lần gieo thứ nhất đồng xu xuất hiện mặt sấp", B là biến cố "Lần gieo thứ hai đồng xu xuất hiện mặt ngửa". Khi đó A và B là hai biến cố độc lập với nhau.

Nhận xét. Nếu hai biến cố A, B độc lập với nhau thì A và $\overline{B}$; $\overline{A}$ và B ; $\overline{A}$ và $\overline{B}$ cũng độc lập với nhau.

Một cách tổng quát :

Cho k biến cố $A_1, A_2, ..., A_k$; k biến cố này được gọi là **độc lập** với nhau nếu việc xảy ra hay không xảy ra của mỗi nhóm biến cố tuỳ ý trong các biến cố đã cho không làm ảnh hưởng tới xác suất xảy ra của các biến cố còn lại.

c) Quy tắc nhân xác suất

Để tính xác suất của biến cố giao, ta cần đến quy tắc nhân xác suất sau đây.

> Nếu hai biến cố A và B độc lập với nhau thì
> $$P(AB) = P(A)P(B). \quad (4)$$

Nhận xét. Từ quy tắc nhân xác suất ta thấy : Nếu $P(AB) \neq P(A)P(B)$ thì hai biến cố A, B không độc lập với nhau. Ngược lại nếu có (4) thì A và B là hai biến cố độc lập với nhau.

H3 *Cho hai biến cố A và B xung khắc.*

a) Chứng tỏ rằng $P(AB) = 0$.

b) Nếu $P(A) > 0$ *và* $P(B) > 0$ *thì hai biến cố A và B có độc lập với nhau không ?*

Ví dụ 7. Một chiếc máy có hai động cơ I và II hoạt động độc lập với nhau. Xác suất để động cơ I và động cơ II chạy tốt lần lượt là 0,8 và 0,7. Hãy tính xác suất để :

a) Cả hai động cơ đều chạy tốt ;

b) Cả hai động cơ đều không chạy tốt ;

c) Có ít nhất một động cơ chạy tốt.

Giải

a) Gọi A là biến cố "Động cơ I chạy tốt", B là biến cố "Động cơ II chạy tốt", C là biến cố "Cả hai động cơ đều chạy tốt". Ta thấy A, B là hai biến cố độc lập với nhau và $C = AB$. Theo công thức (4), ta có

$$P(C) = P(AB) = P(A)P(B) = 0{,}8 \,.\, 0{,}7 = 0{,}56.$$

b) Gọi D là biến cố "cả hai động cơ đều không chạy tốt". Ta thấy $D = \overline{A}\,\overline{B}$.

Hai biến cố $\overline{A}$ và $\overline{B}$ độc lập với nhau nên

$$P(D) = P(\overline{A})P(\overline{B}) = (1 - P(A))\,(1 - P(B)) = 0{,}2 \,.\, 0{,}3 = 0{,}06.$$

c) Gọi K là biến cố "có ít nhất một động cơ chạy tốt", khi đó biến cố đối của K là biến cố D.

Do đó $\quad P(K) = 1 - P(D) = 1 - 0{,}06 = 0{,}94.$ □

Quy tắc nhân xác suất cho nhiều biến cố được phát biểu như sau :

> Nếu k biến cố $A_1, A_2, ..., A_k$ độc lập với nhau thì
> $$P(A_1 A_2 \ldots A_k) = P(A_1)P(A_2) \ldots P(A_k). \quad (5)$$

Câu hỏi và bài tập

34. Gieo ba đồng xu cân đối một cách độc lập. Tính xác suất để :

a) Cả ba đồng xu đều sấp ;

b) Có ít nhất một đồng xu sấp ;

c) Có đúng một đồng xu sấp.

35. Xác suất bắn trúng hồng tâm của một người bắn cung là 0,2. Tính xác suất để trong ba lần bắn độc lập :

a) Người đó bắn trúng hồng tâm đúng một lần ;

b) Người đó bắn trúng hồng tâm ít nhất một lần.

36. Gieo hai đồng xu A và B một cách độc lập. Đồng xu A chế tạo cân đối. Đồng xu B chế tạo không cân đối nên xác suất xuất hiện mặt sấp gấp ba lần xác suất xuất hiện mặt ngửa. Tính xác suất để :

a) Khi gieo hai đồng xu một lần thì cả hai đồng xu đều ngửa ;

b) Khi gieo hai đồng xu hai lần thì hai lần cả hai đồng xu đều ngửa.

37. Trong một [redacted]hi trắc nghiệm khách quan có 10 câu. Mỗi câu có 5 phương án trả lời, tro[redacted] chỉ có một phương án đúng. Một học sinh không học bài nên làm bài bằ[redacted]ách với mỗi câu đều chọn ngẫu nhiên một phương án trả lời. Tính xác s[redacted]ể học sinh đó trả lời không đúng cả 10 câu (tính chính xác đến hàng phần vạn).

Bài đọc thêm

SỬ DỤNG MÁY TÍNH BỎ TÚI TRONG TÍNH TOÁN TỔ HỢP VÀ XÁC SUẤT

Khi giải các bài toán tổ hợp và xác suất, chúng ta thường phải tính các biểu thức số có chứa các số dạng n^k, $n!$, A_n^k, C_n^k. Máy tính bỏ túi là một công cụ hỗ trợ đắc lực cho ta khi phải thực hiện các tính toán này.

Đối với máy tính CASIO *fx-500 MS* cách dùng như sau :

1) Để tính n^k ta lần lượt ấn

$$n\ \boxed{\wedge}\ k\ \boxed{=}$$

Ví dụ 1. Tính 4^{10}. Ta lần lượt ấn

$$4\ \boxed{\wedge}\ 10\ \boxed{=}$$

Trên màn hình hiện kết quả 1048576.

2) Để tính $n!$ ta lần lượt ấn

$$n\ \boxed{\text{SHIFT}}\ \boxed{x!}$$

Ví dụ 2. Tính 8!. Ta lần lượt ấn

$$8\ \boxed{\text{SHIFT}}\ \boxed{x!}\ \boxed{=}$$

Trên màn hình hiện kết quả 40320.

3) Để tính A_n^k ta lần lượt ấn

$$n\ \boxed{\text{SHIFT}}\ \boxed{\text{nPr}}\ k\ \boxed{=}$$

Ví dụ 3. Tính A_{15}^3. Ta lần lượt ấn

$$15\ \boxed{\text{SHIFT}}\ \boxed{\text{nPr}}\ 3\ \boxed{=}$$

Trên màn hình hiện kết quả 2730.

4) Để tính C_n^k ta lần lượt ấn

$$n\ \boxed{\text{nCr}}\ k\ \boxed{=}$$

Ví dụ 4. Tính C_{14}^7. Ta lần lượt ấn

$$14\ \boxed{\text{nCr}}\ 7\ \boxed{=}$$

Trên màn hình hiện kết quả 3432.

Ví dụ 5. Tính hệ số của x^9 trong khai triển $(x-2)^{19}$.

Hệ số đó là $C_{19}^{10}2^{10}$. Muốn tính số này ta lần lượt ấn

$$19\ \boxed{\text{nCr}}\ 10\ \boxed{\times}\ 2\ \boxed{\wedge}\ 10\ \boxed{=}$$

Trên màn hình hiện kết quả 94 595 072.

Ví dụ 6. Chọn ngẫu nhiên 5 quân bài. Tính xác suất để trong 5 quân bài đó ta có một bộ. (Xem ví dụ 6. §4).

Xác suất đó là $P = \dfrac{624}{C_{52}^5}$. Để tính số này ta lần lượt ấn

$$624\ \boxed{\div}\ 52\ \boxed{\text{nCr}}\ 5\ \boxed{=}$$

Trên màn hình hiện kết quả 0,000240096. Vậy $P \approx 0,00024$.

Luyện tập

38. Có hai hòm đựng thẻ, mỗi hòm đựng 12 thẻ đánh số từ 1 đến 12. Từ mỗi hòm rút ngẫu nhiên một thẻ. Tính xác suất để trong hai thẻ rút ra có ít nhất một thẻ đánh số 12.

39. Cho hai biến cố A và B với $P(A) = 0,3$; $P(B) = 0,4$ và $P(AB) = 0,2$. Hỏi hai biến cố A và B có

a) Xung khắc hay không ?

b) Độc lập với nhau hay không ?

40. Trong một trò chơi điện tử, xác suất để An thắng trong một trận là 0,4 (không có hoà). Hỏi An phải chơi tối thiểu bao nhiêu trận để xác suất An thắng ít nhất một trận trong loạt chơi đó lớn hơn 0,95 ?

41. Gieo hai con súc sắc cân đối một cách độc lập. Tính xác suất để tổng số chấm trên mặt xuất hiện của hai con súc sắc bằng 8.

42. Gieo ba con súc sắc cân đối một cách độc lập. Tính xác suất để tổng số chấm trên mặt xuất hiện của ba con súc sắc bằng 9.

Em có biết

XÁC SUẤT VÀ SỐ π

1. Bằng một chiếc kim ta có thể tính gần đúng số π

Trên mặt phẳng ta kẻ các đường thẳng song song cách đều nhau một khoảng cách d. Lấy một chiếc kim có chiều dài là $\frac{d}{2}$. Tung chiếc kim đó một cách ngẫu nhiên lên mặt phẳng, nhà toán học Pháp Buýp-phông (Buffon) đã chỉ ra rằng xác suất để chiếc kim cắt một trong các đường thẳng đã vẽ là $p = \frac{1}{\pi}$.

Bây giờ ta tung chiếc kim này N lần và giả sử có k lần chiếc kim cắt một trong các đường thẳng đã vẽ. Vì tần suất $f = \frac{k}{N} \approx p = \frac{1}{\pi}$ nên ta suy ra $\pi \approx \frac{N}{k}$.

Buýp-phông đã thí nghiệm bằng cách tung một chiếc kim 2212 lần và thu được 704 lần chiếc kim cắt một trong các đường thẳng đã vẽ. Do đó

$$\pi \approx \frac{2212}{704} \approx 3{,}142045.$$

Sau đó, nhà toán học Piếc-xơn (Pearson) đã tung một chiếc kim nhiều lần hơn và tìm được $\pi \approx 3{,}1415929$. Nếu tăng số lần tung chiếc kim lên thì sẽ tính gần đúng số π với độ chính xác cao hơn.

2. Một tình huống khác có xuất hiện số π

Nếu ta chọn ngẫu nhiên hai số thực x và y trong khoảng $(0 ; 1)$ thì có thể chứng minh được rằng xác suất để ba số x, y và 1 là độ dài ba cạnh của một tam giác nhọn bằng $\frac{4-\pi}{4}$. Bạn hãy mời nhiều người (càng nhiều càng tốt) và yêu cầu mỗi người chọn lấy hai số dương trong khoảng $(0 ; 1)$. Sau đó, bạn yêu cầu mỗi người kiểm tra xem hai số đó và số 1 có là độ dài ba cạnh của tam giác nhọn không. Giả sử có n người nói "có" và m người nói "không". Vì tần suất f xấp xỉ xác suất nên

$$f = \frac{n}{n+m} \approx \frac{4-\pi}{4}. \text{ Từ đó } \pi \approx 4\left(1 - \frac{n}{n+m}\right) = \frac{4m}{n+m}.$$

Bạn không tin hãy thử thí nghiệm xem sao !