

# § 4 CẤP SỐ NHÂN

## 1. Định nghĩa

Xét bài toán : Một ngân hàng quy định như sau đối với việc gửi tiền tiết kiệm theo thể thức có kì hạn : "Khi kết thúc kì hạn gửi tiền mà người gửi không đến rút tiền thì toàn bộ số tiền (bao gồm cả vốn và lãi) sẽ được chuyển gửi tiếp với kì hạn như kì hạn mà người gửi đã gửi".

Giả sử có một người gửi 10 triệu đồng với kì hạn 1 tháng vào ngân hàng nói trên và giả sử lãi suất của loại kì hạn này là 0,4%.

a) Hỏi nếu 6 tháng sau, kể từ ngày gửi, người đó mới đến ngân hàng để rút tiền thì số tiền rút được (gồm cả vốn và lãi) là bao nhiêu ?

b) Cũng câu hỏi như trên, với giả thiết thời điểm rút tiền là 1 năm sau, kể từ ngày gửi ?

Với mỗi số nguyên dương  $n$ , kí hiệu  $u_n$  là số tiền người đó rút được (gồm cả vốn và lãi) sau  $n$  tháng, kể từ ngày gửi. Khi đó, theo giả thiết của bài toán ta có :

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-1} \times 0,004 = u_{n-1} \times 1,004 \quad \forall n \geq 2.$$

Như vậy, ta có dãy số  $(u_n)$  mà kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng tích của số hạng đứng ngay trước nó và 1,004.

Người ta gọi các dãy số có tính chất tương tự như dãy số  $(u_n)$  nói trên là những cấp số nhân.

### DỊNH NGHĨA

**Cấp số nhân** là một dãy số (hữu hạn hay vô hạn) mà trong đó, kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng tích của số hạng đứng ngay trước nó và một số  $q$  không đổi, nghĩa là

$$(u_n) \text{ là cấp số nhân} \Leftrightarrow \forall n \geq 2, \quad u_n = u_{n-1} \cdot q.$$

Số  $q$  được gọi là **công bội** của cấp số nhân.

### Ví dụ 1

a) Dãy số  $(u_n)$  với  $u_n = 2^n$  là một cấp số nhân với số hạng đầu  $u_1 = 2$  và công bội  $q = 2$ .

b) Dãy số  $-2, 6, -18, 54, -162$  là một cấp số nhân với số hạng đầu  $u_1 = -2$  và công bội  $q = -3$ .

**H1** Trong các dãy số sau, dãy số nào là cấp số nhân ? Vì sao ?

- a) 4 ; 6 ; 9 ; 13,5.
- b)  $-1,5 ; 3 ; -6 ; -12 ; 24 ; -48 ; 96 ; -192$ .
- c) 7, 0, 0, 0, 0, 0.

**Ví dụ 2.** Cho dãy số  $(u_n)$  xác định bởi

$$u_1 = \frac{5}{2} \quad \text{và} \quad u_n = 3u_{n-1} - 1 \quad \text{với mọi } n \geq 2.$$

Chứng minh rằng dãy số  $(v_n)$  xác định bởi

$$v_n = u_n - \frac{1}{2} \quad \text{với mọi } n \geq 1$$

là một cấp số nhân. Hãy cho biết số hạng đầu và công bội của cấp số nhân đó.

*Giải*

Từ công thức xác định dãy số  $(v_n)$  và  $(u_n)$ , ta có

$$v_n = u_n - \frac{1}{2} = 3u_{n-1} - 1 - \frac{1}{2} = 3(u_{n-1} - \frac{1}{2}) = 3v_{n-1} \quad \text{với mọi } n \geq 2.$$

Từ đó suy ra dãy số  $(v_n)$  là một cấp số nhân với số hạng đầu

$$v_1 = u_1 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = 2$$

và công bội  $q = 3$ . □

## 2. Tính chất

Ta có định lí sau :

### ĐỊNH LÍ 1

Nếu  $(u_n)$  là một cấp số nhân thì kể từ số hạng thứ hai, bình phương của mỗi số hạng (trừ số hạng cuối đối với cấp số nhân hữu hạn) bằng tích của hai số hạng đứng kề nó trong dãy, tức là

$$u_k^2 = u_{k-1} \cdot u_{k+1}.$$

*Chứng minh*

Gọi  $q$  là công bội của cấp số nhân  $(u_n)$ .

- Nếu  $q = 0$  thì hiển nhiên ta có điều cần chứng minh.
- Nếu  $q \neq 0$  thì từ định nghĩa cấp số nhân ta có

$$u_k = u_{k-1} \cdot q \quad (k \geq 2),$$

$$u_k = \frac{u_{k+1}}{q} \quad (k \geq 2).$$

Nhân các vế tương ứng của hai đẳng thức trên, ta được điều cần chứng minh. □

**H2** *Hỏi có hay không một cấp số nhân  $(u_n)$  mà  $u_{99} = -99$  và  $u_{101} = 101$  ?*

**Ví dụ 3.** Cho cấp số nhân  $(u_n)$  với công bội  $q > 0$ . Biết  $u_1 = 1$  và  $u_3 = 3$ , hãy tìm  $u_4$ .

*Giải*

Theo định lí 1, ta có

$$u_2^2 = u_1 \cdot u_3 \quad (1)$$

$$u_3^2 = u_2 \cdot u_4 \quad (2)$$

Từ (1), do  $u_2 > 0$  (vì  $u_1 = 1 > 0$  và  $q > 0$ ), suy ra  $u_2 = \sqrt{u_1 \cdot u_3}$ . Từ đây và (2) ta được

$$u_4 = \frac{u_3^2}{\sqrt{u_1 \cdot u_3}} = \frac{3^2}{\sqrt{1 \cdot 3}} = 3\sqrt{3} \quad \square$$

### 3. Số hạng tổng quát

Tương tự như đối với cấp số cộng, ta có thể tìm được số hạng tuỳ ý của một cấp số nhân khi biết số hạng đầu và công bội của nó. Cụ thể, ta có kết quả sau :

#### ĐỊNH LÍ 2

Nếu một cấp số nhân có số hạng đầu  $u_1$  và công bội  $q \neq 0$  thì số hạng tổng quát  $u_n$  của nó được xác định bởi công thức

$$u_n = u_1 \cdot q^{n-1}.$$

**Ví dụ 4.** Trở lại bài toán đặt ra ở phần đầu mục 1.

Theo yêu cầu của bài toán ta cần tính  $u_6$  và  $u_{12}$ . Do  $(u_n)$  là một cấp số nhân với số hạng đầu  $u_1 = 10^7 + 10^7 \cdot 0,004 = 10^7 \cdot 1,004$  và công bội  $q = 1,004$  nên theo định lí 2 ta có

$$u_n = 10^7 \cdot 1,004 \cdot (1,004)^{n-1} = 10^7 \cdot (1,004)^n \quad \forall n \geq 1.$$

Suy ra :  $u_6 = 10^7 \cdot (1,004)^6 \approx 10\ 242\ 413$  (đồng),

$$u_{12} = 10^7 \cdot (1,004)^{12} \approx 10\ 490\ 702$$
 (đồng).  $\square$

**H3** Dân số của thành phố A hiện nay là 3 triệu người. Biết rằng tỉ lệ tăng dân số hằng năm của thành phố A là 2%. Hỏi dân số của thành phố A sau 2 năm nữa sẽ là bao nhiêu?

#### 4. Tổng $n$ số hạng đầu tiên của một cấp số nhân

Tương tự như đối với cấp số cộng, người ta cũng quan tâm tới việc xác định tổng  $n$  số hạng đầu tiên của một cấp số nhân theo số hạng đầu và công bội của nó.

Giả sử có cấp số nhân  $(u_n)$  với công bội  $q$ . Với mỗi số nguyên dương  $n$ , gọi  $S_n$  là tổng  $n$  số hạng đầu tiên của nó ( $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ ).

Nếu  $q = 1$  thì  $u_n = u_1$  với mọi  $n \geq 1$ . Do đó, trong trường hợp này, ta có

$$S_n = nu_1.$$

Khi  $q \neq 1$  ta có kết quả sau :

#### ĐỊNH LÝ 3

Nếu  $(u_n)$  là một cấp số nhân với công bội  $q \neq 1$  thì  $S_n$  được tính theo công thức

$$S_n = \frac{u_1(1 - q^n)}{1 - q}.$$

#### Chứng minh

Ta có

$$qS_n = qu_1 + qu_2 + \dots + qu_{n-1} + qu_n = u_2 + u_3 + \dots + u_n + u_{n+1}.$$

$$\text{Do đó } S_n - qS_n = u_1 - u_{n+1} = u_1 - u_1q^n = u_1(1 - q^n),$$

$$\text{hay } (1 - q)S_n = u_1(1 - q^n).$$

□

Từ đó, do  $q \neq 1$ , suy ra điều cần chứng minh.

**Ví dụ 5.** Cho cấp số nhân  $(u_n)$  có  $u_3 = 24$  và  $u_4 = 48$ . Hãy tính tổng  $n$  số hạng đầu tiên của cấp số đó.

*Giải*

Gọi  $q$  là công bội của cấp số nhân  $(u_n)$ , ta có

$$q = \frac{48}{24} = 2.$$

Do đó, theo định lí 2, ta được :  $24 = u_3 = u_1 \cdot 2^2$ . Suy ra  $u_1 = 6$ . Vì thế, theo định lí 3, ta được

$$S_5 = \frac{6 \cdot (1 - 2^5)}{1 - 2} = 186.$$

□

• *Đố vui. "Một hào đổi lấy năm xu ?"*

Tương truyền, vào một ngày nọ, có một nhà toán học đến gặp một nhà tỉ phú và đề nghị được "bán" tiền cho ông ta theo thể thức sau : Liên tục trong 30 ngày, mỗi ngày nhà toán học "bán" cho nhà tỉ phú 10 triệu đồng với giá 1 đồng ở ngày đầu tiên và kể từ ngày thứ hai, mỗi ngày nhà tỉ phú phải "mua" với giá gấp đôi giá của ngày hôm trước. Không một chút đắn đo, nhà tỉ phú đồng ý ngay tức thì, lòng thầm cảm ơn nhà toán học nợ đã mang lại cho ông ta một cơ hội hốt tiền "nằm mơ cũng không thấy".

Hỏi nhà tỉ phú đã lãi được bao nhiêu trong cuộc "mua – bán" kì lạ này ?



## Câu hỏi và bài tập

29. Trong các dãy số dưới đây, dãy số nào là cấp số nhân ? Hãy xác định công bội của cấp số nhân đó.

- a) Dãy số  $1, -2, 4, -8, 16, -32, 64$  ;
- b) Dãy số  $(u_n)$  với  $u_n = n \cdot 6^{n+1}$  ;
- c) Dãy số  $(v_n)$  với  $v_n = (-1)^n \cdot 3^{2n}$  ;
- d) Dãy số  $(x_n)$  với  $x_n = (-4)^{2n+1}$ .

30. Trong mỗi câu sau, hãy đánh dấu "x" vào phần kết luận mà em cho là đúng :

- a) Mỗi cấp số nhân có số hạng đầu dương và công bội  $0 < q < 1$ , là một dãy số
 

<input type="checkbox"/> Tăng.	<input type="checkbox"/> Giảm.	<input type="checkbox"/> Không tăng cũng không giảm.
--------------------------------	--------------------------------	--
- b) Mỗi cấp số nhân có số hạng đầu dương và công bội  $q > 1$  là một dãy số
 

<input type="checkbox"/> Tăng.	<input type="checkbox"/> Giảm.	<input type="checkbox"/> Không tăng cũng không giảm.
--------------------------------	--------------------------------	--

31. Cho cấp số nhân  $(u_n)$  có công bội  $q < 0$ . Biết  $u_2 = 4$  và  $u_4 = 9$ , hãy tìm  $u_1$ .
32. Một cấp số nhân có năm số hạng mà hai số hạng đầu tiên là những số dương, tích của số hạng đầu và số hạng thứ ba bằng 1, tích của số hạng thứ ba và số hạng cuối bằng  $\frac{1}{16}$ . Hãy tìm cấp số nhân đó.
33. Cho cấp số nhân  $(u_n)$  với công bội  $q \neq 0$  và  $u_1 \neq 0$ . Cho các số nguyên dương  $m$  và  $k$ , với  $m \geq k$ . Chứng minh rằng  $u_m = u_k \cdot q^{m-k}$ .
- Áp dụng*
- Tìm công bội  $q$  của cấp số nhân  $(u_n)$  có  $u_4 = 2$  và  $u_7 = -686$ .
  - Hỏi có tồn tại hay không một cấp số nhân  $(u_n)$  mà  $u_2 = 5$  và  $u_{22} = -2000$ ?
34. Hãy tìm số hạng tổng quát của cấp số nhân  $(u_n)$ , biết rằng  $u_3 = -5$  và  $u_6 = 135$ .
35. Chu kì bán rã của nguyên tố phóng xạ poloni 210 là 138 ngày (nghĩa là sau 138 ngày khối lượng của nguyên tố đó chỉ còn một nửa). Tính (chính xác đến hàng phần trăm) khối lượng còn lại của 20 gam poloni 210 sau 7314 ngày (khoảng 20 năm).
36. Tính các tổng sau :
- Tổng tất cả các số hạng của một cấp số nhân, biết rằng số hạng đầu bằng 18, số hạng thứ hai bằng 54 và số hạng cuối bằng 39 366 ;
  - Tổng tất cả các số hạng của một cấp số nhân, biết rằng số hạng đầu bằng  $\frac{1}{256}$ , số hạng thứ hai bằng  $\frac{-1}{512}$  và số hạng cuối bằng  $\frac{1}{1048576}$ .
37. Bốn góc lượng giác có số đo dương lập thành một cấp số nhân có tổng là  $360^\circ$ . Hãy tìm bốn góc đó, biết rằng số đo của góc lớn nhất gấp 8 lần số đo của góc nhỏ nhất.

## Luyện tập

38. Hãy chọn những khẳng định đúng trong các khẳng định dưới đây :
- Nếu các số thực  $a, b, c$  mà  $abc \neq 0$ , theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng với công sai khác 0 thì các số  $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$  theo thứ tự đó cũng lập thành một cấp số cộng.

b) Nếu các số thực  $a, b, c$  mà  $abc \neq 0$ , theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân thì các số  $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$  theo thứ tự đó cũng lập thành một cấp số nhân.

c)  $1 + \pi + \pi^2 + \dots + \pi^{100} = \frac{\pi^{100} - 1}{\pi - 1}.$

39. Các số  $x + 6y, 5x + 2y, 8x + y$  theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng ; đồng thời, các số  $x - 1, y + 2, x - 3y$  theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân. Hãy tìm  $x$  và  $y$ .

40. Cho cấp số cộng  $(u_n)$  với công sai khác 0. Biết rằng các số  $u_1u_2, u_2u_3$  và  $u_3u_1$  theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân với công bội  $q \neq 0$ . Hãy tìm  $q$ .

41. Số hạng thứ hai, số hạng đầu và số hạng thứ ba của một cấp số cộng với công sai khác 0 theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân. Hãy tìm công bội của cấp số nhân đó.

42. Hãy tìm ba số hạng đầu tiên của một cấp số nhân, biết rằng tổng của chúng bằng  $\frac{148}{9}$  và đồng thời các số hạng đó tương ứng là số hạng đầu, số hạng thứ tư và số hạng thứ tám của một cấp số cộng.

43. Cho dãy số  $(u_n)$  xác định bởi

$$u_1 = 1 \text{ và } u_{n+1} = 5u_n + 8 \text{ với mọi } n \geq 1.$$

a) Chứng minh rằng dãy số  $(v_n)$ , với  $v_n = u_n + 2$ , là một cấp số nhân. Hãy tìm số hạng tổng quát của cấp số nhân đó.

b) Dựa vào kết quả phần a), hãy tìm số hạng tổng quát của dãy số  $(u_n)$ .