

§ 3 CẤP SỐ CỘNG

1. Định nghĩa

Quan sát dãy các số tự nhiên

$$0, 1, 2, \dots, n, n + 1, \dots$$

ta thấy các số hạng của nó có một mối liên hệ đặc biệt : Kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng bằng tổng của số hạng đứng ngay trước nó và 1.

Ta còn gặp nhiều dãy số khác cũng có tính chất tương tự như dãy số trên trong các lĩnh vực khác nhau của khoa học, kĩ thuật, cũng như trong thực tế cuộc sống. Người ta gọi các dãy số như vậy là những cấp số cộng.

ĐỊNH NGHĨA

Cấp số cộng là một dãy số (hữu hạn hay vô hạn) mà trong đó, kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng tổng của số hạng đứng ngay trước nó và một số d không đổi, nghĩa là

$$(u_n) \text{ là cấp số cộng } \Leftrightarrow \forall n \geq 2, u_n = u_{n-1} + d.$$

Số d được gọi là **công sai** của cấp số cộng.

Ví dụ 1

a) Dãy các số tự nhiên lẻ

$$1, 3, 5, \dots, 2n - 1, \dots$$

là một cấp số cộng với công sai $d = 2$.

b) Dãy số $-3, 1, 5, 9, 13, 17, 21, 25$ là một cấp số cộng với công sai $d = 4$. \square

H1 Trong các dãy số sau, dãy số nào là cấp số cộng? Vì sao?

a) $-5, -2, 1, 4, 7, 10$.

b) $3,5 ; 5 ; 6,5 ; 9 ; 10,5 ; 12$.

2. Tính chất

Ta có định lí sau :

ĐỊNH LÍ 1

Nếu (u_n) là một cấp số cộng thì kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng (trừ số hạng cuối đối với cấp số cộng hữu hạn) đều là trung bình cộng của hai số hạng đứng kề nó trong dãy, tức là

$$u_k = \frac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2}.$$

Chứng minh

Gọi d là công sai của cấp số cộng (u_n) . Với mọi $k \geq 2$ ta có

$$u_{k+1} = u_k + d,$$

$$u_{k-1} = u_k - d.$$

Từ hai đẳng thức trên ta được

$$u_{k-1} + u_{k+1} = 2u_k \quad \text{với mọi } k \geq 2.$$

Từ đó suy ra điều cần chứng minh. \square

H2 Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = -1$ và $u_3 = 3$. Hãy tìm u_2 và u_4 .

3. Số hạng tổng quát

Dễ thấy, ta có thể tìm được số hạng tùy ý của một cấp số cộng khi biết số hạng đầu u_1 và công sai d của nó. Chẳng hạn, để tìm u_4 , ta có thể làm như sau :

$$u_4 = u_3 + d = u_2 + 2d = u_1 + 3d.$$

Một cách khái quát, ta có

ĐỊNH LÝ 2

Nếu một cấp số cộng có số hạng đầu u_1 và công sai d thì số hạng tổng quát u_n của nó được xác định theo công thức sau :

$$u_n = u_1 + (n - 1)d.$$

Chứng minh

Ta chứng minh bằng phương pháp quy nạp. Công thức đúng khi $n = 1$, vì $u_1 = u_1 + 0 \cdot d$. Giả sử công thức đúng khi $n = k$, ($k \in \mathbb{N}^*$) tức là $u_k = u_1 + (k - 1)d$. Khi đó ta có

$$u_{k+1} = u_k + d = [u_1 + (k - 1)d] + d = u_1 + kd.$$

Vậy công thức cũng đúng khi $n = k + 1$. Từ đó suy ra điều cần chứng minh. \square

H3 Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 13$ và công sai $d = -3$. Hãy tính u_{31} .

Ví dụ 2. Cho một họ các đường tròn đồng tâm $(O ; r_1), (O ; r_2), \dots, (O ; r_n), \dots$ mà dãy số (r_n) là một cấp số cộng có số hạng đầu bằng 3 và công sai bằng 3.

Gọi u_1 là diện tích hình tròn $(O ; r_1)$ và với mỗi số nguyên $n \geq 2$, gọi u_n là diện tích của hình vành khăn tạo bởi đường tròn $(O ; r_{n-1})$ và đường tròn $(O ; r_n)$.



Chứng minh rằng (u_n) là một cấp số cộng. Hãy xác định công sai và số hạng tổng quát của cấp số cộng đó.

Giải

Đặt $r_0 = 0$. Khi đó, với mỗi $n \geq 1$, ta có

$$u_n = \pi.(r_n^2 - r_{n-1}^2) = \pi.(r_n - r_{n-1})(r_n + r_{n-1}) = 3\pi.(r_n + r_{n-1}).$$

Suy ra

$$u_{n+1} - u_n = 3\pi.(r_{n+1} + r_n - r_n - r_{n-1}) = 3\pi.(3 + 3) = 18\pi \text{ (với mọi } n \geq 1).$$

Do đó (u_n) là một cấp số cộng với công sai $d = 18\pi$, và số hạng đầu

$$u_1 = \pi.r_1^2 = 9\pi.$$

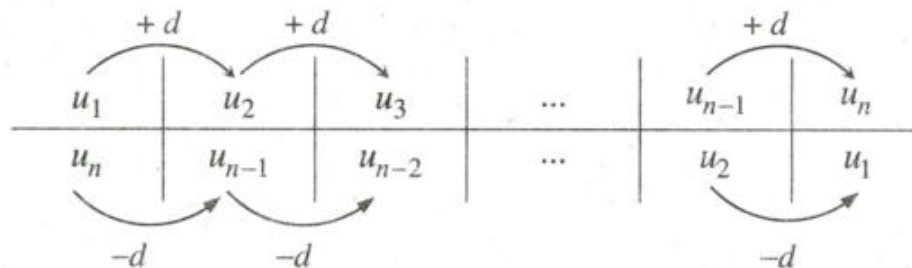
Từ đó, theo định lí 2, ta được

$$u_n = 9\pi + (n - 1).18\pi = 9(2n - 1)\pi \text{ (với mọi } n \geq 1).$$

□

4. Tổng n số hạng đầu tiên của một cấp số cộng

Giả sử có cấp số cộng (u_n) với công sai d . Xét n số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó, ta có thể biểu diễn mối liên hệ giữa chúng như sau :



Quan sát bảng trên có thể thấy tổng của hai số nằm trong cùng một cột bất kì luôn bằng tổng của u_1 và u_n . Nhận xét đó dẫn ta đến

ĐỊNH LÍ 3

Giả sử (u_n) là một cấp số cộng. Với mỗi số nguyên dương n , gọi S_n là tổng n số hạng đầu tiên của nó ($S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$). Khi đó, ta có

$$S_n = \frac{(u_1 + u_n)n}{2}.$$

Ví dụ 3. Một công ti trách nhiệm hữu hạn thực hiện việc trả lương cho các kĩ sư theo phương thức sau :

Mức lương của quý làm việc đầu tiên cho công ti là 4,5 triệu đồng/quý, và kể từ quý làm việc thứ hai, mức lương sẽ được tăng thêm 0,3 triệu đồng mỗi quý.

Hãy tính tổng số tiền lương một kĩ sư được nhận sau 3 năm làm việc cho công ti.

Giải

Với mỗi số nguyên dương n , kí hiệu u_n (triệu đồng) là mức lương của người kĩ sư ở quý làm việc thứ n cho công ti. Theo giả thiết của bài toán, ta có

$$u_1 = 4,5 \quad \text{và} \quad u_{n+1} = u_n + 0,3 \quad \text{với mọi } n \geq 1.$$

Do đó, dãy số (u_n) là một cấp số cộng với công sai $d = 0,3$.

Vì mỗi năm có 4 quý nên 3 năm có 12 quý. Như thế, theo yêu cầu của bài toán ta phải tính tổng 12 số hạng đầu tiên của cấp số cộng (u_n) .

Theo định lí 2, ta có : $u_{12} = 4,5 + (12 - 1) \cdot 0,3 = 7,8$.

Do đó, theo định lí 3, ta được

$$S_{12} \doteq \frac{12 \cdot (4,5 + 7,8)}{2} = 73,8 \text{ (triệu đồng)}. \quad \square$$

CHÚ Ý

Từ định lí 2 và định lí 3, dễ dàng suy ra

$$\forall n \geq 1, \quad S_n = \frac{[2u_1 + (n - 1)d]n}{2}.$$

H4 Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = -2$ và công sai $d = 2$. Hãy tính tổng 17 số hạng đầu tiên của cấp số đó.

H5 "Em sẽ chọn phương án nào?"

Khi kí hợp đồng lao động dài hạn với các kĩ sư được tuyển dụng, công ti liên doanh A đề xuất hai phương án trả lương để người lao động tự lựa chọn ; cụ thể :

– Ở phương án 1 : Người lao động sẽ được nhận 36 triệu đồng cho năm làm việc đầu tiên, và kể từ năm làm việc thứ hai, mức lương sẽ được tăng thêm 3 triệu đồng mỗi năm.



– Ở phương án 2 : Người lao động sẽ được nhận 7 triệu đồng cho quý làm việc đầu tiên, và kể từ quý làm việc thứ hai, mức lương sẽ được tăng thêm 500 000 đồng mỗi quý.

Nếu em là người kí hợp đồng lao động với công ti liên doanh A thì em sẽ chọn phương án nào ?

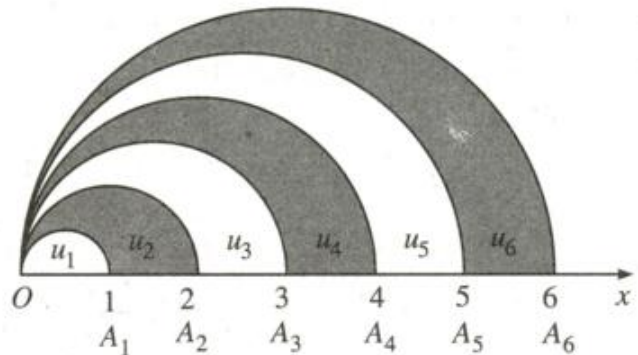
Câu hỏi và bài tập

19. Chứng minh rằng mỗi dãy số sau là một cấp số cộng và hãy xác định công sai của cấp số cộng đó :

a) Dãy số (u_n) với $u_n = 19n - 5$;

b) Dãy số (u_n) với $u_n = an + b$, trong đó a và b là các hằng số.

20. Trên tia Ox lấy các điểm $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ sao cho với mỗi số nguyên dương $n, OA_n = n$. Trong cùng một nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng chứa tia Ox , vẽ các nửa đường tròn đường kính $OA_n, n = 1, 2, \dots$.



Hình 3.3

Kí hiệu u_1 là diện tích của nửa hình tròn đường kính OA_1 và

với mỗi $n \geq 2$, kí hiệu u_n là diện tích của hình giới hạn bởi nửa đường tròn đường kính OA_{n-1} , nửa đường tròn đường kính OA_n và tia Ox (h 3.3).

Chứng minh rằng dãy số (u_n) là một cấp số cộng. Hãy xác định công sai của cấp số cộng đó.

21. Trong mỗi câu sau, hãy đánh dấu "×" vào phần kết luận mà em cho là đúng :

a) Mỗi cấp số cộng với công sai $d > 0$ là một dãy số

Tăng.

Giảm.

Không tăng cũng không giảm.

b) Mỗi cấp số cộng với công sai $d < 0$ là một dãy số

Tăng.

Giảm.

Không tăng cũng không giảm.

22. Một cấp số cộng có năm số hạng mà tổng của số hạng đầu và số hạng thứ ba bằng 28, tổng của số hạng thứ ba và số hạng cuối bằng 40. Hãy tìm cấp số cộng đó.
23. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_{20} = -52$ và $u_{51} = -145$. Hãy tìm số hạng tổng quát của cấp số cộng đó.
24. Cho cấp số cộng (u_n) với công sai d và cho các số nguyên dương m và k , với $m \geq k$. Chứng minh rằng $u_m = u_k + (m - k)d$.
Áp dụng : Hãy tìm công sai d của cấp số cộng (u_n) mà $u_{18} - u_3 = 75$.
25. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 - u_3 = 6$ và $u_5 = -10$. Hãy tìm công sai và số hạng tổng quát của cấp số cộng đó.
26. Hãy chứng minh định lí 3.
27. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_2 + u_{22} = 60$. Hãy tính tổng 23 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó.
28. Số đo ba góc của một tam giác vuông lập thành một cấp số cộng. Hãy tìm số đo ba góc đó.